

文章编号: 1000-5862(2013)04-0411-05

求解3维泊松方程的一种新方法

陈建华, 赵飞, 葛永斌*

(宁夏大学数学计算机学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 采用截断误差修正方法, 改进了3维泊松方程的传统中心差分格式. 首先通过限制算子估算出了粗网格上的截断误差, 然后结合插值算子, 将其还原到细网格上, 修正原差分方程, 得到了具有4阶精度的新格式. 该方法不但继承了传统中心差分格式计算板型简单的优点, 而且具有较高的精度, 是一种提高低阶格式精度的新方法. 最后通过数值实验, 验证了该方法的精确性和优越性.

关键词: 3维泊松方程; 截断误差修正; 插值算子; 限制算子; 中心差分格式

中图分类号: O 241.82

文献标志码: A

0 引言

泊松方程是一种重要的偏微分方程. 在数学、物理和工程领域中有着极其广泛的应用. 近年来, 学者对其数值解法的研究一直没有停止过. 传统的中心差分格式虽然使用较少的网格点, 但其只有2阶计算精度. 因此发展高精度且高效的求解方法, 已经成为研究的主要趋势.

文献[1]提出了2维泊松方程的9点优化差分方法. 文献[2]建立了1组3维泊松方程的高阶紧致差分格式, 包括19点计算板型的4阶紧致格式和27点计算板型的6阶紧致格式. 文献[3]采用3次样条插值法, 得到了2维泊松方程4阶精度的差分格式. 文献[4]基于Hermit插值的基本思想, 利用待定系数法提出了求解2维泊松方程的高阶紧致差分方法. 文献[5]采用待定系数法和对称性, 得到了2维泊松方程的高阶紧致差分格式. 文献[6]利用对称性和微分算子的推导方法, 得到数值求解3维泊松方程的4阶和6阶精度紧致差分格式. 文献[7]针对3维Helmholtz方程提出了2个新的高阶紧致差分格式. 文献[8]通过解的线性叠加原理, 得到了求解泊松方程的2步预估校正格式. 文献[9]通过构造紧致格式的修正项, 得到了非均匀网格上的求

解泊松方程的紧致修正法. 上述方法, 虽然都起到了提高精度的作用, 但是差分格式较为复杂, 编程困难不易实现. 文献[10]提出了非均匀网格上的数值求解泊松方程的差分方法.

本文通过改进3维泊松方程传统的中心差分格式(CDS)^[11-20]来提高格式的计算精度. 在求解中还是应用传统的7点计算板型, 通过插值算子和限制算子的使用反复估算截断误差, 进而修正差分方程. 在不用增加网格节点数的情况下, 使计算达到4阶精度.

为此, 本文考虑如下3维Poisson方程的Dirichlet边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega, \\ u(x, y, z) = g(x, y, z), & (x, y, z) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 Ω 为求解区域, $\partial\Omega$ 为边界区域, $f(x, y, z)$ 和 $g(x, y, z)$ 为已知函数, $u(x, y, z)$ 为待求函数. 假设它们均充分光滑.

1 中心差分格式及误差分析

现取计算区域为 $[0, l_x] \times [0, l_y] \times [0, l_z]$, 将区间 $[0, l_x]$ 作 N_x 等分, 记 $h_x = l_x/N_x$, $x_i = ih_x$, $0 \leq i \leq N_x$; 将区间 $[0, l_y]$ 作 N_y 等分, 记 $h_y = l_y/N_y$, $y_j = jh_y$,

收稿日期: 2013-04-15

基金项目: 国家自然科学基金(11061025), 霍英东教育基金会高等院校青年教师基金(121105)和宁夏自然科学基金(NZ12123)资助项目.

通信作者: 葛永斌(1975-), 男, 宁夏青铜峡人, 教授, 博士, 主要从事偏微分方程数值解和计算流体力学的研究.

$0 \leq j \leq N_y$; 将区间 $[0, l_z]$ 作 N_z 等分, 记 $h_z = l_z/N_z$, $z_k = kh_z$, $0 \leq k \leq N_z$, 其中 h_x , h_y 和 h_z 分别为 x , y 和 z 方向的网格步长. 中心差分格式(CDS)可表示为

$$\frac{u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}}{h_y^2} + \frac{u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1}}{h_z^2} + \tau_{i,j,k} = f_{i,j,k}, \quad (2)$$

其中 $\tau_{i,j,k} = -h^2 [\partial^4 u / \partial x^4 + \partial^4 u / \partial y^4 + \partial^4 u / \partial z^4] / 12 + O(h_x^4 + h_y^4 + h_z^4)$.

