第 37 卷 第 4 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 4
2013 年 7 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2013

文章编号:1000-5862(2013)04-0436-04

两两 NQD 随机场的完全收敛性

付 娟,刘 赪*,宋海龙,袁代林

(西南交通大学数学学院,四川 成都 610031)

摘要: 在同分布两两 NQD 列的 Baum-Katz 完全收敛定理的基础上,主要研究并得到两两 NQD 随机场的完全收敛性,即多指标变量集下两两 NQD 的随机变量的完全收敛性,其中该指标集是关于坐标方向的偏序"≤"的 d-维正整数网格点集.

关键词: 两两 NQD; 随机场; 多指标变量集; 完全收敛性

中图分类号: O 211.4 **文献标志码:** A

0 引言

V. V. Petrov[1] 在 1995 年得到了独立序列的 Baum-Katz 定理; A. E. Mikusheva[2] 在 2000 年证明了负相协随机变量的完全收敛定理; 不久,他又在 2001 年给出了负相协随机场的 Baum-Katz 完全收敛定理[3]; 吴群英[4] 在 2002 年证明了两两 NQD 列的 Baum-Katz 完全收敛定理,其结论如下.

定理 A 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是同分布的两两 NQD 列,且满足 $\alpha p > 1, 0 < p < 2$,

$$E|X_1|^p < \infty, EX_1 = 0, \alpha \leqslant 1,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_j| > \varepsilon n^{\alpha}\right) < \infty, \forall \varepsilon > 0.$$

本文主要研究了与两两 NQD 随机变量序列的 Baum-Katz 完全收敛定理类似的两两 NQD 随机场的结果.

下面对所用到的符号进行说明: Z_+^d ($d \geqslant 2$) 表示关于坐标方向的偏序"≤"的 d-维正整数网格点集; $m \leqslant n$ 表示 $m_k \leqslant n_k, k = 1, 2, \cdots, d$, 其中 $m = (m_1, m_2, \cdots, m_d) \in Z_+^d$, $n = (n_1, n_2, \cdots, n_d) \in Z_+^d$; $e = (1, 1, \cdots, 1) \in Z_+^d$; $m \pm n = (m_1 \pm n_1, m_2 \pm n_2, \cdots, m_d \pm n_d)$; $|n| = \prod_{k=1}^{d} n_k$; $n \to \infty$ 表示 $n_k \to \infty$, $k = 1, 2, \cdots, d$; $\log^+ x = \max\{\log x, 1\}$; $S_n = \sum_{k \leqslant n} X_k$, $n \in Z_+^d$; $\ll$ 表示同阶.

本文约定: 若无特别说明, i 均表示 $i \in Z_+^d$, j 表示 $j \in \mathbf{R}$.

定义 1[5-13] 若随机变量 X_i 和 X_j, $i, j \in Z_+^d$, 且 $i \neq j$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$ 都有

$$P(X_i < x, X_j < y) \leqslant P(X_i < x) P(X_j < y),$$

则称随机变量 X_i 和 X_j 是 NQD(Negatively Quadrant Dependent) 的; 若 $\forall i, j \in Z_+^d$, 且 $i \neq j$, X_i 与 X_j 是 NQD 的,则称 $\{X_n, n \in Z_+^d\}$ 是两两 NQD 随机场.

1 有关引理

为了便于处理指标集中的偏序,引入文献[6]的结果.

引理 1 令 $d(j) = \mathrm{Card}\{k: |k| = j\}$, $M(j) = \mathrm{Card}\{k: |k| \leqslant j\}$, 则

$$M(j) \ll \frac{j(\log j)^{d-1}}{(d-1)!}, j \to \infty;$$

且 $\forall \delta > 0$, $d(j) = o(j^{\delta})$, $j \to \infty$.

引理 2 当 $k \to \infty$ 时,有下列不等式成立:

$$\sum_{j=1}^{k} d(j) j^{\gamma} \ll k^{\gamma+1} (\log k)^{d-1} \quad (\gamma > -1), \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} d(j) j^{\gamma} \ll \log^d k \quad (\gamma = -1), \tag{2}$$

收稿日期:2013-04-29

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金(SWJTU11CX155,2682013CX037)资助项目.

