文章编号:1000-5862(2013)04-0421-04

关于递归生成加权移位算子正的 2 次亚正规

董延武
(湛江师范学院基础教育学院数学系,广东 湛江 524300)

摘要: 对于递归生成的加权移位算子 $W_{\alpha(x,y)}:\sqrt{y},\sqrt{x},(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})^{\wedge}$,利用无穷维矩阵的正定性得到了其 2-亚正规性和正的 2 次亚正规性,推广了已有的一些结论.

关键词: 算子; 2-亚正规; 2 次亚正规; 正的 2 次亚正规
中图分类号: O 177.1 **文献标志码**: A

0 预备知识

设 H 是一个可分离的无限维复 Hilbert 空间,令 $L(H)$ 表示 H 上有界线性算子代数的全体. 如果 $T^* T = TT^*$,称 T 为亚正规的;如果 $T^* T \geqslant TT^*$,称 T 为次正规的,这里 $T = N|_H$,其中 N 在某 Hilbert 空间 $K \supseteq H$ 上是正规的. 对于算子 $A,B \in L(H)$,令 $[A,B] = AB - BA$. 定义 $L(H)$ 中的 n 元算子 $T = (T_1,\cdots,T_n)$ 是亚正规的,如果算子矩阵 $([T_j^*, T_i])_{i,j=1}^n$ 在直和 $H \oplus \cdots \oplus H$(n 个 H) 上是非负的. 对于 $n \geqslant 1$,且 $T \in L(H)$,T 是 n-亚正规的,如果 $(I,T,\cdots T^n)$ 是亚正规的[1]. $T = (T_1,\cdots,T_n)$ 是弱亚正规的,如果 $\lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \cdots + \lambda_n T^n$ 是亚正规的,这里 $\lambda_i \in \mathbf{C}$,$i = 1,2,\cdots,n$,$\mathbf{C}$ 是复数集合. 算子 T 是弱 n-亚正规的,如果 $(T, T^2,\cdots,T^n)$ 是弱亚正规的[2-3]. 特别地,称弱 2-亚正规为 2 次亚正规,它和 $T + sT^2$ 为亚正规的是等价的,$s \in \mathbf{C}$. 众所周知,次正规的 $\Rightarrow n$-亚正规的 $\Rightarrow$ 弱 n-亚正规的[4-5],这里 $n \geqslant 1$.

令 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $l^2(\mathbf{Z}^+)$ 上的标准正交基,且 $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 1 个正的有界序列. W_α 是定义在 $l^2(\mathbf{Z}^+)$ 上的单侧加权移位算子,即 $W_\alpha e_n = \alpha_n e_{n+1}$,其中 $n = 0,1,2,\cdots$. W_α 的矩可定义为

$$\gamma_0 = 1, \gamma_1 = \alpha_0^2, \gamma_2 = \alpha_0^2\alpha_1^2, \cdots, \gamma_n = \alpha_0^2\cdots\alpha_{n-1}^2, \cdots,$$

众所周知,W_α 是亚正规的当且仅当 $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$,其中 $n = 0,1,2,\cdots$.

对于 $s \in \mathbf{C}$,令 $\boldsymbol{D}(s) = [(W_\alpha + sW_\alpha^2)^*, W_\alpha + sW_\alpha^2]$. 对于 $n \geqslant 0$,令

$$\boldsymbol{D}_n(s) = \boldsymbol{P}_n[(W_\alpha + sW_\alpha^2)^*, W_\alpha + sW_\alpha^2]\boldsymbol{P}_n = \begin{pmatrix} q_0 & \bar{r}_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r_0 & q_1 & \bar{r}_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & q_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & \bar{r}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{n-1} & q_n \end{pmatrix},$$

其中

$$q_k = u_k + |s|^2 v_k, r_k = s\sqrt{w_k}, u_k = \alpha_k^2 - \alpha_{k-1}^2,$$
$$v_k = \alpha_k^2\alpha_{k+1}^2 - \alpha_{k-1}^2\alpha_{k-2}^2, w_k = \alpha_k^2(\alpha_{k+1}^2 - \alpha_{k-1}^2)^2, k \geqslant 0,$$

