第 37 卷 第 3 期
2013 年 5 月

江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)

Vol. 37 No. 3
May 2013

文章编号:1000-5862(2013)03-0240-04

局部超线性常微分 p-Laplacian 系统的多重周期解

张申贵

(西北民族大学数学与计算机科学学院,甘肃 兰州 730030)

摘要:利用临界点理论研究常微分 p-Laplacian 方程周期解的存在性,在比 Ambrosetti-Rabinowitz 条件更弱的超线性条件下,得到了多重周期解存在的充分条件.

关键词:常微分 p-Laplacian 系统;局部超线性;临界点

中图分类号:O 175.25　　**文献标志码**:A

0 引言

考虑非自治常 p-Laplacian 系统

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t)) = \nabla F(t,u(t)), \\ \text{a. e. } t \in [0,T], \\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $p>1, T>0, F: [0,T]\times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ 满足

(A) $\forall x \in \mathbf{R}^N, F(t,x)$ 可测;对 a. e. $t\in[0,T]$, $F(t,x)$ 连续可微;且 $\exists a \in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+), b\in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$ 使得

$$|F(t,x)| \leqslant a(|x|)b(t);$$
$$|\nabla F(t,x)| \leqslant a(|x|)b(t).$$

近年来,许多文献对问题(1)的周期解进行了研究[1-6].当 $p=2$ 时,在 P. Rabinowitz 给出的超线性条件(AR):$\exists \mu>2, M>0$,使得

$$0<\mu F(t,x) \leqslant (\nabla F(t,x),x),$$

对所有 $|x|\geqslant M$ 和 $t\in[0,T]$ 成立.

(AR)条件的作用是保证问题(1)对应的能量泛函的所有(PS)序列是有界的,这对变分方法是十分重要的,条件(AR)可以推出非线性项 $\nabla F(t,u)$ 是超线性的,但是很多超线性函数并不满足条件(AR),如 $F(t,u)=|\sin t||u|^{5/2}+|u|^2\ln[1+|u|^2)/4]$.文献[7-8]将条件(AR)推广为更广泛的超线性条件 $\lim\limits_{|u|\to\infty} F(t,u)/|u|^2=+\infty$,对 $t\in[0,T]$ 一致成立.当 p 不恒等于 2 时,本文假设非线性项满足局部超线性条件:$\lim\limits_{|u|\to\infty} F(t,u)/|u|^p=+\infty$,对 $t\in E$ 一致成立,其中 E 为 $[0,T]$ 的 1 个正测度子集.

本文将利用临界点理论[9]研究问题(1)多重周期解的存在性.方法为将这类系统的周期解转化为定义在 1 个适当空间上泛函的临界点,然后利用临界点理论中的对称山路定理建立了此类系统多重周期解的存在性定理.

1 准备知识

记 $W_T^{1,p}=\{u: [0,T]\to\mathbf{R}^N$ 在 $[0,T]$ 上绝对连续, $u(0)=u(T), \dot{u}\in L^p(0,T;\mathbf{R}^N)\}$,其范数为

$$\|u\| = \left(\int_0^T |\dot{u}|^p \mathrm{d}t + \int_0^T |u|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

$\forall u\in W_T^{1,p}$,设

$$\bar{u}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t, \tilde{u}(t)=u(t)-\bar{u},$$

$$\tilde{W}_T^{1,p}=\left\{u\in W_T^{1,p} \,\middle|\, \int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t=0\right\},$$

则存在常数 $C_p>0$,使得对所有 $u\in\tilde{W}_T^{1,p}$,有

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_0^T |u(t)|\mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant C_p \|\dot{u}\|_{L^p}. \tag{2}$$

在 Sobolev 空间 $W_T^{1,p}$ 上定义泛函 φ 如下:

$$\varphi(u)=\frac{1}{p}\int_0^T |\dot{u}(t)|^p \mathrm{d}t - \int_0^T F(t,u(t))\,\mathrm{d}t,$$

收稿日期:2013-02-25

基金项目:国家自然科学基金(31260098),中央高校基本科研业务费专项(31920130004)和西北民族大学中青年科研(12XB38)资助项目.

作者简介:张申贵(1980-),男,甘肃兰州人,副教授,主要从事非线性泛函分析与微分方程的研究.

