文章编号:1000-5862(2013)04-0425-03

非负矩阵 Hadamard 积和 M 矩阵 Fan 积特征值的新界值

李 华
(河南城建学院数理系,河南 平顶山 467044)

摘要:把 2 个非负矩阵 Hadamard 积谱半径以及 M 矩阵的 Fan 积的最小特征值的估计推广到多个矩阵,得到新的界值估计式,数值算例表明所得的估计式在一定条件下比现有的估计式更为精确.

关键词:非负矩阵;Hadamard 积;谱半径;M 矩阵;Fan 积
中图分类号:O 151.21 **文献标志码**:A

0 引言

用 $A \geqslant 0(a_{ij} \geqslant 0)$ 表示 A 是非负矩阵,用 $\mathbf{C}^{n\times n}(\mathbf{R}^{n\times n})$ 表示 n 阶复(实)矩阵集,矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 组成的集合为矩阵的谱,记为 $\sigma(A)$. 矩阵 A 的 n 个特征值的模的最大值为矩阵的谱半径,记为 $\rho(A)$. 由 Perron-Frobenius 定理知,若矩阵 A 为非负矩阵,$\rho(A)\in\sigma(A)$,且有非负特征向量 x 与之对应,使得满足 $Ax=\rho(A)x$.

对于 n 阶方阵 A,如果存在置换矩阵 P,使得 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D\end{pmatrix}$,其中 B,D 分别是 k,l 阶方阵,$k\geqslant 1,l\geqslant 1$,则称 A 是可约的,否则称 A 是不可约的.

定义 1[1] 设 $Z^{n\times n}=\{A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n},a_{ij}\leqslant 0,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n\}$,则称 $Z^{n\times n}$ 中的矩阵 A 为 Z 矩阵.

定义 2 设 $A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$,如果 $A=\lambda I-B$,其中 $B\geqslant 0,\lambda\geqslant\rho(B)$,则称矩阵 A 为 M 矩阵. 如果 $\lambda>\rho(B)$,称矩阵 A 为非奇异 M 矩阵. 设 M 矩阵的集合为 $M^{n\times n}$.

定义 3 设 $A\in Z^{n\times n}$,记 $\tau(A)=\min_i\{\mathrm{Re}(\lambda):\lambda\in\sigma(A)\}$,称 $\tau(A)$ 为矩阵 A 的最小特征值.

引理 1 设矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n},x_i>0,i=1,2,\cdots,n$,则矩阵 A 的所有特征值包含在 $G(A)=\bigcup_{i=1}^{n}G_i(A)$ 中,其中

$$G_i(A)=\left\{z:|z-a_{ii}|\leqslant\frac{1}{x_i}\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j\right\}.$$

若矩阵 A 是不可约的 Z 矩阵,则存在正向量 U,V 使得 $AU=\tau(A)U$,$V^{\mathrm{T}}A=\tau(A)V$,其中 U,V 分别称为 A 的右 Perron 特征向量和左 Perron 特征向量.

设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$B=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,称矩阵 $C=A\circ B=(a_{ij}b_{ij})$ 为矩阵 A 与 B 的 Hadamard 积. 令 $r>0$,记 $A^{(r)}=(a_{ij}^{r})$,称 $A^{(r)}$ 为矩阵 A 的 r 次 Hadamard 幂.

设 $A=(a_{ij})\in M^{n\times n}$,$B=(b_{ij})\in M^{n\times n}$,称

$$C=A*B=(c_{ij})=\begin{cases}a_{ii}b_{ii}, & i=j\\ -a_{ij}b_{ij}, & i\neq j\end{cases}$$

为矩阵 A 与 B 的 Fan 积.

记 $A^{[r]}=(d_{ij})(r>0)$ 为矩阵 A 的 r 次 Fan 幂,其中当 $i\neq j$ 时,$d_{ij}=-|a_{ij}|^r$;当 $i=j$ 时,$d_{ii}=a_{ii}^{r}$.

本文在文献[1-10]的基础上分别给出 m 个矩阵 Hadamard 积的谱半径上界和 Fan 积最小特征值下界估计的一个新结果,这些结果比文献[1-2]中的经典结果更接近于 $\rho(A\circ B)$ 的真实值,且包含文献[4-5]中的结果.