并且 $\alpha_{-1} = \alpha_{-2} = 0$,$\boldsymbol{P}_n$ 表示由 $e_0,\cdots,e_n$ 生成的子空间上的正交投影. 因此,W_α 是 2 次亚正规的当且仅当 $\forall s \in \mathbf{C}$ 及 $\forall n \geqslant 0$,$\boldsymbol{D}_n(s) \geqslant 0$. 直接计算有

$$d_0 = q_0, d_1 = q_0 q_1 - |r_0|^2,$$
$$d_{n+2} = q_{n+2}d_{n+1} - |r_{n+1}|^2 d_n (n \geqslant 0).$$

显然,d_n 是关于 $t = |s|^2$ 的 $n+1$ 次多项式,其中

$$d_n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} c(n,i)t^i.$$

如果对于所有的 $n,i \geqslant 0, 0 \leqslant i \leqslant n+1$,有 $c(n,i) \geqslant 0$,且对于所有的 $n \geqslant 0$,有 $c(n,n+1) > 0$,那么就说 W_α 是正的 2 次亚正规[6-11]. 并且立即可以得到

$$c(0,0) = u_0, c(0,1) = v_0, c(1,0) = u_1 u_0,$$
$$c(1,1) = u_1 v_0 + u_0 v_1 - w_0, c(1,2) = v_1 v_0,$$
$$c(n+2,i) = u_{n+2}c(n+1,i) + v_{n+2}c(n+1, i-1) - w_{n+1}c(n,i-1), n \geqslant 0, 0 \leqslant i \leqslant n+1.$$

收稿日期:2013-04-20
作者简介:董延武(1979-),男,辽宁营口人,讲师,主要从事线性算子理论的研究.

在单侧加权移位算子中,经常用递归生成的加权移位算子来研究 2 次亚正规移位算子的性质. 这里讨论的单侧加权移位算子是由 3 个权 $0<\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2$ 生成的. 给定 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$,其中 $0<\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2$,则 $\gamma_0=1,\gamma_1=\alpha_0^2,\gamma_2=\alpha_0^2\alpha_1^2,\gamma_3=\alpha_0^2\alpha_1^2\alpha_2^2$. 令

$$\boldsymbol{v}_0=\begin{pmatrix}\gamma_0\\\gamma_1\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix},$$

则向量 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_1$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上是线性无关的,所以存在唯一的实数 φ_0,φ_1 满足

$$\varphi_0\boldsymbol{v}_0+\varphi_1\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2. \tag{1}$$

事实上,

$$\varphi_0=-\frac{\alpha_0^2\alpha_1^2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}{\alpha_1^2-\alpha_0^2},\varphi_1=\frac{\alpha_1^2(\alpha_2^2-\alpha_0^2)}{\alpha_1^2-\alpha_0^2}.$$

而且,由(1)式有 $\gamma_2=\varphi_1\gamma_1+\varphi_0\gamma_0,\gamma_3=\varphi_1\gamma_2+\varphi_0\gamma_1$. 令 $\hat{\gamma}_i=\gamma_i,i=0,1$,且

$$\hat{\gamma}_n=\varphi_0\gamma_{n-2}+\varphi_1\gamma_{n-1}(n\geqslant 2).$$

因此,$\alpha_n^2=\varphi_1+\varphi_0/\alpha_{n-1}^2$.

