第 37 卷 第 4 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 4
2013 年 7 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2013

文章编号:1000-5862(2013)04-0401-05

高阶线性微分方程的解在角域内的增长性及 Borel 方向

许淑娟,易才凤*
(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要: 主要运用角域上的值分布理论和方法,研究了整系数高阶线性微分方程 $f^{(n)}+A_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+A_0f=0$ 的解在角域内的增长性和 Borel 方向. 假定 $A_j(0\leqslant j\leqslant n-1)$ 满足某些条件,证明了方程的非零解在含有 A_0 的 $\lambda(\lambda>0)$ 级 Borel 方向的任意角域内的增长级为无穷,且非零解的无穷级 Borel 方向与 A_0 的 λ 级 Borel 方向一致.

关键词: 微分方程; 解; 角域; Borel 方向; 无穷级
中图分类号: O 174.52 **文献标志码**: A

0 引言与主要结果

本文使用 Nevanlinna 值分布及角域上值分布的标准记号[1-2],用 $\sigma(f)$,$\mu(f)$ 分别表示整函数 $f(z)$ 在全平面上的增长级和下级,即

$$\sigma(f)=\limsup_{r\to\infty}\log\log M(r,f)/\log r,$$

$$\mu(f)=\liminf_{r\to\infty}\log\log M(r,f)/\log r,$$

其中 $M(r,f)=\sup\{|f(z)|:|z|\leqslant r\}$.

$f(z)$ 在角域 $\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)=\{z:\theta-\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\theta+\varepsilon,|z|>0\}$ 上的增长级定义为

$$\sigma_{\theta,\varepsilon}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),f)}{\log r},$$

其中 $M(r,\overline{\Omega}(\alpha,\beta),f)=\sup\{|f(te^{i\theta})|:\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0<t\leqslant r\}$.

$f(z)$ 在径向上的增长级定义为

$$\sigma_{\theta}(f)=\lim_{\varepsilon\to0}\sigma_{\theta,\varepsilon}(f).$$

文献[3]首次研究了 2 阶线性微分方程

$$f''+Af'+Bf=0 \tag{1}$$

的非零解在角域上的增长性,证明了如下结论.

定理 A 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 在角域 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)(0<\beta-\alpha\leqslant2\pi)$ 内解析,如果 $\forall K>0$ 及满足 $\alpha<\theta<\beta$ 和

$$\liminf_{r\to\infty}(A(re^{i\theta})+1)r^K/B(re^{i\theta})=0$$

的 θ 具有一正测度,则方程(1)的任一非零解都有 $\sigma_{\alpha,\beta}(f)=\infty$,其中

$$\sigma_{\alpha,\beta}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,\Omega(\alpha,\beta),f)}{\log r}.$$

文献[4]研究了高阶线性微分方程

$$f^{(n)}+A_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+A_0f=0 \tag{2}$$

的非零解在角域上的增长性,得到如下结果.

定理 B 设 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,n-1)$ 在角域 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)(0<\beta-\alpha\leqslant2\pi)$ 内解析,如果 $\forall K>0$ 及满足 $\alpha<\theta<\beta$ 和

$$\liminf_{r\to\infty}(A_1(re^{i\theta})+A_2(re^{i\theta})+\cdots+A_{n-1}(re^{i\theta})+1)r^K/A_0(re^{i\theta})=0$$

的 θ 具有一正测度,那么方程(2)的任一非零解都有 $\sigma_{\alpha,\beta}(f)=\infty$.

文献[5]研究了高阶非齐次线性微分方程

$$f^{(n)}+A_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+A_0f=F \tag{3}$$

的非零解在全平面上的性质,在假设 A_0 的增长级起控制作用时证明了如下结论.

定理 C 若 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1},F\not\equiv0$ 是有限级整函数,$n\geqslant2$,并假设 $\sigma(A_j)<\sigma(A_0)(j=1,\cdots,n-1)$,则方程(3)至多有 1 个可能的有限级例外解 f_0,其它所有解 f 满足 $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$.