因此 CDS 的精度只有 $O(h^2)$. 在继承 CDS 原有的简单 7 点计算板型的基础上, 为提高格式精度, 本文提出截断误差修正方法. 首先利用传统 CDS 计算出细网格上的 $u_{i,j,k}^h$, 结合限制算子求出粗网格上的 $u_{i,j,k}^{2h}$, 再利用 CDS 估算出粗网格上的截断误差 $\tau_{i,j,k}^{2h}$, 然后结合插值算子求出细网格上的截断误差 $\tau_{i,j,k}^h$, 最后通过计算出的截断误差 $\tau_{i,j,k}^h$ 对 CDS 进行修正, 得到了具有 4 阶精度的新格式.

2 截断误差修正方法

称以 h 为步长的求解区域为细网格区域, 记为 Ω^h ; 称以 $2h$ 为步长的求解区域为粗网格区域, 记为 Ω^{2h} . 限制算子 $I_h^{2h}: r_{i_2,j_2,k_2}^{2h} = r_{i_1,j_1,k_1}^h$. 插值算子 $I_{2h}^h: r^h(0, 0, \rho) = r^{2h}(0, 0, \rho)$. 在 xy 平面上做插值, 当 k 从 0 变化到 N_z 时, 即可实现对全部网格点进行插值.

当 $z=0$ 时,

$$r^h(i_1-1, 0, 0) = \frac{1}{2} [r^{2h}(i_2-1, 0, 0) + r^{2h}(i_2, 0, 0)],$$

$$r^h(i_1, 0, 0) = r^{2h}(i_2, 0, 0),$$

$$r^h(0, j_1-1, 0) = \frac{1}{2} [r^{2h}(0, j_2-1, 0) + r^{2h}(0, j_2, 0)],$$

$$r^h(0, j_1, 0) = r^{2h}(0, j_2, 0),$$

$$r^h(i_1-1, j_1-1, 0) = \frac{1}{4} [r^{2h}(i_2-1, j_2-1, 0) + r^{2h}(i_2-1, j_2, 0) + r^{2h}(i_2, j_2-1, 0) + r^{2h}(i_2, j_2, 0)],$$

$$r^h(i_1, j_1-1, 0) = \frac{1}{4} [r^{2h}(i_2, j_2-1, 0) + r^{2h}(i_2, j_2, 0)],$$

$$r^h(i_1-1, j_1, 0) = \frac{1}{2} [r^{2h}(i_2-1, j_2-1, 0) + r^{2h}(i_2-1, j_2, 0)],$$

$$r^h(i_1, j_1, 0) = r^{2h}(i_2, j_2, 0).$$

(i) 当 k 为偶数时,

$$r^h(0, 0, k_1) = r^{2h}(0, 0, k_2),$$

$$r^h(i_1-1, 0, k_1) = \frac{1}{2} [r^{2h}(i_2-1, 0, k_2) + r^{2h}(i_2, 0, k_2)],$$

$$r^h(i_1, 0, k_1) = r^{2h}(i_2, 0, k_2),$$

$$r^h(0, j_1-1, k_1) = \frac{1}{2} [r^{2h}(0, j_2-1, k_2) + r^{2h}(0, j_2, k_2)],$$

$$r^h(0, j_1, k_1) = r^{2h}(0, j_2, k_2),$$

$$r^h(i_1-1, j_1-1, k_1) = \frac{1}{4} [r^{2h}(i_2-1, j_2-1, k_2) + r^{2h}(i_2-1, j_2, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2-1, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2, k_2)],$$

$$r^h(i_1, j_1-1, k_1) = \frac{1}{2} [r^{2h}(i_2, j_2-1, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2, k_2)],$$

$$r^h(i_1-1, j_1, k_1) = \frac{1}{2} [r^{2h}(i_2-1, j_2, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2-1, k_2)],$$

$$r^h(i_1, j_1, k_1) = r^{2h}(i_2, j_2, k_2).$$

(ii) 当 k 为奇数时,

$$r^h(0, 0, k_1-1) = \frac{1}{2} [r^{2h}(0, 0, k_2-1) + r^{2h}(0, 0, k_2)],$$

$$r^h(i_1-1, 0, k_1-1) = \frac{1}{4} [r^{2h}(i_2-1, 0, k_2-1) + r^{2h}(i_2, 0, k_2-1) + r^{2h}(i_2-1, 0, k_2) + r^{2h}(i_2, 0, k_2)],$$