1 主要结论

引理 2[11] 设 $x_j=(x_j(1),\cdots,x_j(n))^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,$j\in\{1,2,\cdots,m\}$,若 $P_j>0$,且 $\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{P_j}\geqslant 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}x_j(i)\leqslant\prod_{j=1}^{m}\{\sum_{i=1}^{n}[x_j(i)]^{P_j}\}^{1/P_j}.$$

引理 3 设 P 为非负不可约矩阵,若存在不等

收稿日期:2013-03-20
基金项目:河南省科技计划(112400450212)和河南省教育厅自然科学研究(2011A110002)资助项目.
作者简介:李 华(1978-),女,河南南阳人,讲师,硕士,主要从事数值代数与矩阵谱估计方面的研究.

于0的非负向量 Z,使得 $PZ\le kZ$,则 $\rho(P)\le k$.

定理1 设 A_k 都为 n 阶非负矩阵,$k\in\{1,2,\cdots,m\}$,$P_k>0$,且 $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{P_k}\ge 1$,则

$$\rho(A_1\circ\cdots\circ A_m)\le\max_{1\le i\le n}\{\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)+\prod_{k=1}^{m}[\rho(A_k^{(P_k)})-A_k(i,i)^{P_k}]^{1/P_k}\}.$$

证 当 $n=1$ 时,定理1显然成立.

下面假设 $n\ge 2$. 若 $A_1\circ\cdots\circ A_m$ 为非负不可约矩阵,则 A_k 也不可约,$k\in\{1,2,\cdots,m\}$,$A_k^{(P_k)}$ 也不可约.

设 $u_k^{(P_k)}=(u_k(1)^{P_k},\cdots,u_k(n)^{P_k})>0$ 是 $A_k^{(P_k)}$ 的右Perron特征向量,令 $u_k=(u_k(1),\cdots,u_k(n))>0$,则 $\forall i\in\mathbf{N}$,有

$$A_k^{(P_k)}u_k^{(P_k)}=\rho(A_k^{(P_k)})u_k^{(P_k)},$$

$$A_k(i,i)^{P_k}u_k(i)^{P_k}+\sum_{j\ne i}A_k(i,j)^{P_k}u_k(j)^{P_k}=\rho(A_k^{(P_k)})u_k(i)^{P_k},$$

即

$$\sum_{j\ne i}A_k(i,j)^{P_k}u_k(j)^{P_k}=[\rho(A_k^{(P_k)})-A_k(i,i)^{P_k}]\cdot u_k(i)^{P_k}.$$

令 $C=A_1\circ\cdots\circ A_m$,$Z=u_1\circ\cdots\circ u_m=(Z(1),\cdots,Z(n))^{\mathrm{T}}>0$,则 $Z(i)=\prod_{k=1}^{m}u_k(i)$. 因此有

$$(CZ)_i=\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)Z(i)+\sum_{j\ne i}\prod_{k=1}^{m}A_k(i,j)Z(j)=$$
$$\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)Z(i)+\sum_{j\ne i}\prod_{k=1}^{m}A_k(i,j)u_k(j)\le$$
$$\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)Z(i)+\prod_{k=1}^{m}\Big\{\sum_{j\ne i}[A_k(i,j)u_k(j)]^{P_k}\Big\}^{1/P_k}=$$
$$\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)Z(i)+\prod_{k=1}^{m}\{[\rho(A_k^{(P_k)})-A_k(i,i)^{P_k}]u_k(i)^{P_k}\}^{1/P_k}=$$
$$\{\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)+\prod_{k=1}^{m}[\rho(A_k^{(P_k)})-A_k(i,i)^{P_k}]^{\frac{1}{P_k}}\}Z(i).$$

由引理3知,

$$\rho(A_1\circ\cdots\circ A_m)\le\max_{1\le i\le n}\{\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)+\prod_{k=1}^{m}[\rho(A_k^{(P_k)})-A_k(i,i)^{P_k}]^{1/P_k}\}.$$

若 $A_1\circ\cdots\circ A_m$ 为非负可约矩阵,设 $D=(d_{ij})$ 为置换矩阵,其中 $d_{12}=d_{23}=\cdots=d_{n-1,n}=d_{n1}=1$,其余的 $d_{ij}=0$,显然 D 是不可约矩阵,因此对任何正实数 t,A_k+tD 为非负不可约矩阵. 既然矩阵的特征值是矩阵元素的联系函数[12],因此用 A_k+tD 分别代替 A_k,让 $t\to 0$,由连续性可知上述结果仍然成立.