因为 $\hat{\gamma}_n>0(n\geqslant 0)$,定义 $\hat{\alpha}_n=(\hat{\gamma}_{n+1}/\hat{\gamma}_n)^{1/2}(n\geqslant 0)$,所以当 $0\leqslant n\leqslant 2$ 时,$\hat{\alpha}_n=\alpha_n$. 因此得到1个有界序列 $\hat{\alpha}=\{\hat{\alpha}_i\}_{i=0}^{\infty}$ 和加权移位算子 $W_{\hat{\alpha}}$(或者写成 $W_{(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)^\wedge}$). 易知 $\det\boldsymbol{A}(k-1,2)=0$,这里

$$\boldsymbol{A}(i,j)=\begin{pmatrix}\gamma_i&\cdots&\gamma_{i+j}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\gamma_{i+j}&\cdots&\gamma_{i+2j}\end{pmatrix}.$$

在文献[5]中,Curto-Fialkow 讨论了这样的加权序列 $\alpha:\sqrt{x},(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})^\wedge(0<x\leqslant a<b<c)$,给出了 W_α 是正的 2 次亚正规的 1 个充要条件,那就是 $x\leqslant h_2^+$. 对于递归生成的加权移位算子 $W_{\alpha(x,y)}:\sqrt{y},\sqrt{x},(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})^\wedge$,下面讨论其 2-亚正规性和正的 2 次亚正规性之间的关系.

1 主要结果

定理 1 令 $0<y\leqslant x<a<b<c$,且令 $\alpha(x,y):\sqrt{y},\sqrt{x},(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})^\wedge$ 是 1 个加权序列,设 $H_2(x,y):=\{(x,y):W_{\alpha(x,y)}$ 是 2-亚正规$\}$,$PQH(x,y):=\{(x,y):W_{\alpha(x,y)}$ 是正的 2 次亚正规$\}$,则

(ⅰ) $H_2(x,y)=\left\{(x,y):x\leqslant\dfrac{ab(c-b)}{bc-2ab+a^2},y\leqslant\dfrac{ax(b-a)}{ab-2ax+x^2}\right\}$,

(ⅱ) $PQH(x,y)=\{(x,y):x<h_2^+,y\leqslant\min\{y_3,y_4,f(K,K)\}\}$,其中

$$h_2^+=\frac{a^2b^2c+ab^2(c-a)K+ab(c-b)K^2}{a^3b+ab(c-a)K+(a^2+bc-2ab)K^2},$$

$$y_3=-\frac{x(abx-bcx-a^2b+b^2c+ax^2-bx^2)}{(b-x)(2ax-bx-x^2)},$$

$$y_4=\frac{g_1(x)}{g_2(x)},$$

$g_1(x)=x[ab^3c+a^3b^2-b^2c^3+2ab^2c^2+a^2bc^2-4a^2b^2c+x(a^3b-2a^3c+bc^3-3abc^2+5a^2bc-2a^2b^2)+x^2(2ab^2-abc-2a^2b-ac^2+2a^2c+bc^2-b^2c)]$,

$g_2(x)=2ab^2c^2-b^2c^3-a^2b^2c+x(a^3b+bc^3+b^3c-3ab^2c-a^2bc+a^2b^2)+x^2(6abc-a^3-ab^2-a^2b-2ac^2+a^2c-bc^2-b^2c)+x^3(a^2-ac-bc-ab+b^2+c^2)$,

$$f(K,K)=-\frac{Kx^2-Kbx+K^2x-bx^2-K^2bx}{Kbx+x^3+K^2b-Kx^2-2K^2x+K^2x^2},$$

$$K=-\frac{\varphi_1^2}{2\varphi_0}(\varphi_1+\sqrt{\varphi_1^2+4\varphi_0}),\varphi_1=\frac{b(c-a)}{b-a},$$

$$\varphi_0=\frac{ab(c-b)}{b-a}.$$

证 (ⅰ) 如果 W_α 是关于 $\alpha=\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的加权移位算子,则 W_α 是 2-亚正规的当且仅当

$$\alpha_{n+1}^2(\alpha_{n+2}^2-\alpha_n^2)^2\leqslant(\alpha_{n+1}^2-\alpha_n^2)(\alpha_{n+2}^2\alpha_{n+3}^2-\alpha_{n+1}^2\alpha_n^2)(n\geqslant 0). \tag{2}$$