$$r^h(i_1, 0, k_1) = \frac{1}{2} [r^{2h}(i_2, 0, k_2-1) + r^{2h}(i_2, 0, k_2)],$$

$$r^h(0, j_1-1, k_1-1) = \frac{1}{4} [r^{2h}(0, j_2-1, k_2) + r^{2h}(0, j_2, k_2) + r^{2h}(0, j_2-1, k_2-1) + r^{2h}(0, j_2, k_2-1)],$$

$$r^h(0, j_1, k_1-1) = \frac{1}{2} [r^{2h}(0, j_2, k_2-1) + r^{2h}(0, j_2, k_2)],$$

$$r^h(i_1, j_1, k_1-1) = \frac{1}{2} [r^{2h}(i_2, j_2, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2, k_2-1)],$$

$$r^h(i_1-1, j_1, k_1-1) = \frac{1}{4} [r^{2h}(i_2-1, j_2-1, k_2) + r^{2h}(i_2-1, j_2, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2, k_2-1)],$$

$$r^h(i_1, j_1-1, k_1-1) = \frac{1}{4} [r^{2h}(i_2, j_2, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2, k_2-1) + r^{2h}(i_2, j_2-1, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2-1, k_2-1)],$$

$$r^h(i_1-1, j_1-1, k_1-1) = \frac{1}{8} [r^{2h}(i_2-1, j_2-1, k_2) + r^{2h}(i_2-1, j_2, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2, k_2-1) + r^{2h}(i_2, j_2-1, k_2) + r^{2h}(i_2, j_2-1, k_2-1) + r^{2h}(i_2-1, j_2-1, k_2) + r^{2h}(i_2-1, j_2-1, k_2-1)].$$

算法中 $u_{i,j,k}^h, \tau_{i,j,k}^h, f_{i,j,k}^h \in \Omega^h, u_{i,j,k}^{2h}, \tau_{i,j,k}^{2h}, f_{i,j,k}^{2h} \in \Omega^{2h}$, n 表示迭代次数. 算法如下:

步骤 1 通过 (2) 式可采用高斯-塞德尔迭代法, 计算出 $u_{i,j,k}^h$, 当 $n=0$ 时, 令 $\tau_{i,j,k}^h=0$.

步骤 2 利用已计算出的 $u_{i,j,k}^{h,n}$ 结合限制算子 I_h^{2h} 求得 $u_{i_2,j_2,k_2}^{2h,n}$.

步骤 3 利用 CDS 和由步骤 2 得到的 $u_{i_2,j_2,k_2}^{2h,n}$, 计算出 $\tau_{i,j,k}^{2h,n}$ 为

$$\tau_{i,j,k}^{2h,n+1} = f_{i,j,k}^{2h} - \frac{u_{i-1,j,k}^{2h,n} - 2u_{i,j,k}^{2h,n} + u_{i+1,j,k}^{2h,n}}{(2h_x)^2} - \frac{u_{i,j-1,k}^{2h,n} - 2u_{i,j,k}^{2h,n} + u_{i,j+1,k}^{2h,n}}{(2h_y)^2} - \frac{u_{i,j,k-1}^{2h,n} - 2u_{i,j,k}^{2h,n} + u_{i,j,k+1}^{2h,n}}{(2h_z)^2}.$$

步骤 4 用插值算子对细网格上的截断误差进行修正(通过插值算子 I_{2h}^h 和已计算出的 $\tau_{i,j,k}^{2h,n+1}$ 得到 $\tau_{i,j,k}^{h,n+1}$):

$$\tau_{i_1,j_1,k_1}^{h,n+1} = \frac{1}{4} I_{2h}^h \tau_{i_2,j_2,k_2}^{2h,n+1}.$$

步骤 5 通过新得到的 $\tau_{i,j,k}^{h,n+1}$ 对 CDS 进行修正:

$$\frac{u_{i-1,j,k}^{h,n+1} - 2u_{i,j,k}^{h,n+1} + u_{i+1,j,k}^{h,n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1,k}^{h,n+1} - 2u_{i,j,k}^{h,n+1} + u_{i,j+1,k}^{h,n+1}}{h_y^2} + \frac{u_{i,j,k-1}^{h,n+1} - 2u_{i,j,k}^{h,n+1} + u_{i,j,k+1}^{h,n+1}}{h_z^2} + \tau_{i,j,k}^{h,n+1} = f_{i,j,k}^h,$$

这样就可以得到比 CDS 更精确的解 $u_{i,j,k}^{h,n+1}$.