注1 在定理1中,若令 $m=2$,$p_1=p_2=1$,$A_1=A=(a_{ij})$,$A_2=B=(b_{ij})$,则

$$\rho(A\circ B)\le\max_{1\le i\le n}\{a_{ii}b_{ii}+(\rho(A)-a_{ii})(\rho(B)-b_{ii})\},$$

即此时定理1的结论是文献[4]中的结果.

注2 在定理1中,若令 $m=2$,$p_1=p_2=2$,$A_1=A=(a_{ij})$,$A_2=B=(b_{ij})$,则

$$\rho(A\circ B)\le\max_{1\le i\le n}\{a_{ii}b_{ii}+[(\rho(A\circ A)-a_{ii}^2)(\rho(B\circ B)-b_{ii}^2)]^{1/2}\}.$$

由于

$$[\rho(A\circ A)-a_{ii}^2][\rho(B\circ B)-b_{ii}^2]\le[\sqrt{\rho(A\circ A)\rho(B\circ B)}-a_{ii}b_{ii}]^2,$$

则

$$a_{ii}b_{ii}+[(\rho(A\circ A)-a_{ii}^2)(\rho(B\circ B)-b_{ii}^2)]^{1/2}\le\sqrt{\rho(A\circ A)\rho(B\circ B)}\le\rho(A)\rho(B).$$

从而说明用定理1估计 $\rho(A\circ B)$ 比用 $\rho(A)\rho(B)$ 来估计 $\rho(A\circ B)$ 更为精确.

定理2 设 A_k 都为 n 阶 M 矩阵,$k\in\{1,2,\cdots,m\}$,$P_k>0$,且 $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{P_k}\ge 1$,则

$$\tau(A_1*\cdots*A_m)\ge\min_{1\le i\le n}\Big\{\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)-\prod_{k=1}^{m}[A_k(i,i)^{P_k}-\tau(A_k^{[P_k]})]^{1/P_k}\Big\}.$$

证 当 $n=1$ 时,定理1显然成立.

下面假设 $n\ge 2$. 若 $A_1*\cdots*A_m$ 为不可约矩阵,则 A_k 不可约,$k\in\{1,2,\cdots,m\}$,$A_k^{[P_k]}$ 为不可约矩阵.

设 $v_k^{(P_k)}=(v_k(1)^{P_k},\cdots,v_k(n)^{P_k})>0$ 是 $A_k^{[P_k]}$ 的Perron特征向量,令 $v_k=(v_k(1),\cdots,v_k(n))>0$,则 $\forall i$,有 $A_k^{[P_k]}v_k^{(P_k)}=\tau(A_k^{[P_k]})v_k^{(P_k)}$,即

$$\sum_{j\ne i}|A_k(i,j)^{P_k}|v_k(j)=[A_k(i,i)^{P_k}-\tau(A_k^{[P_k]})]v_k(i).$$

令 $C=A_1*\cdots*A_m$,$Z=v_1\circ\cdots\circ v_m=(Z(1),\cdots,Z(n))^{\mathrm{T}}>0$,则 $Z(i)=\prod_{k=1}^{m}v_k(i)$.

设 $\tau(A_1*\cdots*A_m)=\lambda$,由引理1知,$\exists i(1\le i\le n)$,有

$$\Big|\lambda-\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)\Big|\le\frac{1}{Z(i)}\sum_{j\ne i}\prod_{k=1}^{m}|A_k(i,i)|Z(j),$$

即

$$|\lambda|\ge\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)-\frac{1}{Z(i)}\sum_{j\ne i}\prod_{k=1}^{m}|A_k(i,i)|v_k(j)\ge$$
$$\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)-\frac{1}{Z(i)}\prod_{k=1}^{m}\Big\{\sum_{j\ne i}[|A_k(i,j)|v_k(j)]^{P_k}\Big\}^{1/P_k}=$$
$$\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)-\frac{1}{Z(i)}\prod_{k=1}^{m}\{[A_k(i,i)^{P_k}-\tau(A_k^{[P_k]})]\cdot v_k(i)^{P_k}\}^{1/P_k}=\prod_{k=1}^{m}A_k(i,i)-\prod_{k=1}^{m}[A_k(i,i)^{P_k}-\tau(A_k^{[P_k]})]^{1/P_k},$$

