第 37 卷 第 4 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 4
2013 年 7 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2013

文章编号:1000-5862(2013)04-0406-05

单位圆内高阶齐次线性微分方程解与不动点的研究

金 瑾

(毕节学院数学系,贵州 毕节 551700)

摘要: 讨论了系数是单位圆内的解析函数的高阶齐次线性微分方程解及解的 1 次导数和 2 次导数与其不动点之间的关系,并获得了它们之间的精确估计.

关键词: 单位圆;高阶线性微分方程;不动点;解析函数;收敛指数

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A

0 引言

假设读者熟悉单位圆内的 Nevanlinna 理论和记号及系数是单位圆内的解析系数的高阶线性微分方程解的增长性.近年来国内外有许多研究者做了很多有益的工作[1-11],本文在他们研究的基础上,继续讨论单位圆内高阶齐次线性微分方程解与不动点的关系问题,并获得了高阶齐次线性微分方程解以及它们的 1 阶导数和 2 阶导数取其不动点的收敛指数的精确估计.

假设读者熟悉单位圆 $\Delta=\{z: |z|<1\}$ 和全平面 C 上亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论的基本结果和标准符号[1-18],并使用 $\sigma(f)$ 和 $\sigma_2(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长级和超级,用 $\lambda(f)$ 表示 $f(z)$ 的零点收敛指数,用 $\overline{\lambda}(f)$ 表示 $f(z)$ 的不同零点收敛指数.

1 定义与定理

定义 1 单位圆 Δ 内的亚纯函数 $f(z)$ 的级定义为 $\sigma(f)=\overline{\lim\limits_{r\to1^-}}\log^+T(r,f)/\log(1-r)^{-1}$,对于单位圆 Δ 内的解析函数 $f(z)$ 的级定义为

$$\sigma_M(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+\log^+M(r,f)/\log(1-r)^{-1},$$

其中 $M(r,f)$ 是 $f(z)$ 在单位圆 Δ 内的最大模.

定义 2 设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,如果 $\sigma(f)=\overline{\lim\limits_{r\to1^-}}T(r,f)/\log(1-r)^{-1}=\infty$,则称 $f(z)$ 是可允许的;反之,若上式不成立,则称 $f(z)$ 是不可允许的.

定义 3 单位圆 Δ 内的亚纯函数 $f(z)$ 的超级定义为 $\sigma_2(f)=\overline{\lim\limits_{r\to1^-}}\log^+\log^+T(r,f)/\log(1-r)^{-1}$.

定义 4 设 $f(z)$ 为单位圆 Δ 内的解析函数,定义

$$\sigma_{M,2}(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+\log^+\log^+M(r,f)/\log(1-r)^{-1}.$$

定义 5 对于单位圆 Δ 内的亚纯函数 $f(z)$ 在 Δ 内的 a-值点($a\in C\cup\{\infty\}$)序列的收敛指数 $\lambda(f-a)$ 定义为

$$\lambda(f-a)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+n(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1},$$

$f(z)$ 在 Δ 内判别的 a-值点($a\in C\cup\{\infty\}$)序列的收敛指数 $\overline{\lambda}(f-a)$ 定义为

$$\overline{\lambda}(f-a)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+\overline{n}(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1}.$$

定义 6 对于单位圆 Δ 内的亚纯函数 $f(z)$ 在 Δ 内的 a-值点($a\in C\cup\{\infty\}$)序列的 2 级收敛指数 $\lambda_2(f-a)$ 定义为

$$\lambda_2(f-a)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+\log^+n(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1},$$

$f(z)$ 在 Δ 内判别的 a-值点($a\in C\cup\{\infty\}$)序列的 2 级收敛指数 $\overline{\lambda}_2(f-a)$ 定义为

$$\overline{\lambda}_2(f-a)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+\log^+\overline{n}(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1}.$$

注 1 对于单位圆 Δ 内的亚纯函数 $f(z)$ 在 Δ 内的 a-值点($a\in C\cup\{\infty\}$)序列的收敛指数 $\lambda(f-a)$ 也可定义为

$$\lambda(f-a)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+N(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1}.$$

$f(z)$ 在 Δ 内判别的 a-值点($a\in C\cup\{\infty\}$)序列的收敛指数 $\overline{\lambda}(f-a)$ 定义为

收稿日期:2013-04-08

基金项目:贵州省科学技术基金(2010GZ43286,2012GZ10526)和贵州省毕节地区科研基金([2011]02)资助项目.

