第 37 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 3
2013 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2013

文章编号:1000-5862(2013)03-0229-04

# 向量值亚纯函数的亏量

吴 佳[1],吴 芬[2],陈裕先[3*]

(1. 咸宁职业技术学院,湖北 咸宁 437100;2. 华南师范大学数学科学学院,广东 广州 510631;
3. 新余学院数学与计算机科学学院,江西 新余 338004)

**摘要:** 利用从复平面 $C$ 到无限维 Hilbert 空间 $E$ 的无限维向量值亚纯函数的 Nevanlinna 基本理论,对无限维向量值亚纯函数的亏量进行了研究,建立了无限维向量值亚纯函数的亏量和与导函数零点的亏量之间的关系,所得结论推广了关于有限维向量值亚纯函数的相关结果.

**关键词:** 亚纯函数; Nevanlinna 基本定理; 亏量关系; 亏量

**中图分类号:** O 174.52 **文献标志码:** A

## 0 引言

本文主要研究从复平面 $C$ 到无限维 Hilbert 空间 $E$ 的向量值亚纯函数的亏量问题. 为方便计,先介绍一些基本的记号.

设$(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$为无限维 Hilbert 空间,$\|\cdot\|$是由内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$诱导的 $E$ 的范数. $E$ 的元素通常被称为向量,这些向量分别用字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示,且 $\mathbf{0}$ 表示 $E$ 的零向量. $\hat{\infty}$、$\infty$、$+\infty$ 分别表示为无穷向量、无穷复数、无穷实数. 下面给出关于向量值亚纯函数的一些基本定义和记号[1-4].

设$f(z)$是定义在 $C_R=\{|z|<R\}$,$0<R\leqslant+\infty$(约定 $C_{+\infty}=C$)上而在无限维 Hilbert 空间 $E$ 中取值的向量值亚纯函数. 记$f(z)=(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_k(z),\cdots)$,如果所有的$f_j(z)$都是全纯函数(有些$f_j(z)$是亚纯函数),则称向量值映射$f(z)$为全纯(亚纯)函数. $f(z)$的$j(j=1,2,\cdots)$阶导数定义为

$$f^{(j)}(z)=(f_1^{(j)}(z),f_2^{(j)}(z),\cdots,f_k^{(j)}(z),\cdots),$$

称 $z_0$ 为$f(z)$的零点,是指$f(z_0)=0$($E$ 中零元). 称 $z_0$ 为$f(z)$的极点,如果 $z_0$ 至少为$f(z)$的某个分支的极点. 定义

$$V(r,\hat{\infty},f)=V(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\log|r/\xi|\cdot\Delta\log\|f(\xi)\|\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\xi=x+\mathrm{i}y,$$

$$V(r,\boldsymbol{a})=V(r,\boldsymbol{a},f)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_r}\log|r/\xi|\cdot\Delta\log\|f(\xi)-\boldsymbol{a}\|\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\xi=x+\mathrm{i}y,$$

$$m(r,f)=m(r,\hat{\infty},f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\|f(re^{\mathrm{i}\theta})\|\,\mathrm{d}\theta,$$

$$m(r,\boldsymbol{a})=m(r,\boldsymbol{a},f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{\|f(re^{\mathrm{i}\theta})-\boldsymbol{a}\|}\mathrm{d}\theta,$$

$$N(r,f)=n(0,f)\log r+\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\mathrm{d}t,$$

$$N(r,\hat{\infty})=n(0,\hat{\infty})\log r+\int_0^r\frac{n(t,\hat{\infty})-n(0,\hat{\infty})}{t}\mathrm{d}t,$$

$$N(r,\boldsymbol{a})=n(0,\boldsymbol{a})\log r+\int_0^r\frac{n(t,\boldsymbol{a})-n(0,\boldsymbol{a})}{t}\mathrm{d}t,$$

其中 $m(r,f)$ 为向量值 Nevanlinna 逼近函数,$n(r,f)$ 或 $n(r,\hat{\infty})$ 及 $n(r,\boldsymbol{a},f)=n(r,\boldsymbol{a})$ 分别表示向量值亚纯函数$f(z)$在圆$|z|\leqslant r$内的极点个数和 $\boldsymbol{a}$ 值点的个数(重点按重数计算).