因此 W_α 是 2-亚正规的当且仅当

$$\alpha_1^2(\alpha_2^2-\alpha_0^2)^2\leqslant(\alpha_1^2-\alpha_0^2)(\alpha_2^2\alpha_3^2-\alpha_1^2\alpha_0^2),$$

$$\alpha_2^2(\alpha_3^2-\alpha_1^2)^2\leqslant(\alpha_2^2-\alpha_1^2)(\alpha_3^2\alpha_4^2-\alpha_2^2\alpha_1^2),$$

即

$$x(a-y)^2\leqslant(x-y)(ab-xy),$$

$$a(b-x)^2\leqslant(a-x)(bc-ax).$$

因此

$$x\leqslant\frac{ab(c-b)}{bc-2ab+a^2}(<a),$$

$$y\leqslant\frac{ax(b-a)}{ab-2ax+x^2}(<x).$$

(ⅱ) 对于加权序列 $\alpha(x,y):\sqrt{y},\sqrt{x},(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})^\wedge$,直接能得到

$c(0,0)=y,c(0,1)=xy,c(1,0)=(x-y)y$,

$c(1,1)=-yx(y-a),c(1,2)=ax^2y$,

$c(2,0)=y(a-x)(x-y)$,

$c(2,1)=ya(y-x)(x-b)$,

$c(2,2)=-(by-ab-xy+x^2)yxa$,

$c(2,3)=(ab-xy)yx^2a$.

这里 $c(2,2)>0$. 事实上,

$$-(by-ab-xy+x^2)=ab-by+xy-x^2=b(a-y)-x(x-y)\geq b(a-y)-x(a-y)=(b-x)(a-y)>0.$$

因此,当 $0\leq n\leq 2,0\leq i\leq n+1$ 时,$c(n,i)\geq 0$.

断言1 $u_2v_3-w_2>0$.

由(2)式,当 $n=1$ 时,显然成立.

断言2 当 $k\geq 3$ 时,$u_kv_{k+1}=w_k$.

事实上,

$$u_kv_{k+1}-w_k=(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}-\alpha_k\alpha_{k-1})-\alpha_k(\alpha_{k+1}-\alpha_{k-1})^2=2\alpha_k\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}-\alpha_k^2\alpha_{k-1}-\alpha_k\alpha_{k+1}^2+\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}-\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}=[\det\boldsymbol{A}(k-1,2)]/(\gamma_{k-1}\cdot\gamma_k\gamma_{k+1})=0.$$

断言3 当 $n\geq 3,0\leq i\leq n+1$ 时,

$$c(n,i)>u_nc(n-1,i)+v_n\cdot\cdots\cdot v_3[v_2c(1,i-n+1)-w_1c(0,i-n+1)].$$

断言3可以通过递归 $n\geq 3$ 来证明. 当 $n=3$, $0\leq i\leq 4$ 时,

$$c(3,i)=u_3c(2,i)+v_3c(2,i-1)-w_2c(1,i-1)=u_3c(2,i)+v_3[u_2c(1,i-1)+v_2c(1,i-2)-w_1c(0,i-2)]-w_2c(1,i-1)=u_3c(2,i)+(v_3u_2-w_2)c(1,i-1)+v_3[v_2c(1,i-2)-w_1c(0,i-2)]>u_3c(2,i)+v_3[v_2c(1,i-2)-w_1c(0,i-2)].$$

当 $n>3$ 时类似地可以证明,由递归假设可以得到断言3.

