第 37 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 3
2013 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2013

文章编号:1000-5862(2013)03-0249-04

PH 分布的累积报酬分布及应用

张超权[1],秦永松[2],唐胜达[2*]

(1. 桂林航天工业学院理学部,广西 桂林 541004;2. 广西师范大学数学科学学院,广西 桂林 541004)

摘要: 采用构造新 Markov 链的方法对离散 PH 分布的报酬过程进行研究,证明了在单位时间收益率确定及随机 2 种情况下带报酬 Markov 链在被吸收之前的“累积报酬”是 PH 分布,并给出了相应的表达式,最后给出了 2 个数值计算实例.

关键词: 运筹学;PH 分布;报酬 Markov 链;累积报酬

中图分类号: O 211.5;O 226 **文献标志码:** A

0 引言

PH 分布最初由 A. K. Erlang 构造出来,后由 M. F. Nuets 推广并一般化[1],它已成为应用概率中的重要分析工具. PH 分布就是将各种随机时间间隔“分解”成一系列指数分布时间段,然后利用与之相关联的 PH 过程结构去简化各种分析. 它是指数(几何)分布参数的数值形式到矩阵形式的一种推广,具有简明的矩阵表示,PH 分布具有许多优良的性质,如有限混合、有限卷积、极值的封闭性、稠密性等,这使得 PH 分布能适应各种多层次、多因素的应用背景[2-3],因此,PH 分布已成为排队论、存储论、可靠性理论及各种相关随机模型的重要分析工具[4-6].

考虑状态集合 $E=\{1,2,\cdots,m,m+1\}$ 上非周期的离散 Markov 链 $X=\{X(n),n\in\mathbf{Z}^+\}$,设 $m+1$ 是吸收状态. 一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}^0\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{T}$ 是 $m\times m$ 随机子阵,$T_{ij}\geqslant 0$,$\boldsymbol{Te}\leqslant\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{T}^0=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})\boldsymbol{e}$,其中 $\boldsymbol{e}$ 是适当维数的单位列向量,I 是适当阶数的单位阵,设 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}$ 是非奇异的,从而 $\{1,2,\cdots,m\}$ 是瞬过状态,从任意状态出发,经过有限时间后将最终到达吸收状态 $m+1$,设 X 的初始分布是 $(\boldsymbol{\alpha},\alpha_{m+1})$,其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $m+1$ 维行向量,$\boldsymbol{\alpha e}+\boldsymbol{\alpha}_{m+1}=1$,定义

$$\tau=\min(n\geqslant 0,X(n)=m+1),\tag{1}$$

且 τ 具有分布

$$P(\tau=0)=\alpha_{m+1};$$

$$P(\tau=k)=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{T}^{k-1}\boldsymbol{T}^0,k\geqslant 1;$$

$$P(\tau\leqslant k)=1-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{T}^k\boldsymbol{e},k\geqslant 0,$$

则称 τ 具有 m 阶离散 PH 分布,记为 $PH(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{T})$.

本文主要对(1)式进行拓展,即让过程 X 在各个状态上获得 1 个“报酬”,考虑带报酬的 Markov 过程,基于此,设 $\tau(i)$ 表示过程 X 从进入状态 i 直到离开的逗留时间,设 $\boldsymbol{r}=(r(1),r(2),\cdots,r(m))$ 是 m 维非负向量. $r(i)\geqslant 0$ 可表示为 X 位于状态 i 的单位时间“报酬”,如 $r(i)$ 可表示状态 i 上单位时间获得的资金、电压、生产量或其它量,定义

$$R=\sum_{n=0}^{\tau}r(X(n))\tau(X(n)),\tag{2}$$

称 R 为过程 X 在进入吸收状态之前的累积报酬. 特别地,令 $r(i)=1(1\leqslant i\leqslant m)$,则 $R=\tau$. 显然(2)式是对(1)式的推广. 令 $E_+=\{i,1\leqslant i\leqslant m,r(i)>0\}$,$E_0=\{i,1\leqslant i\leqslant m,r(i)=0\}$,$|E_+|$ 记为集合 E_+ 的元素个数. 不妨设 $r(i)$ 是非负整数,显然,当取足够小的计量单位时,假设总是成立的. 本文主要采用构造新的 Markov 链,使得首次达到吸收状态时间与所讨论量的分布相同,在 $r(i)(1\leqslant i\leqslant m)$ 是给定确定量与随机量 2 种情况下分别讨论 R 的分布性质.

