文章编号:1000-5862(2013)03-0236-04

用最小作用原理研究具有次线性的非线性项 2 阶系统

王少敏,杨存基
(大理学院数学与计算机学院,云南 大理 671000)

摘要:利用最小作用原理研究 2 阶系统

$$\begin{cases}\ddot{u}(t)-\boldsymbol{A}(t)u(t)=\nabla F(t,u(t)),\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0,\end{cases}\quad \text{a. e. } t\in[0,T]$$

的周期解的存在性,在非线性项是次线性及 $A(t)$ 是 1 个连续 N 阶对称矩阵的条件下得到了该系统的 2 个新的存在性定理.

关键词:周期解;最小作用原理;2 阶系统
中图分类号:O 177.25　　**文献标志码**:A

0 引言和主要结果

考虑 2 阶系统

$$\begin{cases}\ddot{u}(t)-\boldsymbol{A}(t)u(t)=\nabla F(t,u(t)),\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0,\end{cases}\quad \text{a. e. } t\in[0,T],\tag{1}$$

其中 $T>0$,$\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))$ 是 1 个连续的 N 阶对称矩阵,F:$[0,T]\times\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ 满足如下假设:

(A) $F(t,x)$ 对于每个 $x\in\mathbf{R}^N$ 关于 t 可测,对于 a. e. $t\in[0,T]$ 关于 x 是连续可微的,$\exists a\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$,$b\in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$ 使得

$$|F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t),\ |\nabla F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t),\ x\in\mathbf{R}^N,\text{a. e. } t\in[0,T].$$

令 $H_T^1=\{u:[0,T]\to\mathbf{R}^N\mid u$ 是绝对连续,$u(0)=u(T)$,$\dot{u}\in L^2(0,T;\mathbf{R}^N)\}$ 是 1 个 Hilbert 空间,$\forall u\in H_T^1$,具有范数

$$\|u\|=\left(\int_0^T|u|^2\mathrm{d}t+\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

相应泛函

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T(\boldsymbol{A}(t)u(t),u(t))\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t,$$

则 φ 弱下半连续且连续可微,同时

$$(\varphi'(u),v)=\int_0^T[(\dot{u}(t),\dot{v}(t))+(\boldsymbol{A}(t)u(t),v(t))-(\nabla F(t,u),v(t))]\mathrm{d}t.$$

众所周知,泛函 φ 的临界点即为问题(1)的解.

目前,当 $A(t)\equiv\mathbf{0}(t\in[0,T])$ 时,利用临界点理论研究问题(1)周期解的存在性已有许多结果[1-12],其中文献[3]使用最小作用原理研究了当 $A(t)\equiv\mathbf{0}$ 时问题(1)解的存在性;当 $A(t)$ 是一般的 N 阶连续对称矩阵时,在次线性的非线性项及其它一些适当条件下,文献[2]和文献[13]使用临界点理论中的极大极小方法证明了系统(1)至少有 1 个周期解. 本文将利用最小作用原理研究问题(1)解的存在性,给出了一些新的存在性条件并获得了 2 个新的存在性定理,推广了文献[3]的如下定理.

定理 A 设 $F(t,x)$ 满足假设(A)和以下条件:

(i) $\exists f,g\in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$,$\alpha\in[0,1)$ 使得
$|\nabla F(t,x)|\leqslant f(t)|x|^{\alpha}+g(t)$,$\forall x\in\mathbf{R}^N$,a. e. $t\in[0,T]$;

(ii) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t/|x|^{2\alpha}=+\infty$,

收稿日期:2013-01-20
基金项目:国家自然科学基金(11261002),云南省科技厅应用基础课题(2011FZ167)和云南省教育厅科学研究基金(09Y0367)资助项目.
作者简介:王少敏(1975-),女,云南大理人,副教授,硕士,主要从事非线性分析的研究.

则问题

$$\begin{cases}\ddot{u}(t) = \nabla F(t,u(t)), \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0,\end{cases}$$

a. e. $t \in [0,T]$

在 H_T^1 上至少存在 1 个极小化 φ 解.

受定理 A 启发，本文将研究当 $A(t) \neq 0$ 时的系统(1) 的周期解的存在性，获得如下结果.

定理 1　设 F 满足假设(A) 和以下条件:

(i) $\exists f,g \in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$，$\alpha \in [0,1)$，使得
$|\nabla F(t,x)| \leqslant f(t)|x|^\alpha + g(t)$，$\forall x \in \mathbf{R}^N$，a. e. $t \in [0,T]$；　(2)

(ii) $\exists h,w \in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$，$\beta \in [0,2)$ 且 $2\alpha > \beta$，使得
$(A(t)x,x) \geqslant h(t)|x|^\beta + w(t)$，$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^N$；

(iii) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \int_0^T F(t,x)\,dt / |x|^{2\alpha} = +\infty$，

则问题(1) 至少存在 1 个周期解.

定理 2　设 F 满足假设(A) 和以下条件:

(i) $\exists f,g \in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$，$\alpha \in [0,1)$，使得
$|\nabla F(t,x)| \leqslant f(t)|x|^\alpha + g(t)$，$\forall x \in \mathbf{R}^N$，a. e. $t \in [0,T]$；

(ii) 设 $d = \max\limits_{i,j=1,\cdots,N}\{|a_{ij}|\}$，且 $d < 3/(2NT^2)$；

(iii) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \int_0^T F(t,x)\,dt / |x|^2 = +\infty$，

则问题(1) 至少存在 1 个周期解.

1　定理的证明

$$\forall u \in H_T^1，令 \bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt，\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}，$$

则

$$\|\tilde{u}\|_\infty^2 \leqslant \frac{T}{12}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt, \tag{3}$$

$$\int_0^T |\tilde{u}(t)|^2 dt \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt.$$

定理 1 的证明　由(2) 式和(3) 式得

$$\left|\int_0^T [F(t,u(t)) - F(t,\bar{u})]\,dt\right| =$$

$$\left|\int_0^T\int_0^1 (\nabla F(t,\bar{u} + s\tilde{u}),\tilde{u})\,ds dt\right| \leqslant$$

$$\int_0^T\int_0^1 f(t)|\bar{u} + s\tilde{u}|^\alpha |\tilde{u}|\,ds dt +$$

$$\int_0^T\int_0^1 g(t)|\tilde{u}(t)|\,ds dt \leqslant$$

$$2|\bar{u}|^\alpha \|\tilde{u}\|_\infty \int_0^T f(t)\,dt + 2\|\tilde{u}\|_\infty^{\alpha+1}\int_0^T f(t)\,dt +$$

$$\|\tilde{u}\|_\infty \int_0^T g(t)\,dt \leqslant$$

$$\frac{3}{T}\|\tilde{u}\|_\infty^2 + \frac{T\left(\int_0^T f(t)\,dt\right)^2}{3}|\bar{u}|^{2\alpha} +$$

$$2\|\tilde{u}\|_\infty^{\alpha+1}\int_0^T f(t)\,dt + \|\tilde{u}\|_\infty \int_0^T g(t)\,dt \leqslant$$

$$\frac{1}{4}\|\dot{u}\|_2^2 + c_1|\bar{u}|^{2\alpha} + c_2\|\dot{u}\|_2^{\alpha+1} + c_3\|\dot{u}\|_2.$$

另一方面，有

$$|u(t)|^\beta = |\bar{u} + \tilde{u}(t)|^\beta \leqslant (|\bar{u}| + \|\tilde{u}\|_\infty)^\beta \leqslant$$
$$2^\beta(|\bar{u}|^\beta + \|\tilde{u}\|_\infty^\beta) \leqslant 4(|\bar{u}|^\beta + \|\tilde{u}\|_\infty^\beta).$$

因此，有

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt + \int_0^T [F(t,u(t)) - F(t,\bar{u})]\,dt + \int_0^T F(t,\bar{u})\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T (A(t)u(t),u(t))\,dt \geqslant$$

$$\frac{1}{4}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt - c_2\|\dot{u}\|_2^{\alpha+1} - c_3\|\dot{u}\|_2 + \frac{1}{2}\int_0^T h(t)\cdot|u(t)|^\beta dt + \frac{1}{2}\int_0^T w(t)\,dt + \int_0^T F(t,\bar{u})\,dt - c_1|\bar{u}|^{2\alpha} \geqslant$$

$$\frac{1}{4}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt - c_2\|\dot{u}\|_2^{\alpha+1} - c_3\|\dot{u}\|_2 - 2\int_0^T h(t)(|\bar{u}|^\beta + \|\tilde{u}\|_\infty^\beta)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T w(t)\,dt + \int_0^T F(t,\bar{u})\,dt - c_1|\bar{u}|^{2\alpha} = \frac{1}{4}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt -$$

$$c_2\|\dot{u}\|_2^{\alpha+1} - c_3\|\dot{u}\|_2 - 2\int_0^T h(t)\,dt|\bar{u}|^\beta - 2\int_0^T h(t)\,dt\cdot\|\tilde{u}\|_\infty^\beta + \frac{1}{2}\int_0^T w(t)\,dt + \int_0^T F(t,\bar{u})\,dt - c_1|\bar{u}|^{2\alpha} \geqslant$$

$$\frac{1}{4}\|\dot{u}\|_2^2 - c_2\|\dot{u}\|_2^{\alpha+1} - c_3\|\dot{u}\|_2 - c_4\|\dot{u}\|_2^\beta + \frac{1}{2}\int_0^T w(t)\,dt + |\bar{u}|^{2\alpha}\left(\frac{1}{|\bar{u}|^{2\alpha}}\int_0^T F(t,\bar{u})\,dt - c_1\right) - 2\int_0^T h(t)\,dt|\bar{u}|^\beta.$$

因为 $\|u\| \to \infty \Leftrightarrow (|\bar{u}|^2 + \|\dot{u}\|_2^2)^{1/2} \to \infty$，所以 $\varphi(u) \to +\infty$ ($\|u\| \to \infty$).

因此，φ 在 H_T^1 上达到极小. 由文献[2] 中的定理 1. 1 和推论 1. 1 知，定理 1 得证.

定理 2 的证明　由(2) 式和(3) 式得

$$\left|\int_0^T [F(t,u(t)) - F(t,\bar{u})]\,dt\right| =$$

$$\left|\int_0^T\int_0^1 (\nabla F(t,\bar{u} + s\tilde{u}),\tilde{u})\,ds dt\right| \leqslant$$

$\int_0^T\int_0^1 f(t)\,|\bar{u}+s\tilde{u}|^{\alpha}\,|\tilde{u}|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t+$

$\int_0^T\int_0^1 g(t)\,|\tilde{u}(t)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant$

$2|\bar{u}|^{\alpha}\|\tilde{u}\|_{\infty}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t+2\|\tilde{u}\|_{\infty}^{\alpha+1}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t+$

$\|\tilde{u}\|_{\infty}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{3-2dNT^2}{T}\|\tilde{u}\|_{\infty}^2+$

$\frac{T}{3-2dNT^2}|\bar{u}|^{2\alpha}\left(\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2+$

$2\|\tilde{u}\|_{\infty}^{\alpha+1}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t+\|\tilde{u}\|_{\infty}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant$

$\frac{3-2dNT^2}{12}\|\dot{u}\|_2^2+c_1|\bar{u}|^{2\alpha}+$

$c_2\|\dot{u}\|_2^{\alpha+1}+c_3\|\dot{u}\|_2.$

另一方面,有

$\int_0^T(A(t)u(t),u(t))\,\mathrm{d}t\leqslant$

$\int_0^T|(A(t)u(t),u(t))|\mathrm{d}t\leqslant dN\int_0^T|u(t)|^2\mathrm{d}t=$

$dN\int_0^T|\bar{u}+\tilde{u}|^2\mathrm{d}t\leqslant dN\int_0^T 4(|\bar{u}|^2+\|\tilde{u}\|_{\infty}^2)\,\mathrm{d}t=$

$4dNT|\bar{u}|^2+4TdN\|\tilde{u}\|_{\infty}^2\leqslant$

$4dNT|\bar{u}|^2+\frac{T^2dN}{3}\|\dot{u}\|_2^2.$

因此

$\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T[F(t,u(t))-$

$F(t,\bar{u})]\,\mathrm{d}t+\int_0^T F(t,\bar{u})\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T(A(t)u(t),u(t))\,\mathrm{d}t\geqslant$

$\frac{1}{2}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t-\frac{3-2dNT^2}{12}\|\dot{u}\|_2^2-c_2\|\dot{u}\|_2^{\alpha+1}-$

$c_3\|\dot{u}\|_2+\int_0^T F(t,\bar{u})\,\mathrm{d}t-c_1|\bar{u}|^{2\alpha}-$

$\frac{1}{2}\int_0^T|(A(t)u(t),u(t))|\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t-$

$\frac{3-2dNT^2}{12}\|\dot{u}\|_2^2-c_2\|\dot{u}\|_2^{\alpha+1}-c_3\|\dot{u}\|_2+$

$\int_0^T F(t,\bar{u})\,\mathrm{d}t-c_1|\bar{u}|^{2\alpha}-2dNT|\bar{u}|^2-\frac{T^2dN}{6}\|\dot{u}\|_2^2=$

$\frac{1}{4}\|\dot{u}\|_2^2-c_2\|\dot{u}\|_2^{\alpha+1}-c_3\|\dot{u}\|_2+$

$|\bar{u}|^2\left(\frac{1}{|\bar{u}|^2}\int_0^T F(t,\bar{u})\,\mathrm{d}t-2TdN\right)-c_1|\bar{u}|^{2\alpha}.$

因为 $\|u\|\to\infty\Leftrightarrow(|\bar{u}|^2+\|\dot{u}\|_2^2)^{1/2}\to\infty$,所以 $\varphi(u)\to+\infty\ (\|u\|\to\infty)$.

因此,φ 在 H_T^1 上达到极小. 由文献[2]中的定理 1.1 和推论 1.1 知,定理 2 得证.

注 1　定理 1 推广了文献[3]中的定理 A,即当 $A(t)\equiv 0$ 时,定理 1 就是文献[3]中的定理 A;定理 2 也推广了文献[3]中的定理 A,即当 $A(t)\equiv 0$ 时,定理 2 就是文献[3]中的定理 A,且将文献[3]中定理 A 的条件 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\int_0^T F(t,x)\,\mathrm{d}t/|x|^{2\alpha}=+\infty\ (\alpha\in[0,1))$ 推广到 $\alpha=1$ 的情形,所以本文所得的结果具有一定的创新性.

2　参考文献

[1] Berger M S,Schechter M. On the solvability of semilinear gradient operator equations [J]. Adv Math,1977,25(2):97-132.

[2] Mawhin J,Willem M. Critical point theory and Hamiltonian systems [M]. Berlin,New York:Springer-Verlag,1989.

[3] Tang Chunlei. Periodic solutions for nonautonomous second order systems with sublinear nonlinearity [J]. Proc Amer Math Soc,1998,126(11):3263-3270.

[4] Wu Xingping,Tang Chunlei. Periodic solutions of a class of non-autonomous second-order systems [J]. J Math Anal Appl,1999,236(2):227-235.

[5] Ma Jian,Tang Chunlei. Periodic solutions for some nonautonomous second-order systems [J]. J Math Anal Appl,2002,275(2):482-494.

[6] Tang Chunlei. Periodic solutions of non-autonomous second-order systems with γ-quasisubadditive potential [J]. J Math Anal Appl,1995,189(3):671-675.

[7] Tang Chunlei. Periodic solutions of non-autonomous second order systems [J]. J Math Anal Appl,1996,202(2):465-469.

[8] Tang Chunlei,Wu Xingping. Periodic solutions for second order systems with not uniformly coercive potential [J]. J Math Anal Appl,2001,259(2):386-397.

[9] Mawhin J. Semi-coercive monotone variational problems [J]. Acad Roy Belg Bull Cl Sci,1987,73(5):118-130.

[10] 李芳,张清业. 一类超 2 次 2 阶哈密顿系统的无穷多周期解 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(6):589-593.

[11] 张申贵. 一类非自治二阶系统的多重周期解 [J]. 山东大学学报:自然科学版,2011,46(11):64-69.

[12] 张申贵. 一类非自治二阶 Hamilton 系统周期解的存在性 [J]. 河北师范大学学报:自然科学版,2012,36(2):115-120.

[13] Tang Chunlei,Wu Xingping. Periodic solutions for a class of non-autonomous subquadratic second order Hamiltonian systems [J]. J Math Anal Appl,2002,275(2):870-882.

Research Second Order Systems with Sublinear Nonlinearity by the Least Action Principle

WANG Shao-min,YANG Cun-ji
(1. Department of Mathematics and Computer,Dali University,Dali Yunnan 671000,China)

Abstract: The existence of periodic solutions of the following second order systems

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) - A(t)u(t) = \nabla F(t,u(t)), \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0, \end{cases} \text{a. e. } t \in [0,T]$$

is studied by the least action principle. When the nonlinearity is sublinear and $\boldsymbol{A}(t)$ is a continuous symmetric matrix of N order,two new existence theorems of this system are obtained.

Key words: periodic solutions; the least action principle; second order systems

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第235页)

The Relation between Solutions of a Class of Second Order Differential Equation with Functions of Small Growth

AN Lei,XIAO Li-peng*
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: In this paper,solutions and the relation between their 1th and 2th derivatives with functions of a small growth of a class of second order linear differential equations are investigated by using the theory of value distribution. Hereby,the existing results are promoted and consummated.

Key words: differential equation; exponent of convergence; entire function

(责任编辑:王金莲)