第 37 卷 第 4 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 4
2013 年 7 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2013

文章编号:1000-5862(2013)04-0432-04

半 E-预不变凸模糊数值函数的次微分

张 贞,刘学文*

(重庆师范大学数学学院,重庆 401331)

摘要:基于模糊数空间的一种新序关系,引入了新的半 E-预不变凸模糊数值函数的次微分的定义,并利用次微分映射的最大循环单调性刻画了半 E-预不变模糊数值函数的次微分.

关键词:模糊数;半 E-预不变凸性;次微分

中图分类号:O 159 **文献标志码**:A

0 预备知识

自从 Zadeh 提出模糊集的概念之后,由于其在各个领域的广泛应用而引起了许多学者的研究兴趣,这使得模糊集理论得到了大量推广.数学规划中经常需要应用经典凸分析理论.然而,与许多系统中所含参数具有不确定性相类似,在优化理论中,由于约束条件或目标函数中参数常常具有不确定性,所以对模糊凸分析理论的研究具有重要意义.关于模糊映射的凸性、拟凸性及 B-凸性已有文献进行研究[1-3];文献[4]分析了预不变凸函数,文献[5]给出了 E-凸集和 E-凸函数的概念.文献[6]中提出了从 $\mathbf{R}^n$ 到 E^1 的模糊映射下的 H-可导、可微、次可微的概念,讨论了在这样的定义下的模糊函数相关性质的刻画.文献[7]中提出了从 $\mathbf{R}^n$ 映到模糊数集的模糊伪凸、模糊不变凸、模糊伪不变凸和模糊预不变凸的概念,并且从王贵祥等提出的从 $\mathbf{R}^n$ 到 E^1 的模糊映射的 H-可导性和可微性出发重新提出了模糊扩张的方向导数、次梯度和次可微的概念,并讨论了模糊预变分不等式和模糊向量优化问题的相关性质.近年来,许多学者对模糊广义凸映射的性质和模糊广义凸规划问题的最优性条件、对偶理论以及鞍点准则等有着较为深入的研究,但是关于半 E-预不变凸模糊数值函数的相关文献不多.本文基于一种新序关系定义了半 E-预不变凸模糊数值函数的次微分,并且利用次微分映射的最大循环单调性刻画了半 E-预不变凸模糊数值函数的次微分.

为了得到本文主要结果,首先引进下面的定义.

定义 1[8] 若模糊集 u:$\mathbf{R}\to[0,1]$ 是上半连续的、凸的、正规的且支撑集紧,则称 u 为模糊数.记 $\mathscr{F}$ 为 $\mathbf{R}$ 上所有模糊数组成的集合.

设模糊数 u 的水平截集为有界闭区间 $[u]^{\alpha}=[u^-(\alpha),u^+(\alpha)]$.由文献[8]知,$u^-(\alpha)$ 和 $u^+(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上分别是非减的函数和非增的函数,且它们均为有界的,在 $\alpha=0$ 处右连续,在 $(0,1]$ 上左连续且 $u^-(1)\leqslant u^+(1)$.反之,若函数 $u^-(\alpha)$ 和 $u^+(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上满足上述条件,则存在 1 个 $u\in\mathscr{F}$,使得 $[u]^{\alpha}=[u^-(\alpha),u^+(\alpha)]$,$\alpha\in[0,1]$.记 $V=\{(u^-(\alpha),u^+(\alpha),\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant1,u^-,u^+:I\to\mathbf{R}$ 是有界函数$\}$;$\hat{V}=\{(u^-(\alpha),u^+(\alpha),\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant1,u^-(\alpha),u^+(\alpha)$ 是 Lebesgue 可积的$\}$;$\mathscr{F}=\{(u^-(\alpha),u^+(\alpha),\alpha)\mid 0\leqslant\alpha\leqslant1,u^-(\alpha)$ 单调不减,$u^+(\alpha)$ 单调不增,均左连续且在 $\alpha=0$ 处右连续$\}$.

