文章编号:1000-5862(2013)05-0449-04

单位圆内亚纯函数与解析函数的级与型

涂 金[1],黄海霞[1],徐洪焱[2],陈春芳[1]
(1. 江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022;
2. 景德镇陶瓷学院信息工程学院,江西 景德镇 333403)

摘要:利用 Nevanlinna 值分布理论对单位圆内具有相同增长级和不同型的亚纯函数与解析函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 四则运算后的级、下级和型进行了研究,得到了一些结果,完善了原有的一些结论.

关键词:单位圆;亚纯函数;解析函数;级;型
中图分类号:O 174.52 **文献标志码**:A

0 引言和结果

本文使用大家熟悉的 Nevanlinna 值分布理论的标准记号[1-3]. 下面将介绍一些复平面上或单位圆内值分布的基础知识和定义.

定义 1 复平面上的亚纯函数 $f(z)$ 的级、下级分别定义为

$$\sigma(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log T(r,f)/\log r,$$
$$\mu(f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\log T(r,f)/\log r.$$

特别地,当复平面上的 $f(z)$ 是整函数时,则 $f(z)$ 的级定义为

$$\sigma(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log T(r,f)/\log r=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log\log M(r,f)/\log r.$$

定义 2 若复平面上的亚纯函数或整函数 $f(z)$ 的级满足 $0<\sigma(f)<\infty$,则 $f(z)$ 的型分别定义为

$$\tau(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}T(r,f)/r^{\sigma(f)},$$
$$\tau(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log M(r,f)/r^{\sigma(f)}.$$

定义 3[4-5] 假设 $f(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,则 $f(z)$ 的级和下级分别定义为

$$\sigma(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log T(r,f)/(-\log(1-r)),$$
$$\mu(f)=\underline{\lim_{r\to1^-}}\log T(r,f)/(-\log(1-r)).$$

定义 4[6] 假设 $f(z)$ 是单位圆内的解析函数,则 $f(z)$ 的最大模的级和最大模的下级分别定义为

$$\sigma_M(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log\log M(r,f)/(-\log(1-r)),$$
$$\mu_M(f)=\underline{\lim_{r\to1^-}}\log\log M(r,f)/(-\log(1-r)).$$

注 1 对于单位圆内的解析函数,有 $\sigma(f)\leqslant\sigma_M(f)\leqslant\sigma(f)+1$,例如 $f(z)=\exp\{(1-z)^{-k}\}(k\geqslant1)$ 满足 $\sigma_M(f)=k,\sigma(f)=k-1$.

定义 5[7] 假设 $f(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,若 $0<\sigma(f)<\infty$,则 $f(z)$ 的型定义为

$$\tau(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}T(r,f)/(1-r)^{-\sigma(f)}.$$

若 $f(z)$ 是单位圆内的解析函数,当 $0<\sigma_M(f)<\infty$ 时,则 $f(z)$ 的最大模的型定义为

$$\tau_M(f)=\overline{\lim_{r\to1^-}}\log M(r,f)/(1-r)^{-\sigma_M(f)}.$$

定义 6 假设 $f(z)$ 是单位圆内的亚纯函数,若 $0<\mu(f)<\infty$,则 $f(z)$ 的下型定义为

$$\underline{\tau}(f)=\underline{\lim_{r\to1^-}}T(r,f)/(1-r)^{-\mu(f)}.$$

若 $f(z)$ 是单位圆内的解析函数,当 $0<\mu_M(f)<\infty$ 时,则 $f(z)$ 的最大模的下型定义为

$$\underline{\tau}_M(f)=\underline{\lim_{r\to1^-}}\log M(r,f)/(1-r)^{-\mu_M(f)}.$$

注 2 由定义 5 和定义 6 易知,$\tau(f)\leqslant\tau_M(f)$,$\underline{\tau}(f)\leqslant\underline{\tau}_M(f)$.

级与型是揭示整函数与亚纯函数增长速度的 2 个重要指标,早在 20 世纪上半叶,人们就开始对整函数或亚纯函数(包括单位圆上亚纯函数)的增长性进行了研究,得到了丰富结果[1-6,8-9]. 对于复平面上 2 个有限级亚纯函数或整函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 四则运算以后的增长级,有下面几个经典的结论.

定理 A 假设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 是复平面上有限级亚纯函数,级分别为 σ_1 与 σ_2,则有 $\sigma(f_1+f_2)\leqslant\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$,$\sigma(f_1f_2)\leqslant\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$,$\sigma(f_1/f_2)\leqslant\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$.

收稿日期:2013-03-11
基金项目:国家自然科学基金(11171119)和江西省自然科学基金(20132BAB211002,20122BAB211005)资助项目.
作者简介:涂 金(1979-),男,江西鹰潭人,副教授,博士,主要从事复分析研究.