文献[6]也研究了方程(1)解的增长性问题,它们是在假定系数 $A(z)$ 或 $B(z)$ 具有亏值时证明了方程的非零解具有无穷级.

在亚纯函数的幅角分布理论中,Borel 方向起着基本的作用. 设 $f(z)$ 是 1 个 $\lambda(0<\lambda\leqslant\infty)$ 级亚纯函数,1 条从原点出发的射线 $\arg z=\theta$ 称为 f 的 1 条 λ 级 Borel 方向,是指 $\forall\varepsilon>0$ 和任意的复数 $a\in\mathbf{C}$,有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon,r),f=a)}{\log r}=\lambda,$$

收稿日期:2013-03-25
基金项目:国家自然科学基金(11171170)资助项目.
通信作者:易才凤(1955-),女,江西吉安人,教授,主要从事复分析方向研究.

至多除去 2 个例外的复数 a,其中 $n(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon,r),f=a)$ 是 $f-a$ 在区域 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon,r)=\{z:\theta-\varepsilon<\arg z<\theta+\varepsilon,0<|z|<r\}$内的零点(计重数)个数.

关于 Borel 方向的存在性,G. Valiron 在文献[7]中证明了以下的基本结果:1 个 $\lambda>0$ 级亚纯函数至少存在 1 条 λ 级 Borel 方向.

若函数的增长级为 λ,则它在 λ 级 Borel 方向附近的增长速度可以达到它在全平面上的增长速度. 自然会考虑:假如 A_0 在某个角域内含有 1 条 λ 级 Borel 方向而 $A_j(j=1,\cdots,n-1)$ 在该角域内的增长级小于 λ,那么方程(2)和(3)的非零解在该角域内的增长性如何?再则,若非零解在该角域内的增长级为无穷,那么解的无穷级 Borel 方向和 A_0 的 $\sigma(A_0)$ 级 Borel 方向是否有联系呢?针对上述问题,文献[8]证明了如下结果.

定理 D 设 A,B 为有限级整函数,$\Omega(\alpha,\beta)$ $(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 为某一角域;若 A,B 在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内满足条件:$\exists\theta\in(\alpha,\beta)$,使得 $\arg z=\theta$ 为 B 的 1 条 λ $(0<\lambda\leqslant\sigma(B))$ 级 Borel 方向,且 $\sigma_{\alpha\beta}(A)<\lambda$,则方程(1)的任意一非平凡解 f,有 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty$且$\arg z=\theta$ 为 f 的 1 条∞级 Borel 方向.

定理 E 设 A,B 为有限级整函数,B 的下级满足 $0<\mu(B)<1/2$,$\Omega(\alpha,\beta)$ $(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 为一角域;若 A 在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内满足 $\sigma_{\alpha\beta}(A)<\mu(B)$,则方程(1)的任意一非平凡解 f,都有 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty$且 $\forall\theta\in(\alpha,\beta)$,$\arg z=\theta$ 为 f 的 1 条∞级 Borel 方向.

受以上各结果的启发,本文证明了下列结论.

定理 1 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$ 为有限级整函数,$\Omega(\alpha,\beta)$ $(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 为某一角域,若 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内满足条件:$\exists\theta\in(\alpha,\beta)$,使得 $\arg z=\theta$ 为 A_0 的 1 条 $\lambda(0<\lambda\leqslant\sigma(A_0))$ 级 Borel 方向,且 $\sigma_{\alpha\beta}(A_j)<\lambda(j=1,\cdots,n-1)$,则方程(2)的任一非平凡解 f,有 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty$且 $\arg z=\theta$ 为 f 的 1 条∞级 Borel 方向.

由上述定理不难推出方程(2)的任意一非平凡解 f 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的∞级 Borel 方向的条数至少为 A_0 在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的 $\lambda(\sigma_{\alpha\beta}(A_j)<\lambda\leqslant\sigma(A_0))$ 级 Borel 方向条数.