从而 φ 连续可微,且

$$\langle \varphi'(u),v\rangle = \int_0^T (|\dot{u}(t)|^{p-2}\dot{u}(t),\dot{v}(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^T (\nabla F(t,u(t)),v(t))\,\mathrm{d}t,\ \forall u,v \in W_T^{1,p},$$

则 $u \in W_T^{1,p}$ 是问题(1)的周期解当且仅当 u 是泛函 φ 的临界点.

命题 1(对称山路定理)　设 E 为实 Banach 空间,$E = V \oplus X$,其中 $\dim V < +\infty$. 令 $\varphi \in C^1(X,\mathbf{R})$,$\varphi(0) = 0$,$\varphi(-u) = \varphi(u)$,且

(i) 存在常数 $\rho,\alpha > 0$,使得 $\varphi|_{\partial B_\rho \cap X} \geqslant \alpha$;

(ii) 存在 E 的子空间 W 及常数 $M > 0$,$\dim V < \dim W < +\infty$,有 $\max\limits_{u\in W}\varphi(u) < M$;

(iii) 泛函 φ 满足

(C) 对于任意序列 $\{u_n\}$,如果 $\varphi(u_n)$ 有界,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\| = 0$,则 $\{u_n\}$ 有一个收敛的子列[10],

则泛函 φ 至少有 $\dim W - \dim V$ 对非平凡临界点.

2　主要结果

记 $\tilde{F}(t,u) = (\nabla F(t,u),u)/p - F(t,u)$,假设

(H1) E 为 $[0,T]$ 的 1 个正测度子集,使得 $\lim\limits_{|u|\to\infty} F(t,u)/|u|^p = +\infty$ 对 $t \in E$ 一致成立,且 $\exists h \in L^1(0,T)$,有 $F(t,u) \geqslant -h(t)$,对所有 $u \in \mathbf{R}^N$ 和 $t \in [0,T]$ 成立;

(H2) 存在常数 $L > 0$,$C_1 > 0$,当 $|u| \geqslant L$ 时,有 $\tilde{F}(t,u) \geqslant C_1|u|^p$;

(H3) 存在常数 $L > 0$,$C_2 > 0$,当 $|u| \geqslant L$ 时,

$$(|\nabla F(t,u)|/|u|^{p-1})^\sigma \leqslant C_2\tilde{F}(t,u);$$

其中 $1/\sigma + 1/\sigma' = 1$,$1 < \sigma' < +\infty$;

(H4) F 满足 $\lim\limits_{|u|\to 0} F(t,u)/|u|^p = 0$,对 $t \in [0,T]$ 一致成立;

(H5) $F(t,u)$ 关于 u 是偶函数,即 $F(t,-u) = F(t,u)$ 且 $F(t,0) = 0$.

定理 1　假设(H1) ~ (H5)成立,则 $\forall n \in \mathbf{N}$,问题(1)在 Sobolev 空间 $W_T^{1,p}$ 中至少有 $2n$ 个非平凡周期解.

证　(i) 先证泛函 φ 满足条件(C),即 $\forall \{u_n\} \subset W_T^{1,p}$,由 $\varphi(u_n)$ 有界和 $(1+\|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\| \to 0(n\to\infty)$ 可得 $\{u_n\}$ 有收敛子列.

设 $\{u_n\} \subset W_T^{1,p}$ 使得 $\varphi(u_n)$ 有界和 $(1+\|u_n\|)\cdot\|\varphi'(u_n)\| \to 0(n\to\infty)$,则存在常数 $C_3 > 0$,使得

$$|\varphi(u_n)| \leqslant C_3,\ (1+\|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\| \leqslant C_3 \tag{3}$$

对一切自然数 n 成立.

首先证明 $\{u_n\}$ 在 $W_T^{1,p}(\Omega)$ 中有界. 由假设(H2)和条件(A)知,存在常数 $C_4 > 0$,使得

$$\tilde{F}(t,u) = \frac{1}{p}(\nabla F(t,u),u) - F(t,u) \geqslant C_1|u|^p - C_4 \tag{4}$$

对所有 $u \in \mathbf{R}^N$ 和 $t \in [0,T]$ 成立. 由(3) ~ (4)式得

$$\frac{p+1}{p}C_3 \geqslant \varphi(u_n) - \frac{1}{p}\langle\varphi(u_n),u_n\rangle = \frac{1}{p}\int_0^T(\nabla F(t,u_n),u_n)\,\mathrm{d}t - \int_0^T F(t,u_n)\,\mathrm{d}t \geqslant C_1\int_0^T|u_n|^p\mathrm{d}t - C_4T,$$

从而

$$\int_0^T |u_n|^p\mathrm{d}t \leqslant C_5. \tag{5}$$

若 $\{u_n\}$ 在 $W_T^{1,p}(\Omega)$ 中无界,反设当 $n\to\infty$ 时,$\|u_n\| \to \infty$. 令 $v_n = u_n/\|u_n\|$,则 $\|v_n\| = 1$. 由(5)式得

$$\int_0^T|v_n|^p\mathrm{d}t = \frac{1}{\|u_n\|^p}\int_0^T|u_n|^p\mathrm{d}t \leqslant C_5/\|u_n\|^p \to 0(n\to\infty), \tag{6}$$

由(6)式和内插不等式得

$$\int_0^T|v_n|^s\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^T|v_n|^r\mathrm{d}t\right)^{(1-\theta)s}\left(\int_0^T|v_n|^p\mathrm{d}t\right)^{\theta s} \to 0(n\to\infty), \tag{7}$$

其中 $1/s = \theta/p + (1-\theta)/r$,$p \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty$. 由(5)式得

$$\langle\varphi'(u_n),u_n\rangle = \int_0^T|\dot{u}_n|^p\mathrm{d}t - \int_0^T(\nabla F(t,u_n),u_n)\,\mathrm{d}t = \int_0^T|\dot{u}_n|^p\mathrm{d}t + \int_0^T|u_n|^p\mathrm{d}t - \int_0^T(\nabla F(t,u_n),u_n)\,\mathrm{d}t - \int_0^T|u_n|^p\mathrm{d}t \geqslant \|u_n\|^p\left(1 - \int_0^T\frac{(\nabla F(t,u_n),u_n)}{\|u_n\|^p}\mathrm{d}t\right) - C_5.$$

当 n 充分大时,由(3)式知,

$$1 - \int_0^T\frac{(\nabla F(t,u_n),u_n)}{\|u_n\|^p}\mathrm{d}t = o(1), \tag{8}$$

从而由假设(H3)和(3)式得

$$(\nabla F(t,u_n)/|u_n|^{p-1})^\sigma \leqslant C_2\tilde{F}(t,u_n) = C_2[\varphi(u_n) - \langle\varphi'(u_n),u_n\rangle/p] \leqslant C_6. \tag{9}$$

又设 $1/\sigma + 1/\sigma' = 1$,$p < \sigma'p < +\infty$,由(7)式,(9)式和内插不等式得

$$\left|\int_0^T \frac{(\nabla F(t,u_n),u_n)}{\|u_n\|^p}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^T \frac{|\nabla F(t,u_n)|}{|u_n|^{p-1}}|v_n|^p\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\left[\int_0^T\left(\frac{|\nabla F(t,u_n)|}{|u_n|^{p-1}}\right)^\sigma\mathrm{d}t\right]^{1/\sigma}\left(\int_0^T|v_n|^{p\sigma'}\mathrm{d}t\right)^{1/\sigma'} \leqslant$$
$$C_6{}^{1/\sigma}|T|^{1/\sigma}\left(\int_0^T|v_n|^{p\sigma'}\mathrm{d}t\right)^{1/\sigma'} \to 0(n\to\infty),$$

从而 $1 = o(1)$,这与(8)式矛盾. 故 $\{u_n\}$ 在 $W_T^{1,p}$ 中有界. 注意到 $W_T^{1,p}$ 紧嵌入 $C([0,T];\mathbf{R}^N)$ 和 $W_T^{1,p}$ 的一致凸性,由文献[3]知,$\{u_n\}$ 有收敛子列,故泛函 φ 满足条件(C).

(ii) 验证命题 1 中(i)和(ii)成立.