定理B 假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是复平面上有限级亚纯函数,级分别为σ_1与σ_2,若$\sigma_1 < \sigma_2$,则有

$$\sigma(f_1+f_2)=\sigma(f_1f_2)=\sigma(f_1/f_2)=\sigma_2.$$

定理C 假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是复平面上有限级亚纯函数,则有$\mu(f_1+f_2)\leqslant \max\{\sigma(f_1),\mu(f_2)\}$,$\mu(f_1f_2)\leqslant \max\{\sigma(f_1),\mu(f_2)\}$.

定理D 假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是复平面上有限级亚纯函数,且满足$\sigma(f_1)<\mu(f_2)$,则有

$$\mu(f_1+f_2)=\mu(f_1f_2)=\mu(f_2).$$

定理E[10] 假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是有限级整函数,满足$\sigma(f_1)=\sigma(f_2)=\sigma_3$,则有

(ⅰ)若$\tau_M(f_1)=0$且$0<\tau_M(f_2)<\infty$,则

$$\sigma(f_1f_2)=\sigma_3,\tau_M(f_1f_2)=\tau_M(f_2);$$

(ⅱ)若$\tau_M(f_1)<\infty$且$\tau_M(f_2)=\infty$,则

$$\sigma(f_1f_2)=\sigma_3,\tau_M(f_1f_2)=\infty.$$

结合定理A~定理D,易知对于单位圆内的有限级亚纯函数或解析函数以下几个类似的结论成立.

(Ⅰ)假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的亚纯函数,满足$\sigma(f_1)=\sigma_4$与$\sigma(f_2)=\sigma_5$,则有

$\sigma(f_1\pm f_2)\leqslant \max\{\sigma_4,\sigma_5\}$,$\sigma(f_1f_2)\leqslant \max\{\sigma_4,\sigma_5\}$,$\sigma(f_1/f_2)\leqslant \max\{\sigma_4,\sigma_5\}$;

(Ⅱ)假设在(Ⅰ)中,若$\sigma_4\neq\sigma_5$,则有

$$\sigma(f_1\pm f_2)=\sigma(f_1f_2)=\sigma(f_1/f_2)=\max\{\sigma_4,\sigma_5\};$$

(Ⅲ)假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的亚纯函数,则有$\mu(f_1+f_2)\leqslant\max\{\sigma(f_1),\mu(f_2)\}$或$\mu(f_1+f_2)\leqslant\max\{\mu(f_1),\sigma(f_2)\}$以及$\mu(f_1f_2)\leqslant\max\{\sigma(f_1),\mu(f_2)\}$或$\mu(f_1f_2)\leqslant\max\{\mu(f_1),\sigma(f_2)\}$;

(Ⅳ)假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的亚纯函数,满足$\sigma(f_1)<\mu(f_2)\leqslant\infty$,则有

$$\mu(f_1+f_2)=\mu(f_1f_2)=\mu(f_1/f_2)=\mu(f_2);$$

(Ⅴ)假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的解析函数,满足$\sigma_M(f_1)=\sigma_6$与$\sigma_M(f_2)=\sigma_7$,则有$\max\{\sigma_M(f_1\pm f_2),\sigma_M(f_1f_2)\}\leqslant\max\{\sigma_6,\sigma_7\}$,若$\sigma_6\neq\sigma_7$,则有$\sigma_M(f_1\pm f_2)=\max\{\sigma_6,\sigma_7\}$.

(Ⅵ)假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的解析函数,则有$\max\{\mu_M(f_1\pm f_2),\mu_M(f_1f_2)\}\leqslant\max\{\sigma_M(f_1),\mu_M(f_2)\}$或$\max\{\mu_M(f_1\pm f_2),\mu_M(f_1f_2)\}\leqslant\max\{\sigma_M(f_1),\mu_M(f_2)\}$.

结合定理E,自然会有以下几个问题.

问题1:当$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的亚纯函数且$\sigma(f_1)=\sigma(f_2)$时,$f_1(z)$与$f_2(z)$四则运算以后的级和型是多少?

问题2:当$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的解析函数且$\sigma_M(f_1)=\sigma_M(f_2)$时,$f_1(z)$与$f_2(z)$四则运算以后的最大模的级和型是多少?

本文研究了以上2个问题,得到以下几个定理.

定理1 假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的亚纯函数且满足$0<\sigma(f_1)=\sigma(f_2)=\sigma_8<\infty$,如果$\tau(f_1)<\tau(f_2)\leqslant\infty$,则有$\sigma(f_1+f_2)=\sigma(f_1f_2)=\sigma(f_1/f_2)=\sigma_8$,且$\tau(f_2)-\tau(f_1)\leqslant\max\{\tau(f_1+f_2),\tau(f_1f_2),\tau(f_1/f_2)\}\leqslant\tau(f_2)+\tau(f_1)$.