推论 1 假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$ 满足定理 1 的条件,$F\not\equiv 0$ 为有限级整函数,则方程(3)至多有 1 个可能的有限级例外解 f_0,其它所有解 f,有

$$\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty.$$

定理 2 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$ 为有限级整函数,A_0 的下级满足 $0<\mu(A_0)<1/2$,$\Omega(\alpha,\beta)$ $(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 为一角域;若 A_j 在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内满足 $\sigma_{\alpha\beta}(A_j)<\mu(A_0)(j=1,\cdots,n-1)$,则方程(2)的任一非平凡解 f,都有 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty$且 $\forall\theta\in(\alpha,\beta)$,$\arg z=\theta$ 为 f 的 1 条∞级 Borel 方向.

从定理 2 容易看出,若 $\sigma(A_j)<\mu(A_0)<1/2$,则复平面内从原点出发的任意方向都是方程(2)的非平凡解 f 的∞级 Borel 方向.

推论 2 假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$ 满足定理 2 的条件,$F\not\equiv 0$ 为有限级整函数,则方程(3)至多有一个可能的有限级例外解 f_0,其它所有解 f 都有

$$\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty.$$

1 引理

定理的证明,需要用到角域上特征函数的概念和相关性质.

定义 1[9-10] 设 $f(z)$ 是角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的亚纯函数,其中 $0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi$,$k=\pi/(\beta-\alpha)$. 记

$$A_{\alpha\beta}(r,f)=\frac{k}{\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^k}-\frac{t^k}{r^{2k}}\right)\left\{\log^+|f(te^{i\alpha})|+\log^+|f(te^{i\beta})|\right\}\frac{dt}{t},$$

$$B_{\alpha\beta}(r,f)=\frac{2k}{\pi r^k}\int_\alpha^\beta\log^+|f(re^{i\theta})|\sin k(\theta-\alpha)\,d\theta,$$

$$C_{\alpha\beta}(r,f)=2\sum_{1<|b_v|<r}\left(\frac{1}{|b_v|^k}-\frac{|b_v|^k}{r^{2k}}\right)\sin k(\beta_v-\alpha),$$

$$D_{\alpha\beta}(r,f)=A_{\alpha\beta}(r,f)+B_{\alpha\beta}(r,f),$$

$$S_{\alpha\beta}(r,f)=A_{\alpha\beta}(r,f)+B_{\alpha\beta}(r,f)+C_{\alpha\beta}(r,f),$$

其中 $b_v=|b_v|e^{i\beta_v}(v=1,2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的所有极点,重级极点按重数计算.

亚纯函数 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的级和下级分别定义为

$$\sigma_{\alpha\beta}(f)=\limsup_{r\to\infty}\log^+S_{\alpha\beta}(r,f)/\log r,$$

$$\mu_{\alpha\beta}(f)=\liminf_{r\to\infty}\log^+S_{\alpha\beta}(r,f)/\log r.$$

此外,再定义角域上的 Ahlfors-Shimizu 特征函数[11],令

$$\Omega(r)=\{z:\alpha<\arg z<\beta,0<|z|<r\}.$$

定义

$$S(r,\Omega,f)=\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega(r)}\left(\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\right)^2 d\sigma,$$

$$T_0(r,\Omega,f)=\int_1^r\frac{S(t,\Omega,f)}{t}dt,$$

并运用 Ahlfors-Shimizu 特征函数定义了 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的级和下级

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(f)=\limsup_{r\to\infty}\log^+T_0(r,\Omega,f)/\log r,$$

$$\bar{\mu}_{\alpha\beta}(f)=\liminf_{r\to\infty}\log^+T_0(r,\Omega,f)/\log r.$$

事实上,这两种不同定义的增长级存在一定的联系,文献[12]证明了不等式

$$S_{\alpha\beta}(r,f) \leqslant 2k^2 \frac{T_0(r,\Omega,f)}{r^k} + k^3\int_1^r \frac{T_0(t,\Omega,f)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t + O(1), \tag{4}$$

其中 $\Omega = \Omega(\alpha,\beta)$,$k = \pi/(\beta-\alpha)$. 由此可知,若 $\overline{\sigma}_{\alpha\beta}(f) < \infty$,则 $\sigma_{\alpha\beta}(f) < \infty$.