由条件(H4)知,$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,使得
$$|F(t,x)| \leqslant \varepsilon |x|^p \tag{10}$$
对所有 $|x| \leqslant \delta$ 和 $t \in [0,T]$ 成立. 故当 $|x| \leqslant \delta$ 时,由(2)式和(10)式知,对 $u \in X = \tilde{W}_T^{1,p}$ 有

$$\varphi(u) = \frac{1}{p}\int_0^T|\dot{u}(t)|^p\mathrm{d}t - \int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t \geqslant$$
$$\frac{1}{p}\int_0^T|\dot{u}(t)|^p\mathrm{d}t - \varepsilon\int_0^T|u|^p\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{2p}\int_0^T|\dot{u}(t)|^p\mathrm{d}t + \frac{1}{2p}\int_0^T|\dot{u}(t)|^p\mathrm{d}t - \varepsilon\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t \geqslant$$
$$\frac{1}{2pC_p}\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t + \frac{1}{2p}\int_0^T|\dot{u}(t)|^p\mathrm{d}t - \varepsilon\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t =$$
$$\left(\frac{1}{2pC_p}-\varepsilon\right)\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t + \frac{1}{2p}\int_0^T|\dot{u}(t)|^p\mathrm{d}t \geqslant$$
$$\min\left\{\left(\frac{1}{2pC_p}-\varepsilon\right),\frac{1}{2p}\right\}\left(\int_0^T|\dot{u}(t)|^p\mathrm{d}t + \int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t\right) =$$
$$\min\left\{\left(\frac{1}{2pC_p}-\varepsilon\right),\frac{1}{2p}\right\}\|u\|^p,$$

令 ε 充分小,取 $1/(2pC_p) - \varepsilon > 0$,当 $\|u\| \to \infty$ 时,有 $\varphi(u) \to +\infty$. 故存在常数 $\rho,\alpha > 0$,使得 $\varphi_{|\partial B_\rho \cap X} \geqslant \alpha$.

另一方面,记 E 为 $[0,T]$ 的 1 个正测度子集 $B(\theta,\rho)$ 表示以 θ 为中心,以 ρ 半径的球. 取 $x_0 \in E$ 和 $r_0 > 0$ 使得

$$\overline{B(x_0,r_0)} \subset [0,T], 0 < \left|\overline{B(x_0,r_0)} \cap E\right| < |E|/2,$$

首先取 $v_1 \in C_0^\infty([0,T],\mathbf{R}^N)$ 满足 $\mathrm{supp}(v_1) = \overline{B(x_0,r_0)}$,令

$$E_1 = E \setminus [\overline{B(x_0,r_0)} \cap E] \subset \hat{E} = [0,T] \setminus \overline{B(x_0,r_0)},$$

使得

$$|E_1| > |E|/2 > 0,$$

选取 $x_1 \in E_1$ 和 $r_1 > 0$ 使得

$$\overline{B(x_1,r_1)} \subset \hat{E}, 0 < \left|\overline{B(x_1,r_1)} \cap E_1\right| < \frac{|E_1|}{2},$$

取 $v_2 \in C_0^\infty([0,T],\mathbf{R}^N)$ 满足 $\mathrm{supp}(v_2) = \overline{B(x_1,r_1)}$. 经过有限次步骤,$\forall m \in \mathbf{N}$,可以选取 $\{v_j\}$,使得

$v_j \in C_0^\infty([0,T],\mathbf{R}^N)$, $\mathrm{supp}v_i \cap \mathrm{supp}v_j = \varnothing (i \neq j)$,

$|\mathrm{supp}(v_j)| \cap E > 0, i,j \in 1,2,\cdots,m$,

则 $W = \mathrm{span}\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 为 $W_T^{1,p}$ 的 m 维子空间,且

$$\int_E |v|^p\mathrm{d}x > 0, v \in W\setminus\{0\}.$$

因为

$$\max_{W\setminus\{0\}}\varphi(u) = \max_{s>0,v\in W,\|\dot{v}\|_{L^p}=1}\left\{s^p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s^p}\int_0^T F(t,sv)\mathrm{d}t\right)\right\},$$

要证明该结论成立,只需证明,对 $v \in W$, $\|\dot{v}\|_{L^p} = 1$ 有

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^p}\int_0^T F(t,sv)\mathrm{d}t > \frac{1}{p}, \tag{11}$$

由条件(A)和假设(H1)知,存在常数 $L > 0, C_7 > 0$,使得

$$F(t,u) \geqslant L|u|^p - C_7 \tag{12}$$

对所有 $u \in \mathbf{R}^N$ 和 $t \in E$ 成立,由(12)式和假设(H1)可知,

$$\int_0^T F(t,sv)\mathrm{d}t = \int_E F(t,sv)\mathrm{d}t + \int_{[0,T]\setminus E} F(t,sv)\mathrm{d}t \geqslant$$
$$Ls^p\int_E|v|^p\mathrm{d}t - C_7\mu(E) - \int_{[0,T]\setminus E} h(t)\mathrm{d}t \geqslant$$
$$Ls^p\int_E|v|^p\mathrm{d}t - C_7\mu(E) - \int_0^T h(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\mu(E)$ 表示空间 E 的测度. 因此