定义 2 在 V 中定义和与数乘运算为

$$(u^-(\alpha),u^+(\alpha),\alpha)+(v^-(\alpha),v^+(\alpha),\alpha)=(u^-(\alpha)+v^-(\alpha),u^+(\alpha)+v^+(\alpha),\alpha),$$

$$k(u^-(\alpha),u^+(\alpha),\alpha)=(ku^-(\alpha),ku^+(\alpha),\alpha),$$

对于 $u_i\in\hat{V},u_i=\{(u_i^-(\alpha),u_i^+(\alpha))\mid\alpha\in[0,1]\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.称模糊数 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 为 n 维模糊向量,记所有 n 维模糊向量的集合为 V^n,且定义 $\mathbf{R}^n\times V^n$ 的直积为

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\rangle=x_1u_1+x_2u_2+\cdots+x_nu_n,$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in V^n$.

收稿日期:2013-04-25

基金项目:国家自然科学基金(11001289)和重庆市教委科研(KJ100608)资助项目.

通信作者:刘学文(1967-),男,重庆石柱人,副教授,主要从事运筹学与控制论方面的研究.

定义3[9]　设 $u,v \in \hat{V}$,$u = \{(u^-(\alpha),u^+(\alpha),\alpha) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$,$v = \{(v^-(\alpha),v^+(\alpha),\alpha) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$. 称 $u \leqslant v$,如果 $\int_0^1 f(\alpha)(u^-(\alpha)+u^+(\alpha))\mathrm{d}\alpha \leqslant \int_0^1 f(\alpha)(v^-(\alpha)+v^+(\alpha))\mathrm{d}\alpha$.

对于模糊数值函数

$$F(x) = \{(F^-(\alpha),F^+(\alpha),\alpha) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\},$$

记 $T_{F(x)} = \int_0^1 f(\alpha)(F^-(\alpha)+F^+(\alpha))\mathrm{d}\alpha$,其中 f 为 $[0,1]$ 上非负的单调不减函数,满足 $f(0) = 1$,且 $\int_0^1 f(\alpha)\mathrm{d}\alpha = 1/2$. f 可以认为是权重函数,单调不减性确保了水平截集越接近模糊数的核,在确定序关系中所起的作用越大. 特别地,文献[5]中的序关系即为当 $f(\alpha) = \alpha$ 时的情形.

定义4　对所有的 $x,y \in S$,$\lambda \in [0,1]$,且 $y+\lambda\eta(x,y) \in S$,则称 $S(\subset \mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta: S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集.

定义5[10-11]　对所有 $x,y \in S$,$\lambda \in [0,1]$,且 $\eta(x,y)+\eta(y,x) = 0$,则称 $\eta: S\times S\to\mathbf{R}^n$ 为非对称映射. 特别地,当 $\eta(x,y) = x-y$ 时,S 即为一般凸集.

定义6[12]　设 $S(\subset \mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta: S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,若 $\forall x,y \in S$ 及 $\lambda \in [0,1]$,存在映射 $E: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 有 $E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)) \in S$,则称 S 为 E-不凸集.

显然,由定义6可知 $E(S) \subseteq S$,当 $E(x) = x$ 且 $E(y) = y$ 时,E-不凸集为不变凸集.

定义7　设 $F: S\to F$ 为模糊数值函数,$S(\subset \mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta: S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,若 $\forall x,y \in S$ 及 $\lambda \in [0,1]$,存在映射 $E: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 有

$$E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)) \in S,$$

$$T_{F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))} \leqslant \lambda T_{F(x)} + (1-\lambda)T_{F(y)},$$

则称 F 为半 E-预不变凸模糊数值函数.

注1　当 $E(x) = x$ 且 $E(y) = y$ 时,半 E-预不变凸模糊数值函数退化成预不变凸模糊数值函数.