引理 1[13]　设 $f(z)$ 是在角域 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)$ 内具有有限 ρ 级的亚纯函数,令 $\Gamma = \{(n_1,m_1),(n_2,m_2),\cdots,(n_j,m_j)\}$ 表示满足 $n_i > m_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,j)$ 的不同整数对的有限集,设 $\varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$ 为给定的正常数,那么存在只与 f,ε 和 δ 有关的常数 $K>0$,使得

$$|f^{(n)}(z)/f^{(m)}(z)| < K|z|^{(n-m)(k_\delta+2\rho+1+\varepsilon)}(\sin k_\delta(\varphi-\alpha-\delta))^{-2^{(n-m)}}$$

成立,其中 $(n,m) \in \Gamma$,$z = re^{\mathrm{i}\varphi} \in \Omega(\alpha+\delta,\beta-\delta)$,$z \notin D$,$D$ 为由可数个半径之和为有限的圆盘并构成的 1 个 R-值集,$k_\delta = \pi/(\beta-\alpha-2\delta)$.

引理 2[2,14]　设 $f(z)$ 是 $\rho(0<\rho\leqslant\infty)$ 级亚纯函数,假定 B: $\arg z = \theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 为 $f(z)$ 的 1 条 ρ 级 Borel 方向,则在以原点为顶点,以 $\arg z = \theta_0$ 为角平分线的任意小角域 $\Omega(\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon)$ 内,存在一列 ρ 级充满圆

$$\Gamma_m: |z-z_m| < \varepsilon_m|z_m|, \arg z_m = \theta_0,$$
$$\lim_{m\to\infty}|z_m| = \infty, \lim_{m\to\infty}\varepsilon_m = 0 (m=1,2,\cdots)$$

使得在每个 Γ_m 内,$f(z)$ 可取任意复数至少 n_m 次,至多可能除去一些复数含于球面半径为 e^{-n_m} 的 2 个圆内,其中 $n_m \geqslant |z_m|^{\rho_m}$,$\rho_m \to \rho$.

引理 3　设 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内亚纯,则对任意小的 $\varepsilon>0$,在全平面内对任意 3 个相互判别的复数 $a_v(v=1,2,3)$,当 $r>1$ 时,有

$$T_0(r,\Omega(\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon),f) \leqslant 3\sum_{v=1}^{3}\overline{N}(2r,\Omega(\alpha,\beta),f=a_v) + O(\log^2 r).$$

引理 4　设 $f(z)$ 在角域 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)$ 内解析,$0<\alpha<\beta<2\pi$,则有

$$\log M(r,\Omega,f) \leqslant Kr^k\{S_{\alpha\beta}(2r,f)+1\},$$
$$S_{\alpha\beta}(r,f) \leqslant \frac{2k}{\pi}\int_1^r \log^+\frac{M(r,\Omega,f)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t + \frac{4}{\pi}\frac{M(r,\Omega,f)}{t^k},$$

其中 $M(r,\Omega,f) = \sup\{|f(te^{\mathrm{i}\theta})|: \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, 1\leqslant t\leqslant r\}$,$k=\pi/(\beta-\alpha)$,$K$ 为一正常数.

引理 5[15]　设 $f(z)$ 是整函数,满足 $0<\mu(f)<1$,则 $\forall\zeta \in (\mu(f),1)$,存在集合 $E \subset [0,\infty)$,满足 $\overline{\log\mathrm{dens}}E \geqslant 1-\mu(f)/\zeta$,其中 $E = \{r\in[0,\infty): m(r) > M(r)\cos\pi\zeta\}$,$m(r) = \inf\limits_{|z|=r}\log|f(z)|$,$M(r) = \sup\limits_{|z|=r}\log|f(z)|$.