通信作者:刘 赪(1975-),女,河南郑州人,副教授,主要从事随机过程和概率极限理论方面的研究.

$$\sum_{j=1}^{k} d(j)j^{\gamma} \ll 1(\gamma < -1). \tag{3}$$

注1　由(1)~(3)式可知,

$$\sum_{j=1}^{k} d(j)j^{\gamma} \text{ 收敛} \Leftrightarrow \gamma < -1.$$

引理3　设ξ是1个随机变量,$s>0$是常数,则

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(j)j^{s-1}P(|\xi|>j) < \infty \Leftrightarrow E|\xi|^{s}(\log|\xi|)^{d-1} < \infty.$$

推论1　设ξ是1个随机变量,$p>0$,$\alpha p>0$是常数,$d\in \mathbf{N}^{+}$,则

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(j)j^{\alpha p-1}P(|\xi|>\varepsilon j^{\alpha}) < \infty \Leftrightarrow$$
$$E|\xi|^{p}(\log|\xi|)^{d-1} < \infty.$$

证　在(1)式中取$\gamma=\alpha p-1$,又$\alpha p>0$,所以$\gamma>-1$. 故

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(j)j^{\alpha p-1}P\left(|\xi|>\varepsilon j^{\alpha}\right) =$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} d(j)j^{\alpha p-1}P\left((|\xi|\varepsilon^{-1})^{1/\alpha}>j\right) =$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} d(j)j^{\alpha p-1}\sum_{k=j}^{\infty}P\left(k<(|\xi|\varepsilon^{-1})^{1/\alpha}\leqslant k+1\right) =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left(k<(|\xi|\varepsilon^{-1})^{1/\alpha}\leqslant k+1\right)\sum_{j=1}^{k} d(j)j^{\alpha p-1} \ll$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left(k<(|\xi|\varepsilon^{-1})^{1/\alpha}\leqslant k+1\right)k^{\alpha p}(\log k)^{d-1} =$$
$$E(|\xi|\varepsilon^{-1})^{p}(\log|\xi|\varepsilon^{-1})^{d-1} = E|\xi|^{p}\varepsilon^{-p}(\log|\xi|+\log\varepsilon^{-1})^{d-1} = E|\xi|^{p}\left(\frac{\log|\xi|-\log\varepsilon}{\varepsilon^{p/(d-1)}}\right)^{d-1} \ll$$
$$E|\xi|^{p}(\log|\xi|)^{d-1} < E|\xi|^{p+\delta} < \infty,$$

即

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(j)j^{\alpha p-1}P\left(|\xi|>\varepsilon j^{\alpha}\right) < \infty \Leftrightarrow$$
$$E|\xi|^{p}(\log|\xi|)^{d-1} < \infty.$$

2　主要结果及其证明

定理1　设$\{X_n, n\in Z_{+}^{d}\}$是同分布的两两 NQD 的随机场,$\alpha p>1$,$0<p<2$,$E|X_1|^{p+\delta}<\infty$,且当$\alpha\leqslant 1$时,$EX_1=0$,则$\forall\varepsilon>0$,

$$\sum_{n\in Z_{+}^{d}} |n|^{\alpha p-2}P\left(\max_{j\leqslant n}|S_j|>\varepsilon|n|^{\alpha}\right) < \infty.$$

证　取q使得$[1+1/(\alpha p)]/2<q<1$. 对X_i,$i\in Z_{+}^{d}$截尾,记

$$Y_i = -|n|^{\alpha q}I(X_i<-|n|^{\alpha q}) + X_iI(|X_i|<|n|^{\alpha q}) + |n|^{\alpha q}I(X_i>|n|^{\alpha q}),$$

$$S_n = \sum_{i\leqslant n} X_i, U_n = \sum_{i\leqslant n} Y_i,$$

$$A_n = \bigcup_{j\leqslant n}(|X_j|\geqslant\varepsilon|n|^{\alpha}), B_n = \bigcup_{i<j\leqslant n}((X_i>|n|^{\alpha q}, X_j>|n|^{\alpha q})\cup(X_i<-|n|^{\alpha q}, X_j<-|n|^{\alpha q})).$$

首先证明

$$(\max_{k\leqslant n}|S_k|<8\varepsilon|n|^{\alpha}) \supset A_n^{c}\cap(\max_{k\leqslant n}|U_k|<2\varepsilon|n|^{\alpha})\cap B_n^{c} = (\bigcap_{j\leqslant n}(|X_j|<\varepsilon|n|^{\alpha}))\cap(\max_{k\leqslant n}|U_k|<2\varepsilon|n|^{\alpha})\cap(\bigcap_{i<j\leqslant n}(((X_i\leqslant|n|^{\alpha q})\cup(X_j\leqslant|n|^{\alpha q}))\cap((X_i\geqslant-|n|^{\alpha q})\cup(X_j\geqslant-|n|^{\alpha q})))) = D_n. \tag{4}$$

因此,要证明(4)式,只要证明$\forall\omega\in D_n$,有$\max_{k\leqslant n}|S_k(\omega)|<8\varepsilon|n|^{\alpha}$.

由于$\omega\in D_n$,则$\forall j\leqslant n\in Z_{+}^{d}$,有下列式子同时成立:

$$|X_j(\omega)|<\varepsilon|n|^{\alpha}, \tag{5}$$
$$\max_{k\leqslant n}|U_k(\omega)|<2\varepsilon|n|^{\alpha}, \tag{6}$$

$\forall i<j\leqslant n$,$X_i(\omega)\leqslant|n|^{\alpha q}$或$X_j(\omega)\leqslant|n|^{\alpha q}$,且

$$X_i(\omega)\geqslant-|n|^{\alpha q} \text{ 或 } X_j(\omega)\geqslant-|n|^{\alpha q}. \tag{7}$$

若记$a=\mathrm{Card}\{i: i\leqslant n, X_i(\omega)>|n|^{\alpha q}\}$,$b=\mathrm{Card}\{i: i\leqslant n, X_i(\omega)<-|n|^{\alpha q}\}$,由$i<n$及(7)式知,当$\forall i<n$时,则$-|n|^{\alpha q}\leqslant X_i(\omega)\leqslant|n|^{\alpha q}$;然而若$i=n$,则$X_i(\omega)>|n|^{\alpha q}$或$X_i(\omega)<-|n|^{\alpha q}$或$-|n|^{\alpha q}\leqslant X_i(\omega)\leqslant|n|^{\alpha q}$. 因此$a=0$或1,$b=0$或1.

下面对a,b分情况做如下讨论.

当$a=b=0$时,$\forall i\leqslant n$,$|X_i(\omega)|\leqslant|n|^{\alpha q}$,由$Y_i$的定义知$Y_i(\omega)=X_i(\omega)$,于是结合(6)式可以得到

$$\max_{k\leqslant n}|U_k(\omega)| = \max_{k\leqslant n}|S_k(\omega)| < 2\varepsilon|n|^{\alpha} < 8\varepsilon|n|^{\alpha}.$$

当$a=1$,$b=0$时,存在某i_0,使$X_{i_0}(\omega)>|n|^{\alpha q}$,但对$i=i_0$仍有(5)式成立,即$|X_{i_0}(\omega)|<\varepsilon|n|^{\alpha}$. 而只要当$k\neq i_0$时都有$Y_i(\omega)=X_i(\omega)$,当$k=i_0$时,由$Y_i$的定义知$|Y_{i_0}(\omega)|\leqslant|n|^{\alpha q}$.