定义8　半 E-预不变凸模糊数值函数 $F: S\to F$,若 $\forall x,y \in S$,其中 $S(\subset \mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta: S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,$\exists \delta > 0$,使得 $\forall \lambda \in (0,\delta)$ 都有极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{F(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))-F(E(y))}{\lambda}$$

存在,则称 $F(x)$ 在 y 处沿 η 方向可导,记为 $\partial F(x)/\partial\eta$.

1　主要结论

定义9　设 $F: S\to F$ 为半 E-预不变凸模糊数值函数,$S(\subset \mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta: S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的开不变凸集,若 $\forall x_0 \in S$,$\exists \lambda \in [0,1]$,称集合

$$\partial F(x_0) = \{\omega \in \hat{V}^n \mid T_{F(x_0)} + T_{\langle\omega,\lambda\eta(E(x),E(x_0))\rangle} \leqslant T_{F(x)},x \in S\}$$

为 F 在点 x_0 的次微分.

定义10　设 $S(\subset \mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta: S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的 E-不凸集,半 E-预不变凸模糊数值函数 $F: S\to F$ 在 $x_0 \in S$ 是次可微的,称

$$\delta F(x_0) = \{\omega \in \hat{V}^n \mid T_{\langle\omega,\eta(E(x),E(y))\rangle} \leqslant T_{\partial F(x_0)/\partial\eta},\eta \in \mathbf{R}^n\}$$

中的每个 ω 为 F 在 x_0 点的次导数.

以上次微分、次导数都是对预不变凸模糊数值函数的次微分及次导数定义的推广.

引理1　设函数 $f: S\to R$ 是 E-预不变凸的,$S(\subset \mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta: S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的 E-不凸集,$y \in \mathbf{R}^n$,$\lambda \in (0,\delta)$,其中 $\delta > 0$,则

$$h(\lambda) = \frac{f(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))-f(E(y))}{\lambda}$$

是关于 λ 的非减函数,且

$$\frac{\partial F(y)}{\partial\eta} = \inf_{\lambda\to(0,\delta)}\frac{f(E(y)+\lambda\eta(E(x),E(y)))-f(E(y))}{\lambda}.$$

记 V_0 为由所有 $\{\hat{V}^n\}$ 的非空子集所组成的集合,同时刻画有关的次微分.

定义11　设 $S(\subset \mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta: S\times S\to\mathbf{R}^n$ 的开不变凸集,且次微分映射 $\Delta: S\to V_0$ 使得

$$\forall x,y \in S,\lambda \in [0,1],\omega_x \in \Delta(x),\omega_y \in \Delta(y),$$

$$T_{\langle\omega_x,\lambda\eta(E(y),E(x))\rangle} + T_{\langle\omega_y,\lambda\eta(E(x),E(y))\rangle} \leqslant 0,$$

则称 Δ 是单调的. 如果 $\forall n \in \mathbf{N}$,$x_j \in S(j = 0,1,2,\cdots,n,n+1)$,$x_{n+1} = x_0$,$\omega_j \in \Delta(x_j)(j = 0,1,\cdots,n)$,有

$$T_{\sum_{j=0}^{n}\langle\omega_j,\lambda\eta(E(x_{j+1}),E(x_j))\rangle} \leqslant 0,$$

则称 Δ 是循环单调的. 如果 Δ 是循环单调的并对任何循环单调映射,且 $\forall x \in S$,对任何循环单调映射 $\varphi: S\to V_0$ 都有 $\varphi(x) \subset \Delta(x)$ 或 $\varphi(x) = \Delta(x)$,则称 Δ 是最大循环单调映射.

下面给出了半 E-预不变凸模糊数值函数的次微分的相关性质.