步骤 6 通过迭代法则 $\|\tau^{h,n+1} - \tau^{h,n}\| < \varepsilon$, 判

断迭代是否终止. 若不满足该迭代法则, 则跳至步骤 2, 开始新的循环.

3 数值实验

对于 3 维泊松方程 (1), 为了验证本文方法的精确性和可靠性, 分别采用 CDS 和本文方法, 在求解区域 $0 \leq x, y, z \leq 1$, 取 $\varepsilon = 10^{-10}$, $h = h_x = h_y = h_z$. 考察如下 2 个有精确解的问题, 边界条件由精确解给出.

问题 1 $g(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$, $f(x, y, z) = -3\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$.

问题 2 $g(x, y, z) = \sin(\pi y) \sin(\pi z)$, $x = 0$; $g(x, y, z) = 2\sin(\pi y) \sin(\pi z)$, $x = 1$; $g(x, y, z) = 0$, $y = \{0, 1\}$, $z = \{0, 1\}$. $f(x, y, z) = -3\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$.

问题 2 的精确解为

$$u(x, y, z) = \frac{\sin(\pi y) \sin(\pi z)}{\sinh(\pi \sqrt{2})} [2 \sinh(\pi \sqrt{2} x) + \sinh(\pi \sqrt{2} (1-x))].$$

表 1 问题 1 的数值结果比较

h	CDS			本文方法		
	$\ E\ _{L_\infty}$	$\ E\ _{L_2}$	Rate	$\ E\ _{L_\infty}$	$\ E\ _{L_2}$	Rate
1/4	5.30(-2)	1.87(-2)		1.82(-2)	8.71(-3)	
1/8	1.30(-2)	4.58(-3)	2.03	1.85(-3)	7.06(-4)	3.62
1/16	3.22(-3)	1.14(-3)	2.01	1.33(-4)	4.81(-5)	3.88
1/32	8.04(-4)	2.84(-4)	2.01	8.66(-6)	3.08(-6)	3.97
1/64	2.00(-4)	7.10(-5)	2.00	5.39(-7)	1.91(-7)	4.11

表 2 问题 2 的数值结果比较

h	CDS			本文方法		
	$\ E\ _{L_\infty}$	$\ E\ _{L_2}$	Rate	$\ E\ _{L_\infty}$	$\ E\ _{L_2}$	Rate
1/4	5.82(-2)	2.17(-2)		4.31(-2)	1.50(-2)	
1/8	1.55(-2)	5.88(-3)	1.88	6.42(-3)	1.76(-3)	3.09
1/16	3.94(-3)	1.50(-3)	1.97	6.02(-4)	1.45(-4)	3.60
1/32	9.91(-4)	3.76(-4)	2.00	4.53(-5)	1.03(-5)	3.81
1/64	2.48(-4)	9.41(-5)	2.00	3.20(-6)	6.83(-7)	3.91

表 3 问题 1 与问题 2 的迭代次数和计算时间的比较

h	问题 1				问题 2			
	CDS		本文方法		CDS		本文方法	
	CPU(s)	n	CPU(s)	n	CPU(s)	n	CPU(s)	n
1/4	0.04	39	1.86	46	0.01	38	0.26	46
1/8	0.06	156	7.93	189	0.03	154	0.96	187
1/16	0.65	598	31.7	743	0.64	588	4.70	721
1/32	17.80	2 258	208.70	2 771	17.03	2 212	55.50	2 713
1/64	478.50	8 490	3 426.15	10 347	458.65	8 287	1 416.06	10 104

表 1 和表 2 分别给出了问题 1 和问题 2 取不同的 h , CDS 和本文方法在误差 L_∞ 范数、 L_2 范数和收敛阶 (Rate) 上比较. 其中定义 $\|E\|_{L_\infty} = \max_{i,j,k} |e_{i,j,k}|$,