若$n<i_0$,$S_n(\omega)=U_n(\omega)$;若$i_0\leqslant n$,由于

$|Y_{i_0}(\omega)| \leqslant |n|^{\alpha q} < |X_{i_0}(\omega)| < \varepsilon|n|^{\alpha}$,从而

$$|S_n(\omega)| = \left|\sum_{k<i_0} X_k(\omega) + X_{i_0}(\omega) + \sum_{i_0<k\leqslant n} X_k(\omega)\right| = \left|\sum_{k<i_0} Y_k(\omega) + X_{i_0}(\omega) + \sum_{i_0<k\leqslant n} Y_k(\omega)\right| \leqslant \left|\sum_{k<i_0} Y_k(\omega)\right| + |X_{i_0}(\omega)| + \left|\sum_{i_0<k\leqslant n} Y_k(\omega)\right| < 2\varepsilon|n|^{\alpha} + \varepsilon|n|^{\alpha} + \varepsilon|n|^{\alpha} < 8\varepsilon|n|^{\alpha}.$$

当 $a=0, b=1$ 时,当 $a=1, b=0$ 时和当 $a=1, b=1$ 时 3 种情形可类似证明.

综上所述,$\forall \omega \in D_n$,$\max\limits_{k\leqslant n}|S_k(\omega)| < 8\varepsilon|n|^{\alpha}$.

于是对(4)式左右两边同时取补集得到

$$(\max_{k\leqslant n}|S_k| \geqslant 8\varepsilon|n|^{\alpha}) \subset (A_n \cup (\max_{k\leqslant n}|U_k| \geqslant 2\varepsilon|n|^{\alpha}) \cup B_n),$$

所以

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P\left(\max_{k\leqslant n}|S_k| \geqslant 8\varepsilon|n|^{\alpha}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(A_n) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(B_n) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P\left(\max_{k\leqslant n}| U_k| \geqslant 2\varepsilon|n|^{\alpha}\right).$$

因此要证明的结论转化为证明

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(A_n) < \infty, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(B_n) < \infty, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P\left(\max_{k\leqslant n}| U_k| \geqslant 2\varepsilon|n|^{\alpha}\right) < \infty. \tag{10}$$

先证(8)式. 事实上,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}\cdot P\left(\bigcup_{j\leqslant n}|X_j| \geqslant \varepsilon|n|^{\alpha}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}\ |n|\cdot P\left(|X_1| \geqslant \ \varepsilon|n|^{\alpha}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-1}P\left(|X_1| \geqslant \varepsilon|n|^{\alpha}\right),$$

由于 $E|X_1|^{p+\delta} < \infty \Rightarrow E|X_1|^{p}(\log|X_1|)^{d-1} < \infty$ $(0<p<2)$,故根据引理 3 知(8)式成立.

下面证明(9)式. 由于 $[1+1/(\alpha p)]/2 < q < 1$,显然有 $(\alpha p+1)/(2\alpha q) < p$ 成立.

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(B_n) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}\cdot P\left(\bigcup_{i<j\leqslant n}((X_i > |n|^{\alpha q}, X_j > |n|^{\alpha q}) \cup (X_i < -|n|^{\alpha q}, X_j < -|n|^{\alpha q}))\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}\sum_{i<j\leqslant n}(P(X_i > |n|^{\alpha q})P(X_j > |n|^{\alpha q}) + P(X_i < -|n|^{\alpha q})P(X_j < -|n|^{\alpha q})) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p}P^2(|X_1| > |n|^{\alpha q})\cdot$$

$$\sum_{n}|n|^{\alpha p}P^2(|X_1| > |n|^{\alpha q}) = \sum_{j=1}^{\infty}d(j)j^{\alpha p}P^2(|X_1| > j^{\alpha q}) = \sum_{j=1}^{\infty}d(j)j^{\alpha p}P^2(|X_1|^{1/(\alpha q)} > j) = \sum_{j=1}^{\infty}d(j)j^{\alpha p}\sum_{k=j}^{\infty}P^2(k < |X_1|^{1/(\alpha q)} \leqslant k+1) = \sum_{k=1}^{\infty}P^2(k < |X_1|^{1/(\alpha p)} \leqslant k+1)\sum_{j=1}^{k}d(j)j^{\alpha p} \ll \sum_{k=1}^{\infty}P^2(k < |X_1|^{1/(\alpha q)} \leqslant k+1)k^{\alpha p+1}(\log k)^{d-1} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty}P(k < |X_1|^{1/(\alpha q)} \leqslant k+1)k^{(\alpha p+1)/2}(\log k)^{(d-1)/2}\right]^2 \leqslant [E|X_1|^{(\alpha p+1)/(2\alpha q)}(\log|X_1|)^{(d-1)/2}]^2 \leqslant [E|X_1|^{p}(\log|X_1|)^{(d-1)/2}]^2 \leqslant (E|X_1|^{p+\delta})^2.$$

由于 $E|X_1|^{p+\delta} < \infty$,故(9)式成立.