定理1　设半 E-预不变凸模糊数值函数 $F: S\to F$ 可表示为 $F(y) = \{(F_\alpha^-,F_\alpha^+,\alpha) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$,若 $\forall \alpha \in [0,1]$,F_α^-,F_α^+ 在 E-不凸集 S 上是半 E-预不变凸的,则 F 是沿 η 方向可导的,对每个 $y \in S$,H:

$y \to \partial F(y) / \partial \eta$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是次线性的，即

$$\partial F(y) = \delta F(y).$$

证 由引理 1，$\forall \lambda \in (0,\delta)$，其中 $\delta > 0$，$E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y)) \in S$，$\alpha \in [0,1]$. 设

$$a(\lambda) = \frac{F_\alpha^-(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) - F_\alpha^-(E(y))}{\lambda},$$

$$b(\lambda) = \frac{F_\alpha^+(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) - F_\alpha^+(E(y))}{\lambda}$$

是非减且下有界的，因而

$$\frac{\partial F(y)}{\partial \eta} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) - F(E(y))}{\lambda} = \left\{\left(\frac{\partial F_\alpha^-(y)}{\partial \eta}, \frac{\partial F_\alpha^+(y)}{\partial \eta}, \alpha \,\middle|\, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\right)\right\},$$

即 F 是沿 η 方向可导的.

假设 $\omega \in \delta F(y)$，对每一个 $x \in S$，令 $E(x) = E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y)) \in S$，有

$$\langle \omega, E(x) - E(y) \rangle = \langle \omega, \eta(E(x), E(y)) \rangle.$$

又

$$\langle \omega, \eta(E(x), E(y)) \rangle \leqslant \frac{\partial F(y)}{\partial \eta} = [F(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) - F(E(y))] / \lambda = [F(E(x)) - F(E(y))] / \lambda,$$

即

$$F(E(y)) + \lambda \langle \omega, \eta(E(x), E(y)) \rangle \leqslant F(E(x)),$$

所以

$$F(E(y)) + \langle \omega, \lambda \eta(E(x), E(y)) \rangle \leqslant F(E(x)),$$

$$T_{F(E(y))} + T_{\langle \omega, \lambda \eta(E(x), E(y)) \rangle} \leqslant T_{F(E(x))},$$

因而 $\omega \in \partial F(y)$.

反之，如果 $\omega \in \partial F(y)$，则 $\forall \eta \in \mathbf{R}^n$，$\lambda \in (0, \delta)$，$E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y)) \in S$ 有

$$F(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) \geqslant F(E(y)) + \langle \omega, \lambda \eta(E(x), E(y)) \rangle = F(E(y)) + \lambda \langle \omega, \eta(E(x), E(y)) \rangle,$$

即

$$[F(E(y) + \lambda \eta(E(x), E(y))) - F(E(y))] / \lambda \geqslant \langle \omega, \eta(E(x), E(y)) \rangle,$$

因而 $T_{\partial F(y)/\partial \eta} \geqslant T_{\langle \omega, \eta(E(x), E(y)) \rangle}$，即 $\omega \in \delta F(y)$.

综上所述得 $\partial F(y) = \delta F(y)$.

下面证明 $\forall y \in S$，映射 $G: y \to \partial F(y) / \partial \eta$ 具有次可加性，这里 F 是半 E-预不变凸模糊数值函数.

事实上，$\forall y, V \in \mathbf{R}^n$ 和所有的 $\lambda > 0$，使得 $E(y) + 2\lambda \eta(E(x), E(y))$，$E(y) + 2\lambda V(E(x), E(y)) \in S$，

$$[T_{F(E(y) + \lambda[\eta(E(x), E(y)) + V(E(x), E(y))])} - T_{F(E(y))}] / \lambda = [T_{F(E(y) + [2\lambda \eta(E(x), E(y)) + 2\lambda V(E(x), E(y))]/2)} - T_{F(E(y))}] / \lambda \leqslant \left[\left(T_{F(E(y) + 2\lambda \eta(E(x), E(y)))} + T_{F(E(y) + 2\lambda V(E(x), E(y)))}\right) / 2 - T_{F(E(y))}\right] / \lambda =$$

$$[T_{F(E(y) + 2\lambda \eta(E(x), E(y)))} - T_{F(E(y))}] / (2\lambda) + [T_{F(E(y) + 2\lambda V(E(x), E(y)))} - T_{F(E(y))}] / (2\lambda),$$

因此令 $\lambda \to 0$，有 $\partial F(y) / \partial(\eta + V) \leqslant \partial F(y) / \partial \eta + \partial F(y) / \partial V$. 故映射 G 是正齐次的.