作者简介:金 瑾(1962-),男,贵州大方人,教授,主要从事复分析方向研究.

$$\overline{\lambda}(f-a)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+\overline{N}(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1}.$$

对 Δ 内的亚纯函数 $f(z)$ 在 Δ 内的 a-值点($a\in C\cup\{\infty\}$)序列的 2 级收敛指数 $\lambda_2(f-a)$ 定义为 $\lambda_2(f-a)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+\log^+N(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1}$. $f(z)$ 在 Δ 内判别的 a-值点($a\in C\cup\{\infty\}$)序列的 2 级收敛指数 $\overline{\lambda}_2(f-a)$ 定义为

$$\overline{\lambda}_2(f-a)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+\log^+\overline{N}(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1}.$$

这是由于

$$n\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\log\frac{1+r}{2r}\leqslant\int_r^{r+(1-r)/2}\frac{n(t,(f-a)^{-1})}{t}\mathrm{d}t\leqslant N\left(\frac{1+r}{2},\frac{1}{f-a}\right)\log\frac{1+r}{2r},$$

$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)-N\left(r_0,\frac{1}{f-a}\right)\leqslant\int_{r_0}^{r}\frac{n(t,(f-a)^{-1})}{t}\mathrm{d}t\leqslant n\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\log\frac{r}{r_0},$$

$$\overline{n}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\log\frac{1+r}{2r}\leqslant\int_r^{r+(1-r)/2}\frac{\overline{n}(t,(f-a)^{-1})}{t}\mathrm{d}t\leqslant\overline{N}\left(\frac{1+r}{2},\frac{1}{f-a}\right)\log\frac{1+r}{2r},$$

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)-\overline{N}\left(r_0,\frac{1}{f-a}\right)\leqslant\int_{r_0}^{r}\frac{\overline{n}(t,(f-a)^{-1})}{t}\mathrm{d}t\leqslant\overline{n}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)\log\frac{r}{r_0}.$$

定义 7　设函数 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,则 $f(z)$ 取不动点 z 的收敛指数定义为

$$\lambda(f-z)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+N\left(r,\frac{1}{f-z}\right)/\log\frac{1}{1-r},$$

亚纯函数 $f(z)$ 取不动点 z 的 2 级收敛指数定义为

$$\lambda_2(f-z)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log^+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-z}\right)/\log\frac{1}{1-r}.$$

定理 1　设 $A_0(z)$ 是单位圆 Δ 内的解析函数,$A_1(z),\cdots,A_{k-1}(z)$ 是单位圆 Δ 内的不可允许的解析函数,且

$$\max\{\sigma(A_j)(j=1,2,\cdots,k-1)\}<\sigma(A_0)=\sigma<+\infty,$$

则微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+A_{k-2}f^{(k-2)}+\cdots+A_1f'+A_0f=0 \tag{1}$$

的所有非零解 $f(z)$ 满足

$$\lambda(f-z)=\lambda(f'-z)=\lambda(f''-z)=\sigma_M(f)=+\infty,$$

且

$$\lambda_2(f-z)=\lambda_2(f'-z)=\lambda_2(f''-z)=\sigma_{M,2}(f)=\sigma,$$

其中 z 是 $f(z)$ 的不动点.

2　所需引理

引理 1　设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,k 是自然数,则 $m(r,f^{(k)}(z)/f(z))=S(r,f)$,其中

$$S(r,f)=O(\log^+T(r,f))+O(\log(1-r)^{-1}),$$

$r\notin E,E\subset[0,1)$ 且满足 $\int_E\frac{\mathrm{d}r}{1-r}<+\infty$. 若 $f(z)$ 是有穷级,则 $m\left(r,\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right)=O\left(\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)$.