2　定理的证明

定理 1 的证明　设 f 为方程(2)的任一非零解,由方程(2)得

$$|A_0(z)| \leqslant \left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}\right| + |A_{n-1}(z)|\left|\frac{f^{(n-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|. \tag{5}$$

假设 $\sigma_{\alpha\beta}(f) = \rho < \infty$,$\arg z = \theta_0(\theta_0\in(\alpha,\beta))$ 为 A_0 的 1 条 λ 级 Borel 方向,由引理 1,$\exists\delta_0>0$ 和只与 f,ε 和 δ 有关的常数 $K>0$,使得

$$|f^{(l)}(z)/f(z)| < K|z|^{l(k_{\delta_0}+2\rho+1+\varepsilon)}(\sin k_{\delta_0}(\varphi-\alpha-\delta_0))^{-2^l}, l=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

对所有的 $z = re^{\mathrm{i}\varphi} \in \Omega(\alpha+\delta_0,\beta-\delta_0)$,但 $z = re^{\mathrm{i}\varphi} \notin D$ 时成立,其中 D 为由引理 1 给出的 R-值集,$k_{\delta_0} = \pi/(\beta-\alpha-2\delta_0)$.

因为 $\arg z = \theta_0$ 为 A_0 的 1 条 λ 级 Borel 方向,选取适当的 η,使得 $\Omega(\theta_0-\eta,\theta_0+\eta) \subset \Omega(\alpha+\delta_0,\beta-\delta_0)$. 由引理 2,存在 1 组 λ 级 Borel 充满圆:Γ_m: $|z-z_m| < \varepsilon_m|z_m|$,其中 $\arg z_m = \theta_0$,$\lim\limits_{m\to\infty}|z_m| = \infty$,$\lim\limits_{m\to\infty}\varepsilon_m = 0$,$\Gamma_m \subset \Omega(\theta_0-\eta,\theta_0+\eta)$. 由于 A_0 是整函数,∞ 为 A_0 的 1 个 Picard 例外值,故由充满圆的性质知,在充满圆定义中的 2 个除外球面小圆中必有 1 个包含 ∞. 定义 z_1,z_2 的球面距离为 $|z_1,z_2|$,从而当 m 充分大时,存在复数 $a_m \in \Gamma_m$,使得下式

$$|A_0(a_m),\infty| = 1/(1+|A_0(a_m)|^2)^{1/2} = 2e^{-n_m}$$

成立. 这样就可以找到与 m 无关的正常数 C,使得对充分大的 m,有

$$|A_0(a_m)| > Ce^{n_m} \geqslant Ce^{|z_m|^{\rho_m}}, \rho_m \to \lambda.$$

注意到 $|a_m| = (1+o(1))|z_m|$. 由简单的计算可以证明

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,\overline{\Omega}(\theta_0-\eta,\theta_0+\eta),A_0)}{\log r} \geqslant \lambda > 0.$$

由 Phragmen-Lindelöf 定理,容易知道存在区间 $[\theta_1,\theta_2] \subset (\theta_0-\eta,\theta_0+\eta)$,使得 $\forall\theta\in[\theta_1,\theta_2]$,有

$$\limsup_{r\to\infty}\log\log|A_0(re^{\mathrm{i}\theta})|/\log r \geqslant \lambda. \tag{7}$$

因为 D 是一个由半径之和为有限的可数个圆盘构成的 1 个 R-值集,所以满足条件"射线 $\arg z = \theta$ 与 D 中无穷个圆盘相交"的 θ 的测度为 0. 故由(6)式,可取 $\theta^* \in [\theta_1,\theta_2]$,使得 $\exists R_0>0$,当 $r>R_0$ 时,有 $|f^{(l)}(re^{\mathrm{i}\theta^*})/f(re^{\mathrm{i}\theta^*})| < Kr^{l(k_{\delta_0}+2\rho+1+\varepsilon)}(\sin k_{\delta_0}(\theta^*-$

$\alpha-\delta_0))^{-2l}\leqslant Mr^N(l=1,2,\cdots,n)$ (8)

成立,其中 $M=K(\sin k_{\delta_0}(\theta^*-\alpha-\delta_0))^{-2l}$,$N=l(k_{\delta_0}+2\rho+2)$.