为了证明(10)式,令 $Y'_i = Y_i - EY_i$,$S'_n = \sum\limits_{i\leqslant n}Y'_i$. 下面先证

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P\left(\max_{i\leqslant n}| S'_j| \geqslant \varepsilon|n|^{\alpha}\right) < \infty. \tag{11}$$

由于 $E|X_1|^{p+\delta} < \infty$,$-\alpha(2-p)(1-q) < 0$,且当 $|X_1| \leqslant |n|^{\alpha q}$ 时,即 $|X_1|/|n|^{\alpha q} \leqslant 1$,又 $p-2<0$,则 $(|X_1|/|n|^{\alpha q})^{p-2} \geqslant 1$,当 $|X_1| > |n|^{\alpha q}$ 时,则 $(|X_1|/|n|^{\alpha q})^{p} \geqslant 1$,故有下式成立.

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P\left(\max_{i\leqslant n}|S'_j| \geqslant \varepsilon|n|^{\alpha}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2-2\alpha}E\left(\max_{i\leqslant n}|S'_j|\right)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2-2\alpha}\log^2|n|\sum_{i\leqslant n}E(Y_i - EY_i)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2-2\alpha}\log^2|n|\sum_{i\leqslant n}EY_i^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2-2\alpha}\log^2|n|\sum_{i\leqslant n}\left[E|n|^{2\alpha q}I(|X_1| > |n|^{\alpha q}) + E|X_1|^2 I(|X_1| \leqslant |n|^{\alpha q})\right] \leqslant$$

$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2-2\alpha}\log^2|n|\sum_{i\leqslant n}\left[E|n|^{2\alpha q}\left(\frac{|X_1|}{|n|^{\alpha q}}\right)^p\cdot\right.$

$\left.I(|X_1|>|n|^{\alpha q})+E|X_1|^2\left(\frac{|X_1|}{|n|^{\alpha q}}\right)^{p-2}I(|X_1|\leqslant|n|^{\alpha q})\right]\leqslant$

$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2-2\alpha}\log^2|n|\ [|n|^{2\alpha q-\alpha pq+1}E|X_1|^p\cdot$

$I(|X_1|>|n|^{\alpha q})+|n|^{-\alpha q(p-2)+1}E|X_1|^pI(|X_1|\leqslant$

$|n|^{\alpha q})]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2-2\alpha}\log^2|n||n|^{2\alpha q-\alpha pq+1}\cdot$

$E|X_1|^p\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-1-2\alpha+2\alpha q-\alpha pq}\log^2|n|\cdot$

$E|X_1|^p\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}d(j)\ \log^2 j\cdot j^{-1-\alpha(2-p)(1-q)}E|X_1|^{p+\delta}\ll$

$\sum_{j=1}^{\infty}d(j)\ \log^2 j\cdot j^{-1-\alpha(2-p)(1-q)}<\infty.$

下面只要证 $|n|^{-\alpha}\max_{j\leqslant n}|EU_j|\to0(|n|\to\infty)$.

当 $\alpha\leqslant1$ 时,$EX_1=0$; 又 $\alpha p>1,p>1$,根据 q 的取法有 $\alpha pq>1,q<1$,所以

$|n|^{-\alpha}\max_{j\leqslant n}|EU_j|=|n|^{-\alpha}\max_{j\leqslant n}\left|\sum_{i\leqslant j}EY_i\right|\leqslant$

$|n|^{-\alpha}\sum_{i\leqslant n}|EY_i|=|n|^{-\alpha}\sum_{i\leqslant n}|E(Y_i-X_i)|\leqslant$