引理 2　设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的解析函数,则

$$\sigma(f)\leqslant\sigma_M(f)\leqslant\sigma(f)+1.$$

引理 3　设 $A_0(z),A_1(z),\cdots,A_{k-1}(z)$ 是单位圆 Δ 内的解析函数,

$$\max\{\sigma(A_j)(j=1,2,\cdots,k-1)\}\leqslant\sigma(A_0)=\sigma<+\infty,$$

则微分方程(1)的所有不恒为 0 的解 $f(z)$ 满足

$$\sigma(f)=+\infty.$$

引理 4　设 $A_0(z),A_1(z),\cdots,A_{k-1}(z)$ 是单位圆 Δ 内的解析函数,

$$\max\{\sigma(A_j)(j=1,2,\cdots,k-1)\}<\sigma_M(A_0),$$

则微分方程(1)的所有不恒为 0 的解 $f(z)$ 满足

$$\sigma_M(A_0)=\sigma_2(f)\geqslant\sigma(A_0).$$

引理 5　设 $f(z)$ 是单位圆 Δ 内的亚纯函数,则

$$\sigma_2(f)=\sigma_{M,2}(f).$$

引理 6　设 $A_0(z),A_1(z),\cdots,A_{k-1}(z)$ 是单位圆 Δ 内的解析函数,$\max\{\sigma(A_j)(j=1,2,\cdots,k-1)\}<\sigma_M(A_0)=\sigma$,则微分方程(1)的所有不恒为 0 的解 $f(z)$ 满足

$$\sigma_M(f)=+\infty,\sigma_{M,2}(f)=\sigma.$$

证　由已知和引理 2,引理 3 可知 $\sigma_M(f)=+\infty$. 由已知和引理 4,引理 5 可知

$$\sigma_{M,2}(f)=\sigma_2(f)=\sigma_M(A_0)=\sigma.$$

故引理 6 成立.

引理 7　设 $f(z)\not\equiv0$ 是微分方程(1)的解,$g(z)=f(z)-z$,则

$$g^{(k)}+A_{k-1}g^{(k-1)}+A_{k-2}g^{(k-2)}+\cdots+A_1g'+A_0g=-(A_1+A_0z). \tag{2}$$

证　因为 $g(z)=f(z)-z$,则

$$f(z)=g(z)+z,f'=g'+1,f''(z)=g''(z),\cdots,f^{(k-1)}(z)=g^{(k-1)}(z),f^{(k)}(z)=g^{(k)}(z). \tag{3}$$

将(3)式代入方程(1)并整理得

$$g^{(k)}+A_{k-1}g^{(k-1)}+A_{k-2}g^{(k-2)}+\cdots+A_1g'+A_0g=-(A_1+A_0z).$$

故引理7成立.

引理8 设 $f(z)\not\equiv 0$ 是微分方程(1)的解, $w(z)=f'(z)-z$,则

$$w^{(k)}+D_{k-1}w^{(k-1)}+\cdots+D_1w'+D_0w=-(D_1+D_0z),$$

其中 $D_{k-1}(z)=(A_{k-1}-A_0'/A_0)$, $D_{k-j-1}(z)=A_{k-j}'+A_{k-j-1}-A_{k-j}A_0'/A_0(j=1,2,\cdots,k-1)$.

证 将微分方程(1)的两边求导得

$$f^{(k+1)}+A_{k-1}f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-1}(A_{k-j}'+A_{k-j-1})f^{(k-j)}+A_0'f=0, \tag{4}$$

再由微分方程(1)得

$$f=-\frac{1}{A_0}(f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_2f''+A_1f'), \tag{5}$$

将(5)式代入(4)式并整理得

$$f^{(k+1)}+(A_{k-1}-A_0'/A_0)f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-1}(A_{k-j}'+A_{k-j-1}-A_{k-j}A_0'/A_0)f^{(k-j)}=0. \tag{6}$$

又由 $w(z)=f'(z)-z$ 可得

$$f'(z)=w(z)+z, f''=w'+1, f'''(z)=w''(z),\cdots, f^{(k)}(z)=w^{(k-1)}(z), f^{(k+1)}(z)=w^{(k)}(z). \tag{7}$$

将(7)式代入方程(6)并整理得

$$w^{(k)}+(A_{k-1}-A_0'/A_0)w^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-1}(A_{k-j}'+A_{k-j-1}-A_{k-j}A_0'/A_0)w^{(k-j-1)}=-\{(A_2'+A_1-A_2A_0'/A_0)z+(A_1'+A_0-A_1A_0'/A_0)\}.$$

令

$$D_{k-1}(z)=(A_{k-1}-A_0'/A_0), D_{k-j-1}(z)=A_{k-j}'+A_{k-j-1}-A_{k-j}A_0'/A_0(j=1,2,\cdots,k-1),$$

则

$$w^{(k)}+D_{k-1}w^{(k-1)}+\cdots+D_1w'+D_0w=-(D_1+D_0z).$$

故引理8成立.