由(7)式,取 $0<\varepsilon^*<(\lambda-\lambda_0)/2$,其中 $\lambda_0=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n-1}\{\sigma_{\alpha\beta}(A_j)\}<\lambda$,当 k 充分大时,有

$$|A_0(r_k e^{i\theta^*})|>e^{r_k^{\lambda-\varepsilon^*}} \tag{9}$$

成立.

又因为 $\sigma_{\alpha\beta}(A_j)<\lambda(j=1,2,\cdots,n-1)$,由整函数在角域内的增长级的定义,有

$$|A_j(r_k e^{i\theta^*})|<\exp\{r_k^{\lambda_0+\varepsilon^*}\}. \tag{10}$$

取 $z_k=r_k e^{i\theta^*}$,将(8)~(10)式分别代入(5)式得 $e^{r_k^{\lambda-\varepsilon^*}}<|A_0(r_k e^{i\theta^*})|\leqslant Mr_k^N(|A_{n-1}(r_k e^{i\theta^*})|+\cdots+|A_1(r_k e^{i\theta^*})|+1)<Mr_k^N n e^{r_k^{\lambda_0+\varepsilon^*}}(k\to\infty)$,

注意到 $\lambda-\varepsilon^*>\lambda_0+\varepsilon^*$,所以当 $k\to\infty$ 时便导出矛盾!

所以 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\rho<\infty$ 的假定不成立. 故

$$\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty.$$

上述证明中只用到了 $\Omega(\alpha,\beta)$ 是包含 $\arg z=\theta_0$ 的任意角域,故 $\forall\varepsilon>0$,当 $\alpha=\theta_0-\varepsilon$,$\beta=\theta_0+\varepsilon$ 时,同样有

$$\sigma_{\alpha\beta}(f)=\sigma_{\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon}(f)=\infty. \tag{11}$$

下证 $\arg z=\theta_0$ 为 f 的 1 条 ∞ 级 Borel 方向. 若不然,由 Borel 方向的定义,存在适当小的 ε_0,$\tau<\infty$ 以及 3 个相互判别的有穷复数 $a_v(v=1,2,3)$,其中有 1 个 a_v 为 ∞,使得

$$\sum_{v=1}^{3}n(\Omega(\theta_0-2\varepsilon_0,\theta_0+2\varepsilon_0,r),f=a_v)<r^{\tau}$$

成立,其中 $\Omega(\theta_0-2\varepsilon_0,\theta_0+2\varepsilon_0,r)\subset\Omega(\alpha,\beta,r)$.

从而

$N(r,\Omega(\theta_0-2\varepsilon_0,\theta_0+2\varepsilon_0),f=a_v)=\int_0^r\frac{n(\Omega(\theta_0-2\varepsilon_0,\theta_0+2\varepsilon_0,t),f=a_v)-n(0,f=a_v)}{t}dt+n(0,f=a_v)\log r\leqslant r^{\tau+c_1}$,

其中 c_1 为一正常数.

由引理 3 知

$T_0(r,\Omega(\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0),f)\leqslant 3\sum_{v=1}^{3}\overline{N}(2r,\Omega(\theta_0-2\varepsilon_0,\theta_0+2\varepsilon_0),f=a_v)+O(\log^2 r)\leqslant 3\sum_{v=1}^{3}N(2r,\Omega(\theta_0-2\varepsilon_0,\theta_0+2\varepsilon_0),f=a_v)+O(\log^2 r)\leqslant r^{\tau+c_2}$,

其中 c_2 为一正常数.