则

$$\tau(\boldsymbol{A}_1 * \cdots * \boldsymbol{A}_m) \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \prod_{k=1}^{m} A_k(i,i) - \prod_{k=1}^{m} \left[A_k(i,i)^{P_k} - \tau(\boldsymbol{A}_k^{[P_k]}) \right]^{1/P_k} \right\}.$$

若 $\boldsymbol{A}_1 * \cdots * \boldsymbol{A}_m$ 为可约矩阵,设 $\boldsymbol{D} = (d_{ij})$ 为置换矩阵,其中 $d_{12} = d_{23} = \cdots = d_{n-1,n} = d_{n1} = 1$,其余的 $d_{ij} = 0$,显然 $\boldsymbol{D}$ 是不可约矩阵,因此对任何正实数 t,$\boldsymbol{A}_k - t\boldsymbol{D}$ 为不可约矩阵. 既然矩阵的特征值是矩阵元素的联系函数,因此用 $A_k - t\boldsymbol{D}$ 分别代替 A_k,让 $t \to 0$,由连续性可知上述结果仍然成立.

2　数值算例

例 1　设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$,估计矩阵 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$ 的谱半径. 结果如下: 在文献 [1] 中,$\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leqslant 120.900\,0$; 在文献 [4] 中,$\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leqslant 75.691\,9$; 在定理 1 中,$p_1 = 2$,$p_2 = 1$,$\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leqslant 75.588\,9$. 实际上,$\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) = 75.570\,9$. 由此可知,定理 1 得到的结果在一定程度上要比以前的结果好.

3　参考文献

[1] Horn R A, Johnson C R. Topics in matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[2] Karlin S, Ost F. Some monotonicity properties of Schur powers of matrices and related inequalities [J]. Lin Alg Appl, 1985, 68(1): 47-65.

[3] Cheng Guanghui, Cheng Xiaoyu, Huang Tingzhu, et al. Some bounds for the spectral radius of the Hadamard product of nonnegative matrices [J]. Applied Mathematics Enotes, 2005(5): 202-209.

[4] Fang Maozhong. Bounds on the eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices [J]. Lin Alg Appl, 2007, 425(1): 7-15.

[5] 杜琨. 矩阵 Hadamard 积和 Fan 积特征值的界 [J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 2008, 9(5): 45-50.

[6] Huang Rong. Some inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices [J]. Lin Alg Appl, 2008, 428(7): 1551-1559.

[7] Liu Qingbin, Chen Guoliang. On two inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices [J]. Lin Alg Appl, 2009, 431(5/6/7): 974-984.

[8] 丁树良. 两个非负定阵的 Hadamard 积的估计 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 1994, 18(3): 212-217.

[9] Li Yaotang, Li Yanyan, Wang Ruiwu, et al. Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices [J]. Lin Alg Appl, 2010, 432(2/3): 536-545.

[10] 周平, 李耀堂. 非负矩阵 Hadamard 积和 M-矩阵 Fan 积的特征值界的估计 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2012, 28(6): 826-833.

[11] Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[12] Li Houbiao, Huang Tingzhu, Shen Shuqian, et al. Lower bounds for the minimum eigenvalue of Hadamard product of an M-matrix and its inverse [J]. Lin Alg Appl, 2007, 420(1): 235-247.

The New Bounds on the Eigenvalues of the Hadamard Product of Nonnegative Matrices and the Fan Product of M Matrices

LI Hua

(Department of Mathematics and Physics, Henan University of Urban Construction, Pingdingshan Henan 467044, China)

Abstract: A new upper bound of spectral radius of Hadamard product and a new bound for the minimum eigenvalue of Fan product of more matrices are obtained on the basis of two matrices. Numerical examples show that these new bounds are more accurate than several known estimating formulas.

Key words: nonnegative matrices; Hadamard product; spectral radius; M matrices; Fan product

(责任编辑: 曾剑锋)