引理9 设 $f(z)\not\equiv 0$ 是方程(1)的解, $h(z)=f''(z)-z$,则

$$h^{(k)}+H_{k-1}h^{(k-1)}+H_{k-2}h^{(k-2)}+\cdots+H_1h'+H_0h=-(H_1+H_0z),$$

其中

$$\varphi_1(z)=A_1''+2A_0'-A_1A_0''/A_0,$$
$$\varphi_2(z)=A_1'+A_0-A_1A_0'/A_0,$$
$$H_{k-1}=A_{k-1}-\varphi_1/\varphi_2,$$
$$H_{k-2}=2A_{k-1}'+A_{k-1}-A_0''/A_0-\varphi_1(A_{k-1}-A_0'/A_0)/\varphi_2,$$
$$H_{k-j-2}=A_{k-j}''+2A_{k-j-1}'+A_{k-j-2}-A_{k-j}\frac{A_0''}{A_0}-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(A_{k-j}'+A_{k-j-1}-A_{k-j}\frac{A_0'}{A_0}\right)(j=1,2,\cdots,k-3).$$

证 对微分方程(4)两边求导并整理得

$$f^{(k+2)}+A_{k-1}f^{(k+1)}+(2A_{k-1}'+A_{k-1})f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_{k-j}''+2A_{k-j-1}'+A_{k-j-2})f^{(k-j)}+(A_1''+2A_0')f'+A_0''f=0. \tag{8}$$

将(5)式代入微分方程(8)并整理得

$$f^{(k+2)}+A_{k-1}f^{(k+1)}+(2A_{k-1}'+A_{k-1}-A_0''/A_0)f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_{k-j}''+2A_{k-j-1}'+A_{k-j-2}-A_{k-j}A_0''/A_0)f^{(k-j)}+(A_1''+2A_0'-A_1A_0''/A_0)f'=0. \tag{9}$$

令

$$\varphi_1(z)=A_1''+2A_0'-A_1A_0''/A_0,\quad \varphi_2(z)=A_1'+A_0-A_1A_0'/A_0. \tag{10}$$

由(10)式和微分方程(6)可得

$$f'=-\frac{1}{\varphi_2}\left\{f^{(k+1)}+\left(A_{k-1}-\frac{A_0'}{A_0}\right)f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-2}\left(A_{k-j}'+A_{k-j-1}-A_{k-j}\frac{A_0'}{A_0}\right)f^{(k-j)}\right., \tag{11}$$

将(11)式代入微分方程(9)并整理得

$$f^{(k+2)}+\left(A_{k-1}-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)f^{(k+1)}+\left(2A_{k-1}'+A_{k-1}-\frac{A_0''}{A_0}-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(A_{k-1}-\frac{A_0'}{A_0}\right)\right)f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-2}\left(A_{k-j}''+2A_{k-j-1}'+A_{k-j-2}-A_{k-j}\frac{A_0''}{A_0}-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(A_{k-j}'+A_{k-j-1}-A_{k-j}\frac{A_0'}{A_0}\right)\right)f^{(k-j)}=0. \tag{12}$$

令

$$H_{k-1}=A_{k-1}-\frac{\varphi_1}{\varphi_2},$$
$$H_{k-2}=2A_{k-1}'+A_{k-1}-\frac{A_0''}{A_0}-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(A_{k-1}-\frac{A_0'}{A_0}\right),$$
$$H_{k-j-2}=A_{k-j}''+2A_{k-j-1}'+A_{k-j-2}-A_{k-j}\frac{A_0''}{A_0}-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(A_{k-j}'+A_{k-j-1}-A_{k-j}\frac{A_0'}{A_0}\right)(j=1,2,\cdots,k-2). \tag{13}$$

将(13)式代入微分方程(12)并整理得

$$f^{(k+2)}+H_{k-1}f^{(k+1)}+H_{k-2}f^{(k+1)}+\cdots+H_1f'''+H_0f''=0. \tag{14}$$

又由 $h(z)=f''-z$,则

$$f''=h+z, f'''=h'+1, f^{(4)}=h'',\cdots, f^{(k+1)}=h^{(k-1)}, f^{(k+2)}=h^{(k)}, \tag{15}$$

将(15) 式代入微分方程(14) 并整理得

$$h^{(k)}+H_{k-1}h^{(k-1)}+H_{k-2}h^{(k-2)}+\cdots+H_1h'+H_0h=-(H_1+H_0z).$$

故引理 9 成立.