1 主要定理

1.1 单位报酬率确定情形

下面给出本文主要定理,并构造相应的 Markov

收稿日期:2013-01-15

基金项目:国家自然科学基金(10971038)和广西教育厅科研课题(201106LX067)资助项目.

通信作者:唐胜达(1976-),男,四川蓬溪人,副教授,主要从事概率统计的研究.

链证明这些定理[7-9].

定理1 设$r(i)(1\leqslant i\leqslant m)$是确定非负整数,$R$如(2)式定义,则$R$服从$|E_+|$阶PH分布($\boldsymbol{\beta}_+^*$,$S$),其中$\boldsymbol{\beta}_+^*$及$S$的构造如定理1证明给出.

证 定义T_k是第k到$k+1$次转移的时间间隔,即

$$T_0=\min\{n\geqslant 0:X(n)\neq X(0)\},$$
$$T_k=\min\{n\geqslant 0:X(T_0+T_1+\cdots+T_{k-1}+n)\neq X(T_0+T_1+\cdots+T_{k-1})\},k\geqslant 1.$$

定义$X^J=\{X^J(k),k\in\mathbf{Z}^+\}$,其中

$$X^J=\begin{cases}X(0), & k=0,\\ X(T_0+T_1+\cdots+T_{k-1}), & k\geqslant 1,\end{cases}$$

即X^J是X的内嵌纯跳过程,转移概率矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^J & (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^J)\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{P}^J=(p_{ij}^J)_{m\times m},p_{ij}^J=\begin{cases}\dfrac{p_{ij}}{1-p_{ii}}, & i\neq j,\\ 0, & i=j.\end{cases}$$

设$N_i(1\leqslant i\leqslant m)$是$X$在进入$m+1$前访问$i$的次数,$R_{in}$表示$X$第$n$次进入状态$i$的"累积报酬",即$R_{in}=r(i)\tau(i)$,$\{R_{in},1\leqslant i\leqslant m,n\geqslant 1\}$是相互独立且均值为$r(i)/(1-p_{ii})$的几何随机变量[10].显然$R=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{n=1}^{N_i}R_{in}$,注意到,当$r(i)=0$时,$P(R_{in}>0)=0$ a.e.,于是调整状态顺序,整理$\boldsymbol{P}^J$,$\boldsymbol{\alpha}$,在状态集$E_+\cup E_0$上,重新分块,设$\boldsymbol{P}^J=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{++}^J & \boldsymbol{P}_{+0}^J\\ \boldsymbol{P}_{0+}^J & \boldsymbol{P}_{00}^J\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_+,\alpha_0)$.在$E^*=E_+\cup\{m+1\}$上,设

$$M_0=\min\{n\geqslant 0,X^J(n)\in E^*\};$$
$$M_k=\min\{n\geqslant M_{k-1},X^J(n)\in E^*\},k\geqslant 1.$$

定义$X^*=\{X^*(n)=X(M_n),n\in\mathbf{Z}^+\}$,故$X^*$是非周期Markov链,转移矩阵是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_+^* & (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_+^*)\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{P}_+^*=\boldsymbol{P}_{++}^J+\boldsymbol{P}_{+0}^J(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{00}^J)^{-1}\boldsymbol{P}_{0+}^J$,初始分布($\boldsymbol{\beta}_+^*$,$\beta_{m+1}^*$),其中$\boldsymbol{\beta}_+^*=\boldsymbol{\alpha}_++\alpha_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{00}^J)^{-1}\boldsymbol{P}_{0+}^J$,$\beta_{m+1}^*=1-\boldsymbol{\beta}_+^*\boldsymbol{e}$[11].