$\|E\|_{L_2} = \sqrt{h^3 \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} (e_{i,j,k})^2}$, 收敛阶 $\text{Rate} = \ln(\|E(2h)\|_{L_2} / \|E(h)\|_{L_2}) / \ln 2$. 表 3 给出了问题 1 和问题 2 分别对应的 CDS 和本文方法在计算时间和迭代次数上的比较. 由计算结果可以看出, 对于这 2 个问题, 本文方法都达到了 4 阶精度, 明显高于传统 2 阶精度的 CDS. 对于问题 1, 当步长为 $1/16$ 时, 即 $N_x = N_y = N_z = 16$, 本文方法的 L_∞, L_2 误差分别为 $1.33(-4)$ 和 $4.81(-5)$, 而当采用 CDS 步长

为 $1/64$ 时, 即 $N_x = N_y = N_z = 64$, L_∞, L_2 误差分别为 $2.00(-4)$ 和 $7.10(-5)$. 另一方面, 由表 3 可以看出, 采用本文方法只需计算 7.93 s , 189 次就能达到该结果; 而采用传统的 CDS 则需 478.5 s 和 8490 次才能达到同样效果. 因此使用本文方法比 CDS 在时间上节约了近 60 倍, 在计算次数上减少了近 45 倍. 对于问题 2, 计算结果的对比分析也可以得到相关类似的结论.

图 1(a) 和图 1(b) 分别表示问题 1 和问题 2 取不同网格步长对应的 $\log(|TE|)$ 和迭代次数 n 的关系, 可以看出随着计算次数的增加, 估算出的 $\tau_{i,j,k}^h$ 越来越小, 也就是说计算解越来越逼近精确解.

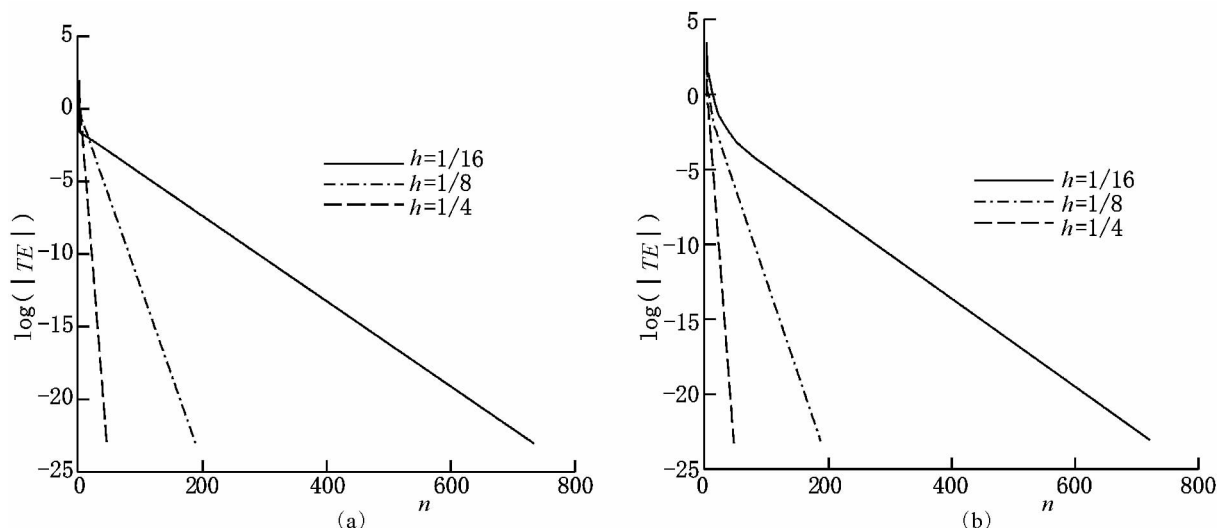


图 1 问题 1(a) 和问题 2(b) 对于不同 h 对应的 $\log(|TE|)$ 和迭代次数 n 的关系

4 结论

本文基于 3 维泊松方程传统的 2 阶中心差分格式, 通过采用插值算子和限制算子, 估算出了细网格上的 $\tau_{i,j,k}^h$, 结合 CDS 得到了具有 4 阶精度的修正格式. 利用本文方法, 在不改变 CDS 的 7 点计算板型的基础上, 把 CDS 的计算精度由 $O(h^2)$ 提高到了 $O(h^4)$. 通过数值算例验证了本文方法的精确性和可行性. 可以看到本文方法既有比 4 阶紧致格式计算板型简单易于编程计算的优点, 又有比传统 CDS 计算精度高、计算时间少和存储空间小的优越性, 是一种行之有效的计算方法. 此外, 采用此方法也可将 4 阶精度格式的计算结果提高到 6 阶精度, 但需要构造更高精度的插值算子, 此项工作将进一步地研究.