$|n|^{-\alpha}\sum_{i\leqslant n}E((X_i-|n|^{\alpha q})I(X_i>|n|^{\alpha q})+$

$(X_i+|n|^{\alpha q})I(X_i<-|n|^{\alpha q}))\leqslant$

$|n|^{-\alpha}\sum_{i\leqslant n}E((X_i-|n|^{\alpha q})I(|X_i|>|n|^{\alpha q})+$

$(X_i+|n|^{\alpha q})I(|X_i|>|n|^{\alpha q}))\leqslant$

$2|n|^{-\alpha}\sum_{i\leqslant n}E|X_i|I(|X_i|>|n|^{\alpha q})\leqslant$

$2|n|^{1-\alpha}E|X_1|I(|X_1|>|n|^{\alpha q})\leqslant$

$2|n|^{1-\alpha}E|X_1|(|X_1|/|n|^{\alpha q})^{p-1}I(|X_1|>|n|^{\alpha q})=$

$2|n|^{1-\alpha-\alpha q(p-1)}E|X_1|^pI(|X_1|>|n|^{\alpha q})=$

$2|n|^{-(\alpha pq-1)-\alpha(1-q)}E|X_1|^pI(|X_1|>|n|^{\alpha q})$.

因为 $-(\alpha pq-1)-\alpha(1-q)<0$,所以当 $|n|\to\infty$ 时,$|n|^{-(\alpha pq-1)-\alpha(1-q)}\to0$; 又当 $|n|\to\infty$ 时,$E|X_1|^pI(|X_1|>|n|^{\alpha q})\leqslant E|X_1|^{p+\delta}<\infty$,所以 $|n|^{-(\alpha pq-1)-\alpha(1-q)}E|X_1|^pI(|X_1|>|n|^{\alpha q})\to0$, $|n|\to\infty$.

当 $\alpha>1,p\geqslant1$ 时,

$|n|^{-\alpha}\max_{j\leqslant n}|EU_j|\leqslant|n|^{-\alpha}\sum_{i\leqslant n}E|Y_i|=$

$|n|^{-\alpha}\sum_{i\leqslant n}[E|n|^{\alpha q}I(|X_i|>|n|^{\alpha q})+E|X_i|I(|X_i|\leqslant$

$|n|^{\alpha q})]=|n|^{1-\alpha}(E|n|^{\alpha q}I(|X_1|>|n|^{\alpha q})+$

$E|X_1|I(|X_1|\leqslant|n|^{\alpha q}))\leqslant|n|^{1-\alpha}E|X_1|^{p+\delta}\ll$

$|n|^{1-\alpha}\to0,|n|\to\infty$.

当 $\alpha>1,p<1,\alpha pq>1,q<1,\alpha p>1$ 时,由于 $E|X_1|^{p+\delta}<\infty$,且当 $|X_1|\leqslant|n|^{\alpha q}$ 时,即 $|X_1|/|n|^{\alpha q}\leqslant1$,又 $p-1<0$,则 $(|X_1|/|n|^{\alpha q})^{p-1}\geqslant1$,当 $|X_1|>|n|^{\alpha q}$ 时,则 $(|X_1|/|n|^{\alpha q})^p\geqslant1$,故

$|n|^{-\alpha}\max_{j\leqslant n}|EU_j|\leqslant|n|^{-\alpha}\sum_{i\leqslant n}|EY_i|\leqslant$

$|n|^{-\alpha}\sum_{i\leqslant n}[E|n|^{\alpha q}I(|X_i|>|n|^{\alpha q})+$

$E|X_i|I(|X_i|\leqslant|n|^{\alpha q})]=|n|^{1-\alpha+\alpha q}E\left(\frac{|X_1|}{|n|^{\alpha q}}\right)^p\cdot$

$I(|X_1|>|n|^{\alpha q})+$

$|n|^{1-\alpha}E|X_1|I(|X_1|\leqslant|n|^{\alpha q})\leqslant$

$|n|^{1-\alpha pq-\alpha+\alpha q}E|X_1|^pI(|X_1|>|n|^{\alpha q})+$

$|n|^{1-\alpha}E|X_1||X_1|^{p-1}|n|^{-\alpha q(p-1)}I(|X_1|\leqslant|n|^{\alpha q})=$