定义过程$Y=\{Y(n),n\in\mathbf{Z}^+\}$:$Y$具有状态空间$E^*$,初始分布($\boldsymbol{\beta}_+^*$,$\beta_{m+1}^*$),转移矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{S} & (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix},$$

其中$S=(S_{ij})_{|E_+|\times|E_+|}$,考虑到$p_{ii}^*$可能为正,故设

$$S_{ij}=\begin{cases}1-\dfrac{1-p_{ii}}{r(i)}, & i=j,\\ \dfrac{1-p_{ii}}{r(i)}\cdot\dfrac{p_{ij}^*}{1-p_{ii}^*}, & i\neq j,\end{cases}$$

从而Y具有如下性质:Y是E^*上的Markov链,在状态i上停留次数是均值为$r(i)/(1-p_{ii})$的几何分布,当过程从状态i转移时,则转移到状态j的概率为$p_{ij}^*/(1-p_{ii}^*)$,$m+1$是吸收状态,过程进入吸收状态$m+1$后,将永远停留在$m+1$上.定义$\tau_Y=\min\{n\geqslant 0,Y(n)=m+1\}$,显然$\tau_Y=R$,由PH分布定义知,$\tau_Y$服从$|E_+|$阶的PH分布,记为($\boldsymbol{\beta}_+^*$,$S$).

故定理1得证.

定义$\Delta=\mathrm{diag}(r(1),r(2),\cdots,r(m))$,以下推论是显然的.

推论1 当$\Delta>0$时,则R是m阶PH分布,记为($\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{I}-\Delta^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})$).

推论2 当$\Delta=\boldsymbol{I}$时,R是m阶PH分布,记为($\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{P}$).

注1 对于连续时间的Markov过程[12],定义$R=\int_0^{\tau}r(X(t))\mathrm{d}t$,则也有类似命题成立.

1.2 单位报酬率随机情形

接下来,分析$r(i)(1\leqslant i\leqslant m)$是随机变量的情况.设$X(n)=i(1\leqslant i\leqslant m)$,过程$X$获得的是随机报酬,$r(i)$是取值有限的非负整数随机变量.不失一般性,设$r(i)(1\leqslant i\leqslant m)$具有相同的取值个数,且具有分布律:$P(r(i)=\gamma_{ik})=t_{ik}(1\leqslant k\leqslant L)$,$\sum\limits_{k=1}^{L}t_{ik}=1(1\leqslant i\leqslant m)$,定义$N=L^m$.

定理2 设$r(i)(1\leqslant i\leqslant m)$是如上定义的取值有限的非负整数随机变量,$R$如(2)式定义,则$R$服从$\sum\limits_{v=1}^{N}|E_{+v}|$阶PH分布,记为($\tilde{\boldsymbol{\beta}}_+^*$,$\tilde{S}$),其中$E_{+v}$,$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_+^*$,$\tilde{S}$的构造如定理2证明给出.

证 由全概率公式得

$$P(R=k)=P(\sum_{n=0}^{\tau}r(X(n))\tau(X(n))=k)=\sum_{\sigma(\gamma_{ik_i},1\leqslant i\leqslant m)}\prod_{i=1}^{m}P(r(i)=\gamma_{ik_i})P(\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N_i}\gamma_{ik_i}\tau(i)=k)=\sum_{v=1}^{N}f_v\cdot P(\tau_v=k),\qquad(3)$$

其中$\sigma(\gamma_{ik_i},1\leqslant i\leqslant m)$表示$\{\gamma_{ik_i},1\leqslant k_i\leqslant L,1\leqslant$

$i \leqslant m\}$ 构成的所有可能给合，显然(3)式共有 $N(<\infty)$ 项求和，$f_v = \prod_{i=1}^{m} P(r(i) = \gamma_{ik_i})$，显然 $\sum_{v=1}^{N} f_v = 1$，$P(\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N_i}\gamma_{ik_i}\tau(i) = k) = P(\tau_v = k)$.

对于给定的 v，$1 \leqslant v \leqslant N$，设对应 Markov 链 $\tilde{Y}_v = \{\tilde{Y}_v(n), n \in \mathbf{Z}^+\}$，状态空间为 $\tilde{E}_v \cup \{m_v + 1\}$，设 $\bigcap_{v=1}^{N} \tilde{E}_v = \varnothing$，初始分布是 $(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_v^*, \beta_{m_v+1}^*)$，转移矩阵 $\begin{pmatrix} \tilde{S}_v & (\boldsymbol{I} - \tilde{S}_v)\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}$，由定理 1，$\tau_v$ 服从 $|\tilde{E}_{+v}|$ 阶 PH 分布，记为 $(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{+v}^*, \tilde{S}_{+v})$. 构造新的 Markov 链 $\tilde{Y} = \{\tilde{Y}(n), n \in \mathbf{Z}^+\}$ 链，设状态空间是 $(\bigcup_{v=1}^{N} \tilde{E}_{+v}) \cup \{N + 1\}$，设 $N+1$ 是吸收状态，初始分布是 $(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*, \tilde{\beta}_{N+1}^*)$，其中 $\tilde{\beta}_{N+1}^* = 1 - \tilde{\boldsymbol{\beta}}^*\boldsymbol{e}$，$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^* = (f_1\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{+1}^*, f_2\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{+2}^*, \cdots, f_N\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{+N}^*)$，转移矩阵 $\begin{pmatrix} \tilde{S} & (\boldsymbol{I} - \tilde{S})\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}$，其中

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_1 & & & \\ & \tilde{S}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{S}_N \end{pmatrix}.$$

于是 $\tilde{Y}$ 具有如下性质：过程 $\tilde{Y}$ 以概率 $f_v(1 \leqslant v \leqslant N)$ 进入状态集 $\tilde{E}_{+v} \cup \{N+1\}$ 中，$\tilde{Y}$ 的转移逗留完全同于 $\tilde{Y}_v$ 在状态集 $\tilde{E}_{+v} \cup \{m_v + 1\}$ 中的情形，令 $\tau_{\tilde{Y}} = \min\{n \geqslant 0, \tilde{Y}(n) = N+1\}$，由 PH 分布的定义，$\tau_{\tilde{Y}}$ 服从 $\sum_{v=1}^{N} |E_{+v}|$ 阶 PH 分布，记为 $(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^*, \tilde{S})$. 显然 $R = \tau_{\tilde{Y}}$.

故定理 2 得证.

注 2　类似于 PH 分布的性质，定理 2 中 $r(i)$ 取值有限这一条件是必须的. 若 $r(i)$ 是取值无限，则上述命理一般是不成立的.

2　数值实例

2.1　有折旧行为的部件寿命及维修费用分析

考虑某系统部件，按折旧程度可分为 3 个阶段，由于内在原因，部件在投入使用时处于第 1 阶段、第 2 阶段、第 3 阶段的概率分布为 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0)$. 部件在 3 个阶段的转移矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{pmatrix},$$

当部件处于各阶段时，部件都将以一定概率失效而被更新，于是部件的寿命是 3 阶 PH 分布，记为 PH$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{P})$. 又若在 3 个阶段，部件的单位时间运行维修费用为 $\boldsymbol{r} = (2, 2, 3)$，以 R 表示部件的全部费用. 由定理 1，则部件的维护费用 R 为 3 阶 PH 分布 PH$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{S})$，其中

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0.90 \end{pmatrix},$$

即 R 具有分布律

$P(R = 0) = 0$;

$P(R = k) = 0.209 \times 0.5^{k-1} + 0.08 \times 0.85^{k-1} + 0.0602 \times 0.7^{k-1}$，$k \geqslant 1$.