定理 2 设 $S(\subset \mathbf{R}^n)$ 是关于 $\eta: S \times S \to \mathbf{R}^n$ 的 E-不凸集，半 E-预不变凸模糊数值函数 $F: S \to F$ 可表示为 $F(y) = \{(F_\alpha^-, F_\alpha^+, \alpha) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$，若 $\forall \alpha \in [0,1]$，F_α^-, F_α^+ 在 S 上是半 E-预不变凸函数，则 $H: x \to \partial F(x)$ 是最大循环单调映射.

证 令 $n \in \mathbf{N}$，$x_j \in S$，$x_{k+1} = x_0$，$h_j \in \partial F(x_j)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$\langle h_j, \lambda \eta(E(x_{j+1}), E(x_j)) \rangle \leqslant F(x_{j+1}) - F(x_j),$$

将这些式子相加得

$$\sum_{j=0}^{n} \langle h_j, \lambda \eta(E(x_{j+1}), E(x_j)) \rangle \leqslant 0,$$

即 $T_{\sum_{j=0}^{n} \langle h_j, \lambda \eta(E(x_{j+1}), E(x_j)) \rangle} \leqslant 0.$

故 H 是循环单调的.

下面用反证法来证明 H 是最大单调的. 假设存在单调映射 $\psi: S \to V_0$，使得对每个 $x \in S$，$\partial F(x) \subset \psi(x)$，且对某个 $x_0 \in S$，$\psi(x_0) / \partial F(x_0) \neq \varnothing$. 取 $\omega_0 \in \psi(x_0) / \partial F(x_0)$，由于 F_α^-, F_α^+ 是半 E-预不变凸的，则 $\omega_0 \notin \delta F(x)$，因而 $\exists \eta(E(x), E(x_0)) \in \mathbf{R}^n$，使得

$$\frac{\partial F(x_0)}{\partial \eta} < \langle \omega_0, \eta(E(x), E(x_0)) \rangle,$$

取 $\varepsilon = T_{\langle \omega_0, \eta(E(x), E(x_0)) \rangle} - T_{\partial F(x_0)/\partial \eta}$，则 $\exists \delta_0 > 0$，使得 $\lambda \in (0, \delta_0)$，有

$$\frac{T_{F(E(x_0) + \lambda \eta(E(x), E(x_0)))} - T_{F(E(x_0))}}{\lambda} < T_{\partial F(x_0)/\partial \eta} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

固定 $2\lambda_1 \in [0, \delta_0]$，令 $y = E(x_0) + 2\lambda_1 \eta(E(x), E(x_0))$，因此，

$$T_{F(y)} - T_{F(E(x_0))} = T_{F(E(x_0) + 2\lambda_1 \eta(E(x), E(x_0)))} - T_{F(E(x_0))} < 2\lambda_1 \left[T_{\partial F(x_0)/\partial \eta} + \frac{\varepsilon}{4}\right].$$