由不等式(4),有

$S_{\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0}(r,f)\leqslant 2k^2\frac{T_0(r,\Omega(\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0),f)}{r^k}+k^3\int_1^r\frac{T_0(t,\Omega(\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0),f)}{t^{k+1}}dt+O(1)$,

其中 $k=\pi/2\varepsilon_0$. 从而 $\exists M'>0$,$N'>0$,使得

$$S_{\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0}(r,f)\leqslant M'r^{N'}$$

成立.

再由引理 4,有

$$\log M(r,\Omega(\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0),f)\leqslant Kr^{\pi/2\varepsilon_0}\{S_{\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0}(2r,f)+1\}\leqslant M''r^{N''}. \tag{12}$$

由(12)式,根据整函数在角域内增长级的定义,容易知道 $\sigma_{\theta_0-\varepsilon_0,\theta_0+\varepsilon_0}(f)<\infty$,这便与(11)式导出矛盾! 所以 $\arg z=\theta_0$ 为 f 的 1 条 ∞ 级 Borel 方向.

推论 1 的证明 假设 f_1,f_2 是方程(3)的 2 个相异的非零解且满足 $\sigma_{\alpha\beta}(f_1)<\infty$,$\sigma_{\alpha\beta}(f_2)<\infty$,那么 $\sigma_{\alpha\beta}(f_1-f_2)<\infty$,但 f_1-f_2 是方程(3)对应的齐次方程(2)的非零解,这与定理 1 中 $\sigma_{\alpha\beta}(f_1-f_2)=\infty$ 矛盾,所以方程(3)至多有 1 个非零解 f_0 满足 $\sigma_{\alpha\beta}(f_0)<\infty$,其它所有解 f,有 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty$.

定理 2 的证明 设 f 为方程(2)的非平凡解,若 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\rho<\infty$,下面将推出矛盾.

$\forall\theta\in(\alpha,\beta)$,取 $0<\eta<\delta_0=\min\{\theta-\alpha,\beta-\theta\}/2$,则

$$\Omega(\theta-\eta,\theta+\eta)\subset\Omega(\alpha+\delta_0,\beta-\delta_0)\subset\Omega(\alpha,\beta).$$

在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上对 $f(z)$ 应用引理 1 知,不等式

$$|f^{(l)}(z)/f(z)|<K|z|^{l(k_{\delta_0}+2\rho+1+\varepsilon)}\cdot(\sin k_{\delta_0}(\varphi-\alpha-\delta_0))^{-2l}(l=1,2,\cdots,n)$$

对所有的 $z=re^{i\varphi}\in\Omega(\alpha+\delta_0,\beta-\delta_0)$ 且 $z\notin D$ 均成立. 特别地,$\exists M>0$,$N>0$,使得

$$|f^{(l)}(re^{i\varphi})/f(re^{i\varphi})|\leqslant Mr^N(l=1,2,\cdots,n) \tag{13}$$

成立,其中 D 为引理 1 给出的 R-值集.

对 A_0 运用引理 5,取 $\zeta=(\mu(A_0)+1/2)/2$,记 $M(r)=\sup\limits_{|z|=r}\log|A_0(z)|$,$m(r)=\inf\limits_{|z|=r}\log|A_0(z)|$ 及 $E=\{r\in[0,\infty):m(r)>M(r)\cos\pi\zeta\}$,则 $\forall\varepsilon>0$ 及 z,满足当 $|z|=r\in E$ 时,有

$$|A_0(z)|>\exp\{r^{\mu(A_0)-\varepsilon}\}.$$

由于

$$\overline{\log\operatorname{dens}}E\geqslant 1-\mu(A_0)/\zeta=(1/2-\mu(A_0))/(\mu(A_0)+1/2)>0,$$

且 D 是 R-值集. 因此可取 $r_k\in E$,使得 $z_k=r_k e^{i\theta}\notin D$,当 $k\to\infty$ 时,有

$$|A_0(z_k)|>\exp\{r_k^{\mu(A_0)-\varepsilon}\}. \tag{14}$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n-1}\{\sigma_{\alpha\beta}(A_j)\}$,其中

$$\sigma_{\alpha\beta}(A_j)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log\{M(r,\overline{\Omega}(\alpha,\beta),A_j)\}}{\log r},$$