$|n|^{1-\alpha pq-\alpha+\alpha q}E|X_1|^pI(|X_1|>|n|^{\alpha q})+$

$|n|^{1-\alpha-\alpha q(p-1)}E|X_1|^pI(|X_1|\leqslant|n|^{\alpha q})\leqslant$

$|n|^{1-\alpha pq-\alpha+\alpha q}E|X_1|^{p+\delta}\ll|n|^{-(\alpha pq-1)-\alpha(1-q)}\to0$

$(|n|\to\infty)$.

因为 $|n|^{-\alpha}\max_{j\leqslant n}|EU_j|\to0$,所以 $P(\max_{k\leqslant n}|EU_j|\geqslant\varepsilon|n|^{\alpha})=0$,结合(11)式可得

$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(\max_{k\leqslant n}|U_k|\geqslant2\varepsilon|n|^{\alpha})=$

$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(\max_{k\leqslant n}|\sum_{i\leqslant k}Y_i|\geqslant2\varepsilon|n|^{\alpha})\leqslant$

$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(\max_{k\leqslant n}|EU_j|\geqslant\varepsilon|n|^{\alpha})+$

$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(\max_{k\leqslant n}|S'_j|\geqslant\varepsilon|n|^{\alpha})=$

$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|n|=j}|n|^{\alpha p-2}P(\max_{k\leqslant n}|S'_j|\geqslant\varepsilon|n|^{\alpha})<\infty.$

定理 1 得证.

3　参考文献

[1] Petrov V V. Limit theorems of probability theory: sequences of independent random variables [M]. Clarendon: Oxford University Press,1995.

[2] Mikusheva A E. On the complete convergence of sums of negatively associated random variables [J]. Math Notes,

2000,68(3):355-362.

[3] Mikusheva A E. An analog of Baum-Katz theorem for negatively associated random fileds [J]. Math Bull Mosc Univ,2001,56(3):30-35.

[4] 吴群英. 两两 NQD 列的收敛性质 [J]. 数学学报,2002,45(3):617-624.

[5] Baum L E,Katz M. Convergence rates in the law of large numbers [J]. Amer Math Soc,1965,120(1):108-123.

[6] Allan Gut. Convergence rates in the central limit theorem for multidimensionally indexed random variables [J]. Stud Sci Math Hung,2001,37(3/4):401-408.

[7] Matula P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables [J]. Statist Probab Lett,1992,15(3):209-213.

[8] 林正炎,陆传荣,苏中根. 概率极限理论基础 [M]. 北京:高等教育出版社,1999.

[9] 陈晓林,吴群英,邓光明,等. 两两 NQD 列的一个强大数定理 [J]. 武汉理工大学学报,2010,32(19):193-196.

[10] 陈平炎. 两两 NQD 列的强大数定律 [J]. 数学物理学报,2005,25A(3):386-392.

[11] 高世泽. 两两 NQD 的随机变量序列的一个强大数定律 [J]. 重庆师范学院学报:自然科学版,1993,10(3):58-62.

[12] 杨晓丽,鲁嫦. 不同分布两两 NQD 列部分和之和的强大数定律 [J]. 荆楚理工学院学报,2011,26(7):39-42.

[13] 周少南,明瑞星,黄丽. NA 列随机加权和的完全收敛性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2009,33(6):634-639.

The Complete Convergence of Pairwise NQD Random Fields

FU Juan,LIU Cheng*,SONG Hai-long,YUAN Dai-lin

(College of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu Sichuang 610031,China)

Abstract: On the basis of Baum-Katz complete convergence of Pairwise NQD sequences with the same distribution, complete convergence of Pairwise NQD random fields are mainly discussed and gained,namely the complete convergence of Pairwise NQD random variables for multiindexed summands Z_+^d,which is the positive integer d-dimensional lattice points with partial ordering $\leqslant$.

Key words: Pairwise NQD; random fields; multiindexed summands; complete convergence

(责任编辑:曾剑锋)