令 $\rho=v_2c(1,1)-w_1c(0,1)$, $\tau=v_2c(1,0)-w_1c(0,0)$,所以由断言2当 $n\geq 3$ 时,

$$c(n,i)\geq\begin{cases}v_n\cdot\cdots\cdot v_2c(1,2), & i=n+1,\\ u_nc(n-1,n)+v_n\cdot\cdots\cdot v_3\rho, & i=n,\\ u_nc(n-1,n-1)+v_n\cdot\cdots\cdot v_3\tau, & i=n-1,\\ u_nc(n-1,i), & 0\leq i\leq n-2,\end{cases}$$

直接计算得

$$\rho=yxa(x-b)(y-a)\geq 0,$$

$$\tau=-y(aby-abx-2axy+a^2x+x^2y).$$

因为当 $0\leq n\leq 2,0\leq i\leq n+1$ 时,$c(n,i)\geq 0$. 所以当 $n\geq 3$ 时,

$$c(n,n+1)>0,$$

$$c(n,n)>u_nc(n-1,n)+v_n\cdot\cdots\cdot v_3\rho\geq 0,$$

$$c(n,i)=u_n\cdot\cdots\cdot u_{i+2}c(i+1,i)\ (n\geq 3,\ 0\leq i\leq n-2),$$

所以为了分析系数 $c(n,i)$,只需要研究满足 $c(n,n-1)>0(n\geq 3)$ 的 x 值.

现在对于 $n\geq 4$,

$$c(n,n-1)>u_nc(n-1,n-1)+v_n\cdot\cdots\cdot v_3\tau>u_n[u_{n-1}c(n-2,n-1)+v_{n-1}\cdot\cdots\cdot v_3\rho]+v_n\cdot\cdots\cdot v_3\tau,$$

又因为 $c(n-2,n-1)=v_{n-2}\cdot\cdots\cdot v_0$,从而

$$c(n,n-1)>u_n(u_{n-1}v_{n-2}\cdot\cdots\cdot v_0+v_{n-1}\cdot\cdots\cdot v_3\rho)+v_n\cdot\cdots\cdot v_3\tau.$$

如果 $n\geq 5$,可以分解 $v_{n-2}\cdot\cdots\cdot v_3$ 得到

$$c(n,n-1)>v_{n-2}\cdot\cdots\cdot v_3(v_0v_1v_2u_nu_{n-1}+u_nv_{n-1}\rho+v_nv_{n-1}\tau).$$

容易看到 $c(n,n-1)\geq 0(n\geq 3)\Leftrightarrow c(3,2)\geq 0$, $c(4,3)\geq 0$ 和 $A_n\geq 0(n\geq 5)$,其中

$$A_n=v_0v_1v_2u_nu_{n-1}+u_nv_{n-1}\rho+v_nv_{n-1}\tau.$$

当 $n\geq 5$ 时,通过计算 v_0,v_1,v_2,ρ,τ 得

$$A_n=[a^2bx^2u_nu_{n-1}+(a^2bx-a^2x^2)u_nv_{n-1}+(abx-a^2x)v_nv_{n-1}-(ax^3u_nu_{n-1}+(abx-ax^2)u_nv_{n-1}+(ab-2ax+x^2)v_nv_{n-1})y]y.$$

因为 y 的系数总是负的,所以 $A_n\geq 0$ 当且仅当

$$y\leq\Phi_n(x)=[a^2bx^2u_nu_{n-1}+(a^2bx-a^2x^2)\cdot u_nv_{n-1}+(abx-a^2x)v_nv_{n-1}]/[ax^3u_nu_{n-1}+(abx-ax^2)u_nv_{n-1}+(ab-2ax+x^2)v_nv_{n-1}].\tag{3}$$

当 $n\geq 4$ 时,令 $z_n=v_n/u_n(u_n\neq 0)$. 当 $n\geq 5$ 时,把(3)式中右边式子的分子分母同时除以 u_nu_{n-1} 得

$$\Phi_n(x)=[a^2bx^2+(a^2bx-a^2x^2)z_{n-1}+(abx-a^2x)z_nz_{n-1}]/[ax^3+(abx-ax^2)z_{n-1}+(ab-2ax+x^2)z_nz_{n-1}].$$

断言4 $z_n\nearrow K$,这里

$$K=-\varphi_1^2(\varphi_1+\sqrt{\varphi_1^2+4\varphi_0})/(2\varphi_0).$$

令

$$f(z,w)=\frac{a^2bx^2+a^2x(b-x)z+ax(b-a)zw}{ax^3+ax(b-x)z+(ab-2ax+x^2)zw}.$$

断言5 $\inf y_n=f(K,K)$.