那么(14)式中的 $\varepsilon>0$ 和 z_k,当 k 充分大时,有

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n-1}|A_j(z_k)|<\exp\{r_k^{\lambda+\varepsilon}\}. \qquad (15)$$

由于 $\lambda<\mu(A_0)$,现取 $\varepsilon<(\mu(A_0)-\lambda)/3$,将(13) ~(15)式代入(5)式便导出

$$\exp\{r_k^{(2\mu(A_0)+\lambda)/3}\}<|A_0(z_k)|<$$
$$Mr_k^N(1+(n-1)\exp\{r_k^{(2\mu(A_0)+\lambda)/3}\}).$$

上式显然是矛盾的. 所以 $\sigma_{\alpha\beta}(f)=\infty$.

类似定理 1 可证得 $\arg z=\theta_0$ 为 f 的 1 条∞级 Borel 方向.

推论 2 的证明　类似推论 1 的证明,即得所需结果.

3　参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社,1982.

[3] Wu Shengjian. On the growth of solutions of second order linear differential equations in an angle [J]. Complex Variable,1994,24(3/4):241-248.

[4] Xu Junfeng,Yi Hongxun. Growth of the solutions of higher order linear differential equations in an angle [J]. J Sys Sci & Math Scis,2008,28(6):702-708.

[5] Chen Zongxuan,Gao Shian. The complex oscillation theory of certain non-homogeneous linear differential equations with transcendental entire coefficients [J]. 1993,179(2):403-416.

[6] 刘旭强,易才凤. 关于 2 阶线性微分方程 $f''+Af'+Bf=0$ 解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2013,37(2):171-174.

[7] Valiron G. Recherches sur le theoreme de M Borel dans la theorie des fonctions meromorphes [J]. Aca Math,1929,52(1):67-92.

[8] 易才凤,刘旭强. 方程 $f''+Af'+Bf=0$ 的解在角域内的增长性及 Borel 方向 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2013,37(1):1-5.

[9] Goldberg A A,Ostrovskii I V. The distribution of values of meromorphic functions [M]. Moscow: Izdat Nauk. 1970.

[10] Nevannlinna R. Uber die eigenschaften meromorpher funktionen in einem winkelraum [J]. Acta Soc sci Fenn,1925,50(12):1-45.

[11] Tsuji M. Potential theory in modern function theory [M]. Tokyo: Maruzen Co Ltd,1959.

[12] Zheng Jianhua. Value distribution of meromorphic functions [M]. Berlin: Springer-Verlag,2010.

[13] Wu Shengjian. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function in an angle and their application [C]. Tian jin: Proceeding of International Conference on Complex Analysis at the Nankai Institute of Mathematics,1992:235-241.

[14] 张广厚. 整函数和亚纯函数理论 [M]. 北京: 科学出版社,1986.

[15] Barry P D. Some theorems related to the $\cos\pi\rho$ theorem [J]. Proc London Math Soc,1970,21(2):334-360.

The Growth and Borel Direction of Solutions of Higher Order Linear Differential Equation in Angular Domains

XU Shu-juan,YI Cai-feng*

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: By using the fundamental theory and method of value distribution in angular domain,it is investigated that growth and Borel direction of solutions in angular domains of the higher order linear differential equation $f^{(n)}+A_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+A_0f=0$ where $A_j(j=0,\cdots,n-1)$ are entire functions. Given some conditions for the coefficients A_j $(0\leqslant j\leqslant n-1)$,it is proved that every solution $f\not\equiv 0$ of the equation is of the infinite order in any angular domain which has λ order Borel direction of A_0,and the ∞ order Borel direction of the solution is unanimous with the λ order Borel direction of A_0.

Key words: differential equations; solutions; angular domain; Borel direction; infinite order

(责任编辑: 王金莲)