设$f(z):C_R\to E$是定义在 $C_R=\{|z|<R\}$,$0<R\leqslant+\infty$ 上的向量值亚纯函数,定义$f(z)$的 Nevanlinna 特征函数为 $T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)$. 关于 Nevanlinna 特征函数的性质,文献[2]证明了 $T(r,f)$ 是变量 $r$ 的增函数和变量 $\log r$ 的凸函数,并且定义$f(z)$的上级$\lambda(f)$与下级$\mu(f)$分别为 $T(r,f)$ 的上级与下级,即

$$\lambda(f)=\limsup_{r\to\infty}\log T(r,f)/\log r,$$

**收稿日期:** 2013-01-25

**基金项目:** 国家自然科学基金(11201395)和江西省自然科学基金(20122BAB201006)资助项目.

**通信作者:** 陈裕先(1968-),男,江西永新人,教授,主要从事复分析研究.

$$\mu(f)=\liminf_{r\to\infty}\log T(r,f)/\log r.$$

若 $\lambda(f)<\infty$，称 $f(z)$ 为有穷级；$\lambda(f)=\infty$ 称 $f(z)$ 为无穷级.

文献[4]证明了定义在 $C_R=\{|z|<R\}$，$0<R\leqslant+\infty$ 上的向量值亚纯函数 $f(z)$ 若不蜕化为有理函数，则有

$$\limsup_{r\to\infty}T(r,f)/\log r=+\infty.$$

**定义1** 设 $f(z):C_R\to E$ 是定义在 $C_R=\{|z|<R\}$，$0<R\leqslant+\infty$ 上的向量值亚纯函数，用 $S(r,f)$ 表示任何具有下列性质的量

$$S(r,f)=o(T(r,f)),r\to+\infty.$$

如果 $f(z)$ 为无限级向量值亚纯函数，则至多除去1个关于 $r$ 的线测度有限的集合，否则对任意 $r$ 都成立.

## 1 相关结果

下面给出向量值亚纯函数的 Nevanlinna 第一基本定理、对数导数引理.

**定理A** 设 $E$ 为无穷维 Hilbert 空间，$f:C_R\to E$ 为向量值亚纯函数，则对于 $0<r<R$，$\boldsymbol{a}\in E$，$f(z)\neq\boldsymbol{a}$，有

$$T(r,f)=V(r,\boldsymbol{a})+N(r,\boldsymbol{a})+m(r,\boldsymbol{a})+\log\|C_q(\boldsymbol{a})\|+\varepsilon(r,\boldsymbol{a}),$$

其中 $|\varepsilon(r,\boldsymbol{a})|\leqslant\log^+\|\boldsymbol{a}\|+\log2$，$\varepsilon(r,0)\equiv0$，如果 $f(0)\neq\boldsymbol{a}$ 且 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的极点，则 $C_q(\boldsymbol{a})=f(0)-\boldsymbol{a}$，$C_q(\boldsymbol{a})$ 是 $f(z)-\boldsymbol{a}$ 在 $z=0$ 的邻域内的 Laurent 展式的首项系数.

**定理B** 设 $E$ 为无穷维 Hilbert 空间，$C_R=\{|z|<R\}$，$0<R\leqslant\infty$，$f:C_R\to E$ 为向量值亚纯函数，且不蜕化为常向量函数，$a$ 是任意有限向量，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{\|f'(re^{i\theta})\|}{\|f(re^{i\theta})-\boldsymbol{a}\|}d\theta=S(r,f),\boldsymbol{a}\in E.$$

**定义2** 设 $E$ 为无穷维 Hilbert 空间，$f:C\to E$ 为向量值亚纯函数，且不蜕化为向量值有理函数，$\forall\boldsymbol{a}\in E\cup\{\hat{\infty}\}$，记

$$\delta(\boldsymbol{a})=\delta(\boldsymbol{a},f)=\liminf_{r\to+\infty}m(r,\boldsymbol{a})/T(r,f)=1-\limsup_{r\to+\infty}\frac{V(r,\boldsymbol{a})+N(r,\boldsymbol{a})}{T(r,f)},$$

称 $\delta(\boldsymbol{a})$ 为 $f(z)$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 处的亏量，显然 $0\leqslant\delta(\boldsymbol{a})\leqslant1$. 如果 $\delta(\boldsymbol{a})>0$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是 $f(z)$ 的1个亏值或亏向量. 如果 $\delta(\boldsymbol{a})=1$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是 $f(z)$ 的1个满亏值或满亏向量.