令 $x_1 = x_0 + \lambda_1 \eta(E(x), E(x_0))$，则 $T_{F(x_1)} - T_{F(x_0)} \geqslant \lambda_1 T_{\partial F(x_0)/\partial \eta}$. 考虑 $\forall \omega_1 \in \partial F(x_1)$，$T_{\lambda_1 \langle \omega_1, \eta(E(x), E(x_0)) \rangle} = T_{\langle \omega_1, \lambda_1 \eta(E(x), E(x_0)) \rangle} = T_{\langle \omega_1, y - x_0 \rangle} \leqslant T_{F(y)} - T_{F(x_1)} = (T_{F(y)} - T_{F(x_0)}) + (T_{F(x_0)} - T_{F(x_1)}) < 2\lambda_1 \left[T_{\partial F(x_0)/\partial \eta} + \frac{\varepsilon}{4}\right] - \lambda_1 T_{\partial F(x_0)/\partial \eta} = \lambda_1 \left[T_{\partial F(x_0)/\partial \eta} + \frac{\varepsilon}{2}\right]$,

即 $T_{\langle \omega_1, \eta(E(x), E(x_0)) \rangle} < T_{\partial F(x_0)/\partial\eta} + \frac{\varepsilon}{2}$.

因此,

$$T_{\langle \omega_0, x_1 - x_0 \rangle} + T_{\langle \omega_1, x_0 - x_1 \rangle} = T_{\langle \omega_0, \lambda_1 \eta(E(x), E(x_0)) \rangle} + T_{\langle \omega_1, -\lambda_1 \eta(E(x), E(x_0)) \rangle} = \lambda_1 \left[T_{\langle \omega_0, \eta(E(x), E(x_0)) \rangle} - T_{\langle \omega_1, \eta(E(x), E(x_0)) \rangle} \right] = \lambda_1 \left[T_{\partial F(x_0)/\partial\eta} + \varepsilon - T_{\partial F(x_0)/\partial\eta} - \frac{\varepsilon}{2} \right] = \frac{\lambda_1}{2}\varepsilon > 0,$$

即

$$\langle \omega_0, \lambda_1 \eta(E(x), E(x_0)) \rangle + \langle \omega_1, \lambda_1 \eta(E(x_0), E(x_1)) \rangle > 0,$$

这与 ψ 的单调性矛盾.

2 参考文献

[1] Nanda S, Kar K. Convex fuzzy mappings [J]. Fuzzy Sets System, 1992, 48(1): 129-132.

[2] Syau Y R. Generalization of preinvex and B-vex fuzzy mappings [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 120(3): 533-542.

[3] Panigrahi M, Panda G, Nanda S. Convex fuzzy mappings with differentiability and its application in fuzzy optimization [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 185(1): 47-62.

[4] Noor M A. Fuzzy preinvex functions [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(1): 95-104.

[5] Youness E A, Avriel M. E-convex sets, E-convex function and E-convex programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 102(2): 439-450.

[6] Wang Guixiang, Wu Congxin. Directional derivatives and subdifferential of convex fuzzy mappings and application in convex fuzzy programming [J]. Fuzzy Sets Syst, 2003, 138(3): 559-591.

[7] Wu Zezhong, Xu Jiuping. Nonconvex fuzzy mappings and the fuzzy prevariational inequality [J]. Fuzzy Sets Systems, 2008, 159(16): 2090-2103.

[8] 吴从炘,马明. 模糊分析学基础 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.

[9] 巩增泰,白玉娟. 预不变凸模糊数值函数及其应用 [J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2010, 46(1): 1-5.

[10] 赵亮,刘学文. Stampacchia 型和 Minty 型似变分不等式解的性质 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(6): 598-601.

[11] 黄应全,赵克全. r-预不变凸函数的 2 个充分条件 [J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2004, 21(4): 17-18.

[12] Fulga C, Preda V. Nonlinear programming with E-preinvex and local E-preinvex functions [J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192(3): 737-743.

The Subdifferential of Semi-E-Preinvex Fuzzy-Valued Functions

ZHANG Zhen, LIU Xue-wen*

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Based on a new concept of ordering, the definition of the subdifferential of semi-E-preinvex fuzzy-valued function is given. Then the characterization of the subdifferential by the maximum cycle monotonicity is discussed.

Key words: fuzzy number; semi-E-preinvexity; subdifferential

(责任编辑: 曾剑锋)