5 参考文献

- [1] 杨志峰, 许协庆. 泊松方程的高精度优化差分方法 [J]. 水动力学研究与进展: A 辑, 1992, 7(3): 263-269.
- [2] Spitz W F, Carey G F. A high-order compact formulation for the 3D Poisson equation [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1996, 12(2): 235-243.
- [3] 田振夫. 泊松方程的高精度 3 次样条差分方法 [J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 1996, 32(2): 13-17.
- [4] 田振夫. 求解泊松方程的紧致高阶差分方法 [J]. 西北大学学报: 自然科学版, 1996, 26(2): 109-114.
- [5] 刘明会. 2 维泊松方程的高精度紧致差分方法 [J]. 福建工程学院学报, 2006, 4(3): 373-376.
- [6] 葛永斌, 田振夫, 马红磊. 3 维泊松方程的高精度多重网格解法 [J]. 应用数学, 2006, 19(2): 313-318.
- [7] 曹莹, 孔令华, 王兰, 等. 3 维 Helmholtz 方程的 4 阶紧致有限差分格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(6): 597-599.

- [8] 孙亮,马东军,秦丰华,等. 2维泊松方程的2步预估校正格式[J]. 力学与实践, 2010, 32(1): 37-40.
- [9] 张昆,杨荣. 求解泊松方程的紧致修正法[J]. 水动力学研究与进展: A辑, 2011, 26(4): 422-429.
- [10] 郭锐,黄雪芳,葛永斌. 2维泊松方程非均匀网格上的高精度紧致差分格式[J]. 甘肃联合大学学报: 自然科学版, 2012, 26(2): 10-13.
- [11] 鲁晶津,吴小平, Spitzer K. 三维泊松方程数值模拟的多重网格方法[J]. 地球物理学进展, 2009, 24(1): 154-158.
- [12] 豆桂芳,吴振远,杜艳林. 三维泊松方程的七点差分格式[J]. 工程地球物理学报, 2009, 6(6): 802-805.
- [13] 马月珍,葛永斌,王燕. 三维泊松方程基于 Richardson 外推法的高阶紧致差分方法[J]. 数学实践与认识, 2011, 41(8): 146-152.
- [14] 张昆,杨荣. 求解泊松方程的紧致修正法[J]. 水动力学研究与进展: A辑, 2011, 26(4): 422-429.
- [15] 张勇. 薛定谔-泊松方程组的数值计算和分析及其应用[D]. 北京: 清华大学, 2012.
- [16] 李小纲,袁冬芳,葛永斌. 三维泊松方程基于 Richardson 外推的高精度多重网格解法[J]. 兰州理工大学学报, 2011, 37(6): 131-135.
- [17] 刘建新. 三维泊松方程的一种解析解法[J]. 华北电力学院学报, 1987(2): 64-69.
- [18] 余晓辉. 一类薛定谔-泊松方程解的存在性[J]. 应用数学, 2010, 23(3): 648-652.
- [19] 马廷福,金涛,曹福军,等. 三维双调和方程的高阶紧致差分格式及其多重网格方法[J]. 兰州理工大学学报, 2010, 36(3): 142-147.
- [20] 谭新艳. 非线性薛定谔泊松方程解的存在性[D]. 长沙: 湖南师范大学, 2010.

The New Method to Solve the 3D Poisson Equation

CHEN Jian-hua, ZHAO Fei, GE Yong-bin*

(College of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan Ningxia 750021, China)

Abstract: The truncation error correction method is used to improve the accuracy of the traditional central difference scheme for the 3D Poisson equation. Firstly the truncation error on the coarse grid is estimated by the restriction operator. Then combining with the interpolation operator, the error to the fine grid is restored and the original difference equation is corrected. A new fourth order scheme is derived. The new method inherits the advantage of the central difference scheme, improves its accuracy order and provides a new way to turn a low order scheme into a high order scheme. Numerical experiments for the problems demonstrate the accuracy and superiority of the present method.

Key words: 3D Poisson equation; truncation error correction; interpolation operator; restriction operator; central difference scheme

(责任编辑: 曾剑锋)