特别地，当 $\boldsymbol{a}=\hat{\infty}$ 时，

$$\delta(\hat{\infty})=\liminf_{r\to+\infty}\frac{m(r,f)}{T(r,f)}=1-\limsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,f)}{T(r,f)}.$$

对于圆环内的亚纯函数，文献[5]定义并研究了拟亏量，仿文献[5]可定义向量值亚纯函数的拟亏量. 文献[6-7]研究了亚纯函数及其导函数的亏量的关系，最近，I. Lahiri[8]研究了有限维向量值亚纯函数[9-10]及其导函数的亏量之间的关系，证明了如下定理.

**定理C** 假设 $f(z)=(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z))$ 是定义在复平面到有限维欧氏空间 $C^n$ 的有穷级向量值超越整函数，则有

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in C^n}\delta(\boldsymbol{a})\leqslant\delta(0,f').$$

## 2 主要结果

自然地，如果定理C中的向量值亚纯函数 $f(z)$ 在无限维 Hilbert 空间 $E$ 中取值时，是否存在类似的结果？本文主要讨论这一问题并得到下面定理.

**定理1** 设 $E$ 为无穷维 Hilbert 空间，$f:C\to E$ 为有限级向量值亚纯函数，且不蜕化为向量值有理函数. 若 $\delta(\hat{\infty})=1$，则有

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in E}\delta(\boldsymbol{a})\leqslant\delta(0,f').$$

定理1仅研究了有限级向量值亚纯函数的亏量问题，一个自然的问题是：无限级向量值亚纯函数是否有相似的结果？这里不详细讨论，只提供一个思路，可以借助迭代级[11-12]或无限级型函数[13-14]予以讨论. 下面给出定理1的证明.

证 对 $E$ 中任意 $q(\geqslant2)$ 个向量 $\boldsymbol{a}_j(1\leqslant j\leqslant q)$ 作辅助函数

$$F(z)=\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{\|f(z)-\boldsymbol{a}_j\|},$$

对于 $0<r<R$，便得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+F(re^{i\theta})d\theta=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left\{F(re^{i\theta})\|f'(re^{i\theta})\|\frac{1}{\|f'(re^{i\theta})\|}\right\}d\theta\leqslant$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{\|f'(re^{i\theta})\|}d\theta+$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\{F(re^{i\theta})\|f'(re^{i\theta})\|\}d\theta=$$
$$m(r,0,f')+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\{F(re^{i\theta})\|f'(re^{i\theta})\|\}d\theta. \quad (1)$$

令 $\delta = \min\limits_{i \neq j} \| \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_j \|$，对于 $r$ 的固定值，记 $A_j(j=1,2,\cdots,q)$ 为 $|z|=r$ 上的集合，使得

$$\|f(z) - \boldsymbol{a}_j\| < \frac{\delta}{2q}\left(\leqslant \frac{\delta}{4} \text{ 因 } q \geqslant 2\right).$$

当 $v \neq j, z \in A_j$ 时，

$$\|f(z) - \boldsymbol{a}_\nu\| \geqslant \|\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_\nu\| - \|f(z) - \boldsymbol{a}_j\| > \delta - \delta/2q \geqslant 3\delta/4 (\text{因 } q \geqslant 2),$$

所以这样的 $A_j$ 或者是空集，或者任意 2 个这样的集合的交是空集，即 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$. 在任何情况下都有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ F(re^{i\theta})\,d\theta \geqslant$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{v=1}^{q}\int_{\|f(z)-\boldsymbol{a}_v\|<\delta/2q,|z|=r} \log^+ F(re^{i\theta})\,d\theta \geqslant$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{v=1}^{q}\int_{\|f(z)-\boldsymbol{a}_v\|<\delta/2q,|z|=r} \log^+ \frac{1}{\|f(re^{i\theta}) - \boldsymbol{a}_v\|}d\theta,$$