3　定理的证明

定理 1 的证明　设 $f(z)\not\equiv 0$ 是方程(1) 在单位圆 Δ 内的解,由引理 6 得

$$\sigma_M(f)=+\infty, \sigma_{M,2}(f)=\sigma.$$

令 $g(z)=f(z)-z, w(z)=f'(z)-z, h(z)=f''(z)-z$,则由文献[6]可得 $f(z), f'(z), f''(z)$ 分别取不动点 z 的点分别是 $g(z), w(z), h(z)$ 的零点,且有

$$\sigma_M(g)=\sigma_M(f-z)=\sigma(f'-z)=\sigma(f''-z)=\sigma_M(f)=\sigma_M(w)=\sigma_M(h),$$

$$\lambda(f-z)=\lambda(f'-z)=\lambda(f''-z)=\overline{\lambda}(f)=\overline{\lambda}(g)=\overline{\lambda}(w)=\overline{\lambda}(h),$$

$$\lambda_2(f-z)=\lambda_2(f'-z)=\lambda_2(f''-z)=\overline{\lambda}_2(g)=\overline{\lambda}_2(w)=\overline{\lambda}_2(h),$$

$$\sigma_{M,2}(f-z)=\sigma_{M,2}(f'-z)=\sigma_{M,2}(f''-z)=\sigma_{M,2}(g)=\sigma_{M,2}(w)=\sigma_{M,2}(h)=\sigma_{M,2}(f).$$

因为 $A_0(z)$ 是单位圆 Δ 内的可允许的解析函数,$A_1(z),\cdots,A_{k-1}(z)$ 都是单位圆 Δ 内的不可允许的解析函数. 故 $A_1+A_0z\not\equiv 0$. 若不然就有 $A_1+A_0z=0$,则 $A_0=-A_1/z$. 由引理 1 知

$$m(r,A_0)\leqslant m(r,1/z)+m(r,A_1)=O\left(\log^+(1-r)^{-1}\right).$$

这与 $A_0(z)$ 是单位圆 Δ 内的可允许的解析函数,$A_1(z),\cdots,A_{k-1}(z)$ 都是单位圆 Δ 内的不可允许的解析函数矛盾. 故 $A_1+A_0z\not\equiv 0$. 同理可证

$$D_1+D_0z\not\equiv 0, H_1+H_0z\not\equiv 0.$$

由引理 7 的(2) 式可知,$g(z)$ 的阶数大于 k 的零点都是 $A_1(z)+A_0(z)z$ 的零点,故有

$$N\left(r,\frac{1}{g}\right)\leqslant k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{A_1+A_0z}\right).$$

同理由引理 8 和引理 9 可得

$$N\left(r,\frac{1}{w}\right)\leqslant k\overline{N}\left(r,\frac{1}{w}\right)+N\left(r,\frac{1}{D_1+D_0z}\right),$$

$$N\left(r,\frac{1}{h}\right)\leqslant k\overline{N}\left(r,\frac{1}{h}\right)+N\left(r,\frac{1}{H_1+H_0z}\right).$$

另一方面,由引理 7 ~ 引理 9 可得

$$\frac{1}{A_1+A_0z}\left(-\frac{g^{(n)}}{g}-A_{n-1}\frac{g^{(n-1)}}{g}-\cdots-A_1\frac{g'}{g}-A_0\right)=\frac{1}{g},$$

$$\frac{1}{D_1+D_0z}\left(-\frac{w^{(k)}}{w}-D_{k-1}\frac{w^{(k-1)}}{w}-\cdots-D_1\frac{w'}{w}-D_0\right)=\frac{1}{w},$$

$$\frac{1}{H_1+H_0z}\left(-\frac{h^{(k)}}{h}-H_{k-1}\frac{h^{(k-1)}}{h}-\cdots-H_1\frac{h'}{h}-H_0\right)=\frac{1}{h}.$$

所以

$$m\left(r,\frac{1}{g}\right)\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}O(m(r,A_j))+O(m(r,z))+O(\log^+T(r,g))+O\left(\log^+\frac{1}{1-r}\right),$$

$$m\left(r,\frac{1}{w}\right)\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}O(m(r,D_j))+O(m(r,z))+O(\log^+T(r,w))+O\left(\log^+\frac{1}{1-r}\right),$$

$$m\left(r,\frac{1}{h}\right)\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}O(m(r,H_j))+O(m(r,z))+O(\log^+T(r,h))+O\left(\log^+\frac{1}{1-r}\right),$$