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^p}\int_0^T F(t,sv)\mathrm{d}t \geqslant Lr,$$
$$r = \min\left\{\int_E|v|^p\mathrm{d}t : v \in W, \|\dot{v}\|_{L^p} = 1\right\}.$$

取 $L > 1/(rp)$,则(11)式成立. 故 $\forall m \in \mathbf{N}$,存在 $W_T^{1,p}$ 的 m 维子空间 W 及常数 $M > 0$,有

$$\max_{u\in W\setminus\{0\}}\varphi(u) < M.$$

(iii) 首先由假设(H4)知,$\forall u \in W_T^{1,p}$,有 $\varphi(u) = \varphi(-u)$,取

$$W_T^{1,p} = V \oplus X, X = \tilde{W}_T^{1,p}, V = \mathbf{R}^N, \dim V = 1,$$

由 m 的任意性,可取

$$m = n+1, \dim W = m,$$
$$\dim V < \dim W < +\infty,$$
$$\dim W - \dim V = m - 1 = n + 1 - 1 = n.$$

因此,由命题1知,$\forall n \in \mathbf{N}$,泛函 φ 至少有 $2n$ 个非平凡临界点,从而问题(1)至少有 $2n$ 个非平凡周期解.

注1 当 $p = 2, E = [0,T]$ 时,存在超线性函数

满足假设(H1) ~ (H4),但不能满足条件(AR);另一方面,由条件(AR)可以推出假设(H1) ~ (H4)成立. 在文献[11]中假设非线性项在无穷远处关于 x 是超线性增长的,定理 1 将文献[11]中的超线性条件推广到局部超线性条件,即非线性项是超线性的,但只需在[0,T]的 1 个正测度子集上成立.

3 参考文献

[1] Mawhin J. Some boundary value problems for Hartman-type perturbations of the ordinary vector p-Laplacian[J]. Nonlinear Anal,2000,40(1):497-503.

[2] Manasevich R,Mawhin J. The spectrum of p-Laplacian systems with various boundary conditions and applications[J]. Advance Differential Equations,2000,5(10/11/12):1289-1318.

[3] Xu Bo,Tang Chunlei. Some existence results on periodic solutions of ordinary p-Laplacian systems[J]. J Math Anal Appl,2007,333(2):1228-1236.

[4] Wang Zhiyong,Zhang Jihui. Periodic solutions of non-automous second order systems with p-Laplacian[J]. Electronic J Differential Equations,2009(17):1-12.

[5] Zhang Li,Ge Weigao. Periodic solutions for a kind of p-Laplacian Hamiltonian systems[J]. Bull Korean Math Soc,2010,47(2):355-367.

[6] Zhang Xingyong,Tang Xianhua. Periodic solutions for an ordinary p-Laplacian system[J]. Taiwanese Journal of Mathematics,2011,15(3):1369-1396.

[7] Willem M. Minimax theorems[M]. Boston: Birkhauser,1996.

[8] Ding Yanheng,Luan Shixia. Multiple solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations[J]. J Differential Equations,2004,207(2):423-457.

[9] 王少敏,杨培亮. 一类二阶哈密顿系统的周期解[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2007,31(2):174-177.

[10] 王少敏. 一类带有阻尼项的共振问题的周期解[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版,2012,29(2):60-64.

[11] Luan Shixia,Mao Anmin. Periodic solutions of a class of non-autonomous Hamiltonian systems[J]. Nonlinear Anal,2005,61(8):1413-1426.

Multiplicity of Periodic Solutions for Ordinary p-Laplacian Systems with Local Superlinear Nonlinearity

ZHANG Shen-gui

(College of Mathematics and Computer Science,Northwest University for Nationalities,Gansu Lanzhou 730030,China)

Abstract: The existence of infinitely many solutions for ordinary p-Laplacian systems is studied by critical point theory. Under a condition weaker than Ambrosetti-Rabinowitz's superlinear condition,some sufficient conditions for the existence of infinitely many solutions are obtained.

Key words: ordinary p-Laplacian systems; local superlinear; critical point

(责任编辑: 曾剑锋)