由于

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{v=1}^{q}\int_{\|f(z)-\boldsymbol{a}_v\|<\delta/2q,|z|=r} \log^+ \frac{1}{\|f(re^{i\theta}) - \boldsymbol{a}_v\|}d\theta =$$

$$m(r,\boldsymbol{a}_v) - \frac{1}{2\pi}\sum_{v=1}^{q}\int_{\|f(z)-\boldsymbol{a}_v\|\geqslant\delta/2q,|z|=r} \log^+ \frac{1}{\|f(re^{i\theta}) - \boldsymbol{a}_v\|}d\theta \geqslant$$

$$m(r,\boldsymbol{a}_v) - \log^+ 2q/\delta.$$

于是有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ F(re^{i\theta})\,d\theta \geqslant \sum_{v=1}^{q} m(r,\boldsymbol{a}_v) - q\log^+ 2q/\delta.$$

再由(1)式得

$$m(r,0,f') \geqslant \sum_{v=1}^{q} m(r,\boldsymbol{a}_v) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \{F(re^{i\theta})\,\|f'(re^{i\theta})\|\}\,d\theta - q\log^+ 2q/\delta,$$

因为 $f(z)$ 为非常向量函数，所以 $f'(z)$ 不蜕化为零向量函数，将 $f'(z)$ 应用于定理 A(此时 $\boldsymbol{a}=0$) 并结合定理 B，得

$$T(r,f') = V(r,0,f') + N(r,0,f') + m(r,0,f') + O(1).$$

所以

$$\sum_{v=1}^{q} m(r,\boldsymbol{a}_v) + N(r,0,f') + V(r,0,f') \leqslant T(r,f') + S(r,f).$$

上式两边同时除以 $T(r,f')$ 并取极限得

$$\frac{N(r,0,f') + V(r,0,f')}{T(r,f')} + \frac{T(r,f)}{T(r,f')}\cdot\left(\frac{\sum\limits_{v=1}^{q} m(r,\boldsymbol{a}_v)}{T(r,f)} - o(1)\right) \leqslant 1, r \to +\infty.$$

另一方面，

$$T(r,f') = m(r,f') + N(r,f') \leqslant$$

$$m(r,f) + N(r,f') + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{\|f'(re^{i\theta})\|}{\|f(re^{i\theta})\|}d\theta \leqslant$$

$$m(r,f) + N(r,f) + \overline{N}(r,f) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{\|f'(re^{i\theta})\|}{\|f(re^{i\theta})\|}d\theta \leqslant$$

$$T(r,f) + N(r,f) + S(r,f).$$

所以

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{T(r,f')}{T(r,f)} \leqslant 2 - \delta(\hat{\infty}).$$

因此

$$1 \geqslant \limsup_{r\to+\infty}\left[\frac{N(r,0,f') + V(r,0,f')}{T(r,f')} + \frac{T(r,f)}{T(r,f')}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{q} m(r,\boldsymbol{a}_v)}{T(r,f)} - o(1)\right)\right] \geqslant$$

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,0,f') + V(r,0,f')}{T(r,f')} + \liminf_{r\to+\infty}\frac{T(r,f)}{T(r,f')}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{q} m(r,\boldsymbol{a}_v)}{T(r,f)} - o(1)\right) \geqslant$$

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,0,f') + V(r,0,f')}{T(r,f')} + \liminf_{r\to+\infty}\frac{T(r,f)}{T(r,f')}\liminf_{r\to+\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{q} m(r,\boldsymbol{a}_v)}{T(r,f)} \geqslant$$

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,0,f') + V(r,0,f')}{T(r,f')} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{q}\delta(\boldsymbol{a}_j)}{2 - \delta(\hat{\infty})}.$$

又因为 $\delta(\hat{\infty}) = 1$，所以

$$\sum_{j=1}^{q}\delta(\boldsymbol{a}_j) \leqslant 1 - \limsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,0,f') + V(r,0,f')}{T(r,f')} = \delta(0,f'),$$

上式 $\forall q \geqslant 2$ 成立，所以

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in E}\delta(\boldsymbol{a}) \leqslant 1 - \limsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,0,f') + V(r,0,f')}{T(r,f')} = \delta(0,f').$$

定理 1 证毕.

由定理 A，立即可得如下推论.

**推论 1**　设 $E$ 为无穷维 Hilbert 空间，$f: C \to E$ 为有限级向量值亚纯函数，且不蜕化为向量值有理函数. 若 $\delta(\hat{\infty}) = 1$，且 $f(z)$ 至少有 1 个有限的亏值，则零向量是 $f'(z)$ 的亏向量.

**推论2** 设 $E$ 为无穷维 Hilbert 空间,$f$: $C \to E$ 为有限级具有最大亏量和的向量值亚纯函数,且不蜕化为向量值有理函数. 若 $\delta(\hat{\infty}) = 1$,则 $\delta(0,f') = 1$,即零向量是 $f'(z)$ 的满亏向量.

## 3 参考文献

[1] 张丹萍,雷纪刚. 向量值 Nevanlinna 理论初探 [J]. 工科数学,1997,13(2):16-23.

[2] 张丹萍. 向量值 Nevanlinna 第二基本定理的余项 $S(r)$ 的估计 [J]. 工科数学,1999,15(1):28-35.

[3] 张丹萍,雷纪刚. 向量值 Nevanlinna 第二基本定理 [J]. 北京机械工业学院学报,1997,16(1):32-38.

[4] 张丹萍. 向量值 Nevanlinna 第二基本定理的应用 [J]. 北京机械工业学院,2002,18(2):28-34.

[5] 徐洪焱,易才凤. 圆环内亚纯函数的拟亏量 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2008,32(3):309-312.

[6] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[7] 窦盼英,张先荣. 关于亚纯函数导数的亏量 [J]. 河南师范大学学报:自然科学版,2007,35(3):167-168.

[8] Lahiri I. Milloux theorem and deficiency of vector-valued meromorphic functions [J]. J Indian Math Soc,1990,55(2):235-250.

[9] Hans J W Z. Vector valued Nevanlinna theory [M]. Boston,Mass-London: Pitman Advanced Publishing Program,1982.

[10] Wu Zhaojun,Chen Yuxian. An inequality of meromorphic vector functions and its application [J]. Abstract and Applied Analysis,2011,Article ID 518972,13.

[11] 何静,郑秀敏. 几类高阶线性微分方程亚纯解的迭代级 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(6):584-588.

[12] 陆万春,易才凤. 在矩控制下随机 Dirichlet 级数的$(p,q)(R)$型 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(5):482-486.

[13] 陈裕先,毛志强,廖秋根. 微分方程 $f''+A(z)f=0$ 的解的零点充满圆 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2011,35(5):444-446.

[14] Chuang Chitai. Differential polynomials of meromorphic functions [M]. Beijing: Beijing Normal University Press,1999:177-197.

# Deficiency of Vector Valued Meromorphic Function

WU Jia[1],WU fen[2],CHEN Yu-xian[3*]

(1. College of Xianning Vocational and Technology,Xianning Hubei 437100,China;

2. School of Mathematics,South China Normal University,Guangzhou Guangdong 510631,China;

3. School of Mathematics and Computer Science,Xinyu University,Xinyu Jiangxi 338004,China)

**Abstract:** The Nevanlinna theory of infinite dimensional vector-valued meromorphic functions from the complex plane $C$ to infinite dimensional Hilbert space $E$ is introduced,and the deficiency of infinite dimensional vector-valued meromorphic functions is studied. The relation between the deficiency sum of infinite dimensional vector-valued meromorphic functions and that of the deficiency of zero point of derivative functions is established. The results about finite dimensional vector-valued meromorphic functions have been extended.

**Key words:** meromorphic function; Nevanlinna basic theorem; deficient relation; deficient number

(责任编辑:王金莲)