因此,W_α 是正的2次亚正规的当且仅当 $y\leq\min\{y_3,y_4,f(K,K)\}$.

2 数值算例

例1 令 $\alpha(x,y):\sqrt{y},\sqrt{x},(\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3})^\wedge$ 是1个加权序列,则

$$H_2(x,y) := \left\{(x,y): x \leqslant \frac{2}{3}, y \leqslant \frac{x}{(x-1)^2+1}\right\},$$

$$PQH(x,y) := \{(x,y): x < h_2^+, y \leqslant f(K,K)\},$$

其中

$$h_2^+ \approx 0.733\,21, y_3 = -\frac{10x-4x^2-x^3}{10x-4x^2+x^3-12},$$

$$y_4 = -\frac{38x-18x^2-x^3}{42x-16x^2+3x^3-48},$$

$$f(K,K) = \frac{2x^2+x(2-x)K+xK^2}{x^3+x(2-x)K+(x^2-2x+2)K^2},$$

$$K = 8\sqrt{2}+16.$$

很容易看到在区间$(0,h_2^+]$上,$y_3 > y_4 > f(K,K)$.

3 参考文献

[1] Curto R,Fialkow L. Recursively generated weighted shifts and the subnormal completion problem II [J]. Integrall Equations and Operator Theory,1994,18(3):369-426.

[2] Exner G,Jung I B,Park S S. Weakly n-hyponormal weighted shifts and their examples [J]. Integral Equations Operator Theory,2006,54(2):215-233.

[3] Curto R. Quadratically polynomially hyponormal weighted shifts [J]. Integral Equations Operator Theory,1990,13(1):49-66.

[4] Curto R. Joint hyponormality: A bridge between hyponormaliy and subnomality [J]. Proc Sym Math,1990,51(1):69-91.

[5] Curto R,Fialkow L. Recursively generated weighted shifts and the subnormal completion problem [J]. Integral Equations and Operator Theory,1993,17(2):202-246.

[6] Exner G,Jung I B,Park D W. Some quadratically hyponormal weighted shifts [J]. Integral Equations and Operator Theory,2008,60(1):13-36.

[7] Jung I B,Park S H,Stochel J. $L(n)$-hyponormality: a missing bridge between subnormality and paranormality [J]. J Aust Math Soc,2010,88(2):193-203.

[8] Jung I B,Park S S. Quadratically hyponormal weighted shifts and their examples [J]. Integral Equations and Operator Theory,2000,36(4):480-498.

[9] Dong Yanwu,Exner G,Jung I B,et al. Quadratically hyponormal recursively generated weighted shifts [J]. Oper Theo Adv Appl,2008,187(1):141-155.

[10] Exner G,Jung I B,Li Chunji. On k-hyperexpansive operators [J]. J Math Anal Appl,2006,323(1):569-582.

[11] Curto R,Jung I B. Quadratically hyponormal weighted shifts with two equal weights [J]. Integral Equations and Operator Theory,2000,37(2):208-231.

On Positively Quadratically Hyponormal of Recursively Generated Weighted Shits

DONG Yan-wu

(School of Mathematics and Computer Science,Fundamental Education College,Zhanjiang Normal University,Zhanjiang Guangdong 524300,China)

Abstract: The 2-hyponormality and positively quadratically hyponormality of recursively generated weighted shift $W_{\alpha(x,y)}$ with $\alpha(x,y):\sqrt{y},\sqrt{x},(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})^{\wedge}$ are considered by using the positivity of in finite dimension matrix,which extend some known results.

Key words: operator; 2-hyponormal; quadratically hyponormal; positively quadratically hyponormal

(责任编辑:曾剑锋)