定理2 假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的亚纯函数且满足$0<\sigma(f_1)=\mu(f_2)<\infty$,如果$\tau(f_1)<\underline{\tau}(f_2)\leqslant\infty$,则有$\mu(f_1+f_2)=\mu(f_1f_2)=\mu(f_1/f_2)=\mu(f_2)$,且$\underline{\tau}(f_2)-\tau(f_1)\leqslant\max\{\underline{\tau}(f_1+f_2),\underline{\tau}(f_1f_2),\underline{\tau}(f_1/f_2)\}\leqslant\underline{\tau}(f_2)+\tau(f_1)$.

对于单位圆内的有限级解析函数$f(z)$,有类似的结果.

定理3 假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的解析函数且满足$0<\sigma_M(f_1)=\sigma_M(f_2)=\sigma_9<\infty$,如果$\tau_M(f_1)<\tau_M(f_2)\leqslant\infty$,则有$\sigma_M(f_1+f_2)=\sigma_9$,且$\tau_M(f_1+f_2)=\tau_M(f_2)$.

推论1 假设$f_1(z)$和$f_2(z)$是单位圆内的解析函数且满足$0<\sigma_M(f_1)=\mu_M(f_2)<\infty$,若$\tau_M(f_1)<\underline{\tau}_M(f_2)\leqslant\infty$,则有

$$\mu_M(f_1+f_2)=\mu_M(f_2),\ \underline{\tau}_M(f_1+f_2)=\underline{\tau}_M(f_2).$$

定理4 假设$f(z)$是单位圆内的有限级解析函数,则有$\sigma_M(f)=\sigma_M(f')$,若$0<\sigma_M(f)<\infty$,则有$\tau_M(f)=\tau_M(f')$.

注3 假设$f(z)$是单位圆内的有限级亚纯函数,则有$\sigma(f')=\sigma(f)$.这个结果就是文献[4]中的定理5.28,但是由于它的证明比较复杂,本文的最后将给出一个比较简单的证明.

1 引理

引理1 设$f_1,f_2,\cdots,f_m$为单位圆内的m个亚纯函数,则有

(ⅰ)$T(r,f_1f_2\cdots f_m)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{m}T(r,f_i)$;

(ⅱ)$T(r,f_1+f_2+\cdots+f_m)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{m}T(r,f_i)+\log m$.

引理2[11] 设$g:(0,1)\to\mathbf{R}$和$h:(0,1)\to\mathbf{R}$是满足$g(r)\leqslant h(r)$的单调递增函数,且至多除去1个对数测度有限的集合$E_1\subset[0,1)$,则$\forall r\in(0,1)$都存在1个常数$d\in(0,1)$使$s(r)=1-d(1-r)$,有$g(r)\leqslant h(s(r))$.

引理3 设$f(z)$是单位圆内的亚纯函数,对任意整数$k\geqslant1$,有$m(r,f^{(k)}/f)=S(r,f)$,其中$S(r,f)=$

$O\{\log^+ T(r,f) + \log(1-r)^{-1}\}$,至多除去 1 个集合 $E_2 \subset [0,1)$ 满足 $\int_{E_2} \frac{\mathrm{d}t}{1-t} < \infty$.

引理 4[12]　设 $f(z)$ 是单位圆内的亚纯函数且满足 $f(0)=0$,那么

$$m(r,f) = (1+\varphi(r/R))T(R,f') + N(R,f'),$$

其中 $0<r<R<1$,$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\log\frac{1+t}{1-t}$.

2　定理的证明

定理 1 的证明　不妨令 $\tau_1 = \tau(f_1) < \tau(f_2) = \tau_2 < \infty$,则由定义 5 知,$\forall \varepsilon > 0$,当 $r \to 1^-$ 时,有

$$T(r,f_1) \leqslant (\tau_1+\varepsilon)(1-r)^{-\sigma_8}, \quad (1)$$

$$T(r,f_2) \leqslant (\tau_2+\varepsilon)(1-r)^{-\sigma_8}. \quad (2)$$

一方面,由(1) ~ (2) 式及引理 1,有

$$T(r,f_1+f_2) \leqslant T(r,f_1) + T(r,f_2) + \log 2 \leqslant (\tau_1+\varepsilon)(1-r)^{-\sigma_8} + (\tau_2+\varepsilon)(1-r)^{-\sigma_8} + \log 2 \leqslant (\tau_1+\tau_2+3\varepsilon)(1-r)^{-\sigma_8}.$$

所以 $\sigma(f_1+f_2) \leqslant \sigma_8$,且 $\tau(f_1+f_2) \leