文章编号:1000-5862(2013)03-0233-03

一类 2 阶微分方程的解和小函数的关系

安 蕾,肖丽鹏*
(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:利用值分布理论研究了一类微分方程的解以及它们的 1 阶、2 阶导数与小函数之间的关系,推广和完善了已有结果.

关键词:微分方程;收敛指数;整函数
中图分类号:O 174.52 **文献标志码**:A

0 引言与结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论的标准记号[1-2],用 $\sigma(f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的级,用 $\lambda(f)$ 表示 $f(z)$ 的零点收敛指数,$\overline{\lambda}(f)$ 表示 $f(z)$ 的不同零点序列的收敛指数,$\overline{\lambda}(f-\varphi)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 取小函数 φ 的点的收敛指数.

微分方程的解与小函数的关系问题被众多学者研究,得到了一些有趣的结论[3-6].例如关于 2 阶线性微分方程

$$f''+A_1e^{az}f'+A_0e^{bz}f=0, \quad (1)$$

陈宗煊在文献[7]中,得到了下面的结果.

定理 A 设 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j)<1$,并假设 a,b 是复常数且 $ab\neq 0$ 和 $a\neq b$,那么方程(1)的每 1 个解 $f(\not\equiv 0)$ 具有无穷级.

之后,陈宗煊和孙光镐在文献[8]首次研究了方程(1)的解以及它们的 1 阶、2 阶导数与小函数之间的关系,得到了下面的 2 个定理.

定理 B 设 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j)<1$, a,b 是复常数且 $ab\neq 0$ 和 $a\neq b$,如果 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是有限级整函数,那么方程(1)的每 1 个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$.

定理 C 设 $A_j(z)(\not\equiv 0)(j=0,1)$ 是整函数且 $\sigma(A_j)<1$,a,b 是复常数且 $ab\neq 0$ 和 $\arg a\neq\arg b$ 或 $a=cb(0<c<1)$,如果 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是有限级整函数,那么方程(1)的每 1 个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足

$$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty.$$

从定理 A、定理 B 和定理 C 可以看出,当 2 阶微分方程(1)的每个解具有无穷级的时候,那么该解以及它们的 1 阶、2 阶导数取小函数的点的收敛指数也是无穷的.本文研究了比方程(1)更为一般的方程的解以及它们的 1 阶、2 阶导数取小函数的点的收敛指数,得到了如下的定理.

定理 1 设 $A(z)(\not\equiv 0)$,$B_0(z)(\not\equiv 0)$,$B_1(z)(\not\equiv 0)$ 是整函数,$\sigma(A)<1$,$\sigma(B_0)<1$,$\sigma(B_1)<1$ 且 a,b,d 是复常数,$abd\neq 0$,$|a|\neq\max\{|b|,|d|\}$ 且 $(a-b)(a-d)\neq 0$,当 $b=d$ 时,$B_0(z)+B_1(z)\not\equiv 0$,如果 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是级小于 1 的整函数,那么方程

$$f''+Ae^{az}f'+(B_0e^{bz}+B_1e^{dz})f=0 \quad (2)$$

的每 1 个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty$.

推论 1 设 $A(z)(\not\equiv 0)$,$B_0(z)(\not\equiv 0)$,$B_1(z)(\not\equiv 0)$ 是整函数,$\sigma(A)<1$,$\sigma(B_0)<1$,$\sigma(B_1)<1$ 且 a,b,d 是复常数,$abd\neq 0$,则

(i) 如果 $b=d$,$B_0(z)+B_1(z)\not\equiv 0$,$\arg a\neq\arg b$ 或 $a=cb(0<c<1)$,如果 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是有限级整函数,那么方程(2)的每 1 个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足

$$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty;$$

(ii) 如果 $b\neq d$,$|a|\neq\max\{|b|,|d|\}$ 且 $(a-b)(a-d)\neq 0$,如果 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是级小于 1 的整函数,那么方程(2)的每 1 个解 $f(\not\equiv 0)$ 满足

$$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\overline{\lambda}(f''-\varphi)=\infty.$$

收稿日期:2012-12-04
基金项目:国家自然科学基金(11126144,11171119),江西省自然科学基金(20132BAB211009)和江西省教育厅青年科学基金(GJJ12207)资助项目.
通信作者:肖丽鹏(1979-),女,江西吉安人,讲师,博士,主要从事复分析研究.

1 引理

为证明定理,需用到以下引理.

引理 1[8] 设 $A_0(z)$, $A_1(z)$, $A_2(z)$ 是整函数, $\sigma(A_0) < 1$, $\sigma(A_1) < 1$, $\sigma(A_2) < 1$ 且 $|a| \neq \max\{|b|, |d|\}$, 那么方程 $f'' + A_1 e^{az} f' + (A_0 e^{bz} + A_2 e^{dz}) f = 0$ 所有非平凡解具有无穷级.

注 1 从引理 1 的证明过程可以看出 $A_i(z) \not\equiv 0$, $i = 0,1,2$ 且 $abd \neq 0$.

引理 2[9] 假设 $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\cdots$, $f_n(z)$ $(n \geqslant 2)$ 为亚纯函数, $g_1(z)$, $g_2(z)$, $\cdots$, $g_n(z)$ 为整函数,满足条件

(ⅰ) $\sum_{j=1}^{n} f_j(z) e^{g_j(z)} \equiv 0$;

(ⅱ) $g_j(z) - g_k(z)$ $(1 \leqslant j < k \leqslant n)$ 不为常数;

(ⅲ) $T(r, f_j) = o[T(r, e^{g_h - g_k})]$ $(1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant h < k \leqslant n)$ $(r \to \infty, r \notin E)$, 其中 E 是对数测度为有限的集合,则有

$$f_j(z) \equiv 0 (j = 1, 2, \cdots, n).$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 (ⅰ) 首先证明 $\overline{\lambda}(f - \varphi) = \infty$. 假设 $f(z)$ $(\not\equiv 0)$ 是方程(2) 的解,那么 $f(z)$ 是整函数,由引理 1 可知 $\sigma(f) = \infty$, 令 $g_0(z) = f(z) - \varphi(z)$, 那么 $\sigma(g_0) = \sigma(f) = \infty$ 和 $\overline{\lambda}(g_0) = \overline{\lambda}(f - \varphi)$. 将 $f(z) = g_0(z) + \varphi(z)$ 代入到方程(2) 中得到

$$g''_0 + Ae^{az} g'_0 + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) g_0 = -(\varphi'' + Ae^{az}\varphi' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})\varphi). \tag{3}$$

注意到(3) 式可能有有限级解,但这里可以仅讨论 $g_0(z) = f(z) - \varphi(z)$ 为无穷级的解,所以仅需对方程(3) 的无穷级解 g_0 证明 $\overline{\lambda}(g_0) = \infty$ 成立.

由于方程(2) 的非平凡解具有无穷级及 φ 是有限级整函数,可知

$$\varphi'' + Ae^{az}\varphi' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})\varphi \not\equiv 0. \tag{4}$$

对方程(3), 由文献[10] 中的引理 4 和(4) 式可知 $\overline{\lambda}(g_0) = \sigma(g_0) = \infty$, 即 $\overline{\lambda}(f - \varphi) = \infty$.

(ⅱ) 现证明 $\overline{\lambda}(f' - \varphi) = \infty$, 令 $g_1(z) = f'(z) - \varphi(z)$, 那么 $\sigma(g_1) = \sigma(f') = \sigma(f) = \infty$ 和 $\overline{\lambda}(g_1) = \overline{\lambda}(f' - \varphi)$. 对方程(2) 的两边进行微分得

$$f''' + Ae^{az} f'' + [(Ae^{az})' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})] f' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})' f = 0. \tag{5}$$

由方程(2) 可以得到

$$f = -\frac{1}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} [f'' + Ae^{az} f']. \tag{6}$$

将(6) 式代入(5) 式得

$$f''' + \left[Ae^{az} - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}}\right] f'' + \left[(Ae^{az})' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} \cdot Ae^{az}\right] f' = 0. \tag{7}$$

将 $f' = g_1 + \varphi$, $f'' = g'_1 + \varphi'$, $f''' = g''_1 + \varphi''$ 代入(7) 式得

$$g''_1 + h_1 g'_1 + h_0 g_1 = h, \tag{8}$$

其中

$$h_1 = Ae^{az} - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}},$$

$$h_0 = (Ae^{az})' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} \cdot Ae^{az},$$

$$-h = \varphi'' + \left[Ae^{az} - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}}\right]\varphi' + \left[(Ae^{az})' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} \cdot Ae^{az}\right]\varphi.$$

由

$$\frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} = \frac{(B'_0 + B_0 b) e^{bz} + (B'_1 + B_1 d) e^{dz}}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}},$$

$$(Ae^{az})' = (A' + Aa) e^{az}$$

得到

$$-h = \varphi'' + \left[Ae^{az} - \frac{(B'_0 + B_0 b) e^{bz} + (B'_1 + B_1 d) e^{dz}}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}}\right]\varphi' + \left[(A' + Aa) e^{az} + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) - \frac{(B'_0 + B_0 b) e^{bz} + (B'_1 + B_1 d) e^{dz}}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} \cdot Ae^{az}\right]\varphi. \tag{9}$$

现证明 $h \not\equiv 0$. 事实上,如果 $h \equiv 0$, 则 $-h/\varphi \equiv 0$, 由(9) 式得

$$\frac{\varphi''}{\varphi} + \left[Ae^{az} - \frac{(B'_0 + B_0 b) e^{bz} + (B'_1 + B_1 d) e^{dz}}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}}\right]\frac{\varphi'}{\varphi} + \left[(A' + Aa) e^{az} + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) - \frac{(B'_0 + B_0 b) e^{bz} + (B'_1 + B_1 d) e^{dz}}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} \cdot Ae^{az}\right] = 0, \tag{10}$$

整理(10) 式得

$$\left[B_0 \cdot \frac{\varphi''}{\varphi} - (B'_0 + B_0 b) \cdot \frac{\varphi'}{\varphi}\right] e^{bz} + \left[B_1 \cdot \frac{\varphi''}{\varphi} - (B'_1 + B_1 d) \cdot \frac{\varphi'}{\varphi}\right] e^{dz} +$$

$$\left[AB_0 \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} - A(B'_0 + B_0 b) + B_0(A' + Aa)\right]e^{(a+b)z} +$$

$$\left[AB_1 \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} - A(B'_1 + B_1 d) + B_1(A' + Aa)\right]e^{(a+d)z} +$$

$$B_0^2 e^{2bz} + B_1^2 e^{2dz} + 2B_0 B_1 e^{(b+d)z} = 0. \tag{11}$$

下面分 2 种情形进行讨论.

情形 1　当 $b = d$ 时，由条件 $|a| \neq \max\{|b|, |d|\}$ 知 $a \neq b$，方程(11)改写为

$$\left[(B_0 + B_1) \cdot \frac{\varphi''}{\varphi} - (B'_0 + B'_1 + (B_0 + B_1)b) \cdot \frac{\varphi'}{\varphi}\right]e^{bz} + (B_0 + B_1)^2 e^{2bz} + \left[A(B_0 + B_1) \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} - A(B'_0 + B'_1 + (B_0 + B_1)b) + (B_0 + B_1)(A' + Aa)\right] \cdot e^{(a+b)z} = 0.$$

由 A, B_0, B_1, φ 的级均小于 1 和引理 2 可知，$(B_0 + B_1)^2 \equiv 0$，但因为 $B_0 + B_1 \neq 0$，所以这是一个矛盾，故 $-h/\varphi \not\equiv 0$.

情形 2　当 $b \neq d$ 时，由条件 $(a-b)(a-d) \neq 0$ 知 $a \neq b$ 且 $a \neq d$，对方程(11)应用引理 2，得 $2B_0 B_1 \equiv 0$，但 $B_0 \neq 0, B_1 \neq 0$，这是一个矛盾，故 $-h/\varphi \not\equiv 0$.

综合情形 1 和情形 2 可知 $h \not\equiv 0$.

考虑方程(8)，因 $h \not\equiv 0$ 和 $\sigma(g_1) = \infty$，由文献[10]中的引理 4，得到

$$\bar{\lambda}(g_1) = \bar{\lambda}(f' - \varphi) = \sigma(g_1) = \sigma(f) = \infty.$$

(ⅲ) 下面证明 $\bar{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty$. 令 $g_2(z) = f''(z) - \varphi(z)$，那么 $\sigma(g_2) = \sigma(f'') = \sigma(f) = \infty$ 和 $\bar{\lambda}(g_2) = \bar{\lambda}(f'' - \varphi)$. 微分(5)式，有

$$f^{(4)} + Ae^{az}f''' + [2(Ae^{az})' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})]f'' + [(Ae^{az})'' + 2(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})']f' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})''f = 0. \tag{12}$$

将(6)式代入(12)式得

$$f^{(4)} + Ae^{az}f''' + \left[2(Ae^{az})' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})''}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}}\right]f'' + \left[(Ae^{az})'' + 2(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})' - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})''}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} \cdot Ae^{az}\right]f' = 0. \tag{13}$$

由(7)式得

$$f' = -\frac{1}{U_2}\left[f''' + \left(Ae^{az} - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}}\right)f''\right], \tag{14}$$

将(14)式代入(13)式得

$$f^{(4)} + H_3 f''' + H_2 f'' = 0, \tag{15}$$

其中

$$H_3 = Ae^{az} - U_1/U_2,$$

$$H_2 = 2(Ae^{az})' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})''}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} - \frac{U_1}{U_2} \cdot h_1,$$

$$U_2 = (Ae^{az})' + (B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}) - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})'}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} \cdot Ae^{az},$$

$$U_1 = (Ae^{az})'' + 2(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})' - \frac{(B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz})''}{B_0 e^{bz} + B_1 e^{dz}} \cdot Ae^{az},$$

将 $f'' = g_2 + \varphi, f''' = g'_2 + \varphi', f^{(4)} = g''_2 + \varphi''$ 代入(15)式得

$$g''_2 + H_3 g'_2 + H_2 g_2 = -(\varphi'' + H_3\varphi' + H_2\varphi).$$

使用类似于上面的方法，能证明 $-(\varphi'' + H_3\varphi' + H_2\varphi) \not\equiv 0$，由文献[10]中的引理 4，得到 $\bar{\lambda}(g_2) = \infty$，即 $\bar{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty$，定理 1 得证.

3　参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[3] 陈宗煊，孙光镐. 一类二阶微分方程的解和小函数的关系 [J]. 数学年刊 A 辑, 2006, 27(4): 431-442.

[4] 陈裕先，陈宗煊. 微分方程的解与小函数的关系 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2002, 26(1), 15-20.

[5] 程涛，陈宗煊. 非齐次线性微分方程解取小函数的点的收敛指数 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2002, 26(1), 21-27.

[6] 刘慧芳. 齐次线性微分方程解取小函数的点的收敛指数 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2003, 27(2), 118-121.

[7] 陈宗煊. 微分方程 $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$ 的解的增长性 [J]. 中国科学 A 辑, 2001, 31(9): 775-785.

[8] Cheng Tao, Kang Yueming. The growth of a class of linear differential equation [J]. Journal of Fudan University, 2006, 45(10): 610-617.

[9] Yang Congjun, Yi Hongxun. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[10] Chen Zongxuan. Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations [J]. Analysis, 1994, 14(4): 425-438.

(下转第 239 页)

Research Second Order Systems with Sublinear Nonlinearity by the Least Action Principle

WANG Shao-min,YANG Cun-ji
(1. Department of Mathematics and Computer,Dali University,Dali Yunnan 671000,China)

Abstract: The existence of periodic solutions of the following second order systems

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) - \boldsymbol{A}(t)u(t) = \nabla F(t,u(t)), \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0, \end{cases} \text{a. e. } t \in [0,T]$$

is studied by the least action principle. When the nonlinearity is sublinear and $\boldsymbol{A}(t)$ is a continuous symmetric matrix of N order,two new existence theorems of this system are obtained.

Key words: periodic solutions; the least action principle; second order systems

(责任编辑: 曾剑锋)

(上接第 235 页)

The Relation between Solutions of a Class of Second Order Differential Equation with Functions of Small Growth

AN Lei,XIAO Li-peng*
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: In this paper,solutions and the relation between their 1th and 2th derivatives with functions of a small growth of a class of second order linear differential equations are investigated by using the theory of value distribution. Hereby,the existing results are promoted and consummated.

Key words: differential equation; exponent of convergence; entire function

(责任编辑: 王金莲)