2.2　柔性制造系统中的加工费用及加工时间分析

柔性制造系统中某产品的加工有 3 道工序，每道工序所测定的各项指标用以决定工序间的转移流程，转移矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{pmatrix},$$

若产品在各道工序中所测定的各指标符合标准，则产品达到成品要求，允许下线. 设初始分布 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0)$，则产品加工时间分布是 PH$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{P})$，若第 i 道工序的单位时间加工具有随机费用，设费用分布为 $P(r(i) = 2) = P(r(i) = 4) = 0.5$，$i = 1, 2, 3$，记

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_1 & & & \\ & \tilde{S}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{S}_8 \end{pmatrix},$$

其中

$$\tilde{S}_j = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{r(1)} & \frac{0.3}{r(1)} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{0.7}{r(2)} & \frac{0.3}{r(2)} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{0.7}{r(3)} \end{pmatrix} (j = 1, 2, \cdots, 8)$$

表示当 $r(1), r(2), r(3)$ 分别取 1，2 时所构成的对角阵，于是，由定理 2，一件成品的加工总费用 R 为 3 阶 PH 分布，记为 PH$(\boldsymbol{e}/8 \otimes \boldsymbol{\alpha}, \tilde{S})$，即 R 具有分布

$P(R = 0) = 0$;

$$P(R=k)=0.17\times0.5^{k-1}+0.0108\times0.625^{k-1}-0.0183\times0.825^{k-1}-0.0257\times0.65^{k-1}+0.118\times0.75^{k-1}+0.0081\times0.25^{k-1},k\geqslant1.$$

3 结束语

本文推广了 PH 分布定义方式. 仿照文献[1-2]的研究,可以给出累积报酬一系列性质,如累积报酬分布的Laplace变换矩阵、随机化、极值的封闭性、稠密性等. 同时,本文的 PH 分布推广形式对排队论、动态规划、稳定性理论、多险种风险理论等方面的研究提供了理论工具.

4 参考文献

[1] Neuts M F. Matrix-Geometric solutions in stochastic models [M]. Baltimore: John Hopkins University Press,1981.

[2] 田乃硕. 休假随机服务系统 [M]. 北京: 北京大学出版社,2001.

[3] 田乃硕,李泉林. PH 分布及其在随机模型中的应用 [J]. 应用数学与计算数学学报,1995,9(1):1-15.

[4] 赵丹,孟宪云,陈变娟,等. 单重休假且修理时间服从PH 分布的可修系统 [J]. 扬州大学学报: 自然科学版,2012,15(3):23-26.

[5] 金顺福,宋红磊. 基于多重休假排队的 IEEE 802.16m 休假机制的系统建模与性能分析 [J]. 电信科学,2012(6):48-53.

[6] 吴果林,唐胜达,秦永松. 随机时间上的 Markov 到达过程 [J]. 华中师范大学学报: 自然科学版,2012,46(6):661-665.

[7] Cinlar E. Introduction to stochastic processes [M]. New Jersey: Prentice Hall,1975.

[8] Freedman D. Approximating countable Markov chains [M]. San Francisco: Holden Day,1972.

[9] Latouche G,Ramaswamy V. Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling [M]. Philadelphia: ASA/SIAM Series on Statistics and Applied Probability,1999.

[10] 钱敏平,龚光鲁. 随机过程论 [M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社,1997.

[11] Kemeny J G,Snell J L,Knapp A W. Denumerable Markov chains [M]. New York: Springer-Verlag,1976.

[12] 潘致锋,孙荣恒. 具有 Bernoulli 反馈的 $Geo^{\xi}/Geo/1$ 排队系统 [J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版,2004,21(2):8-11.

The Distribution of the Accumulated Rewards in PH and Its Application

ZHANG Chao-quan[1],QIN Yong-song[2],TANG Sheng-da[2*],

(1. Faculty of Sciece,Guilin University of Aerospace Technology,Guilin Guangxi 541004,China;

2. College of Mathematics,Guangxi Normal University,Guilin Guangxi 541004,China)

Abstract: The rewards processes of the discrete PH distribution are anlysised by constructing a new Markov chain associated with the time until absorption in a finite,discrete time Markov chain. It is shown that the distribution of total accumulate reward obtained until absorption with constant and random reward rate in each state are respectively PH distribution. At last,the expression is given and two numerical examples are discussed.

Key words: operations reseach; PH distributions; Markov chain with reward; accumulated reward

(责任编辑: 曾剑锋)