其中 $r\notin E\subset[0,1)$,$\int_E\frac{\mathrm{d}r}{1-r}<\infty$. 所以 $\forall\varepsilon>0$,存在正常数 C,使得

$$T(r,g)=T\left(r,\frac{1}{g}\right)+O(1)\leqslant k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+O(m(r,\varphi))+C\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma+\varepsilon},$$

$$T(r,w)=T\left(r,\frac{1}{w}\right)+O(1)\leqslant k\overline{N}\left(r,\frac{1}{w}\right)+O(m(r,\varphi))+C\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma+\varepsilon},$$

$$T(r,h)=T\left(r,\frac{1}{h}\right)+O(1)\leqslant k\overline{N}\left(r,\frac{1}{h}\right)+O(m(r,\varphi))+C\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma+\varepsilon}.$$

又 z 是 $f(z)$ 的不动点,因此微分方程(1) 的所有非零的解 $f(z)$ 满足

$$\lambda(f-z)=\lambda(f'-z)=\lambda(f''-z)=\sigma_M(f)=+\infty,$$

$$\lambda_2(f-z)=\lambda_2(f'-z)=\lambda_2(f''-z)=\sigma_{M,2}(f)=\sigma.$$

4　参考文献

[1] Heittokangas J. On complex differential equations in the unit disc[J]. Ann Acad Sci Fenn Math Diss,2000,122: 1-54.
[2] Tsuji M. Potential theory in modern function theory[M]. 2nd ed. New York: Chelsea Pub Co,1975.
[3] 陈宗煊. 一类单位圆内微分方程解的性质[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2002,26(3): 189-190,199.
[4] 王丽,陈宗煊. 单位圆内高阶微分方程解的一些结果

[J]. 华南师范大学学报:自然科学版,2007,39(3):8-13.

[5] Heittokangas J,Korhonen R,Rättyä J. Growth estimates for solutions of linear complex differential equations [J]. Ann Acad Sci Femm Math,2004,29(1):233-246.

[6] 甘会林,向子贵. 单位圆内二阶线性微分方程的解与小函数的关系 [J]. 数学的实践与认识,2010,40(8):191-195.

[7] 曹廷彬,仪洪勋. 关于单位圆内解析系数的二阶线性微分方程的复振荡 [J]. 数学年刊,2007,28A(5):719-732.

[8] Chen Zongxuan,Shon K H. The growth of solutions of differential equations with coefficients of small growth in the disc [J]. J Math Anal Appl,2004,297(1):285-304.

[9] Cao Tingbin,Yi Hongxun. The growth of solutions of linear differential equations with coefficients of iterated order in the unit disc [J]. Math Anal Appl,2006,319(1):278-294.

[10] 李叶舟. 单位圆盘上二阶微分方程解的增长性 [J]. 纯粹数学与应用数学,2002,18(4):295-300.

[11] 曹廷彬,仪洪勋. 关于单位圆内解析系数的线性微分方程的复振荡理论 [J]. 数学物理学报,2008,28A(6):1046-1057.

[12] 陈宗煊,孙光镐. 一类二阶微分方程的解和小函数的关系 [J]. 数学年刊,2006,27A(4):431-442.

[13] 金瑾. 一类高阶齐次微分方程解与其小函数的增长性 [J]. 高校应用数学学报,2013,28(1):43-50.

[14] 金瑾. 关于一类高阶齐次线性微分方程解的增长性 [J]. 中山大学学报:自然科学版,2013,52(1):51-54.

[15] 金瑾. 高阶复微分方程解的超级的角域分布 [J]. 数学的实践与认识,2008,38(12):178-187.

[16] 金瑾,石宁生. 一类微分方程的解及其解的导数与不动点的关系 [J]. 数学的实践与认识,2011,41(22):185-190.

[17] 金瑾. 一类高阶齐次线性微分方程亚纯解的超级及其不动点 [J]. 华中师范大学报:自然科学版,2011,45(1):18-22.

[18] 金瑾. 高阶线性微分方程解与其小函数的关系 [J]. 理论数学,2012,2(3):156-163.

The Research on Solutions of Higher Order Homogeneous Linear Differential Equations and Fixed Points in the Unit Disc

JIN Jin

(Department of Mathematics,Bijie University,Bijie Guizhou 551700,China)

Abstract: The relation between solutions of second order homogeneous linear differential equations whose coefficients are analytic functions in the unit disc and their fixed points has been investigated,and the precise estimate is obtained.

Key words: unit disc; higher order linear differential equations; fixed points; analytic function; exponent of convergence

(责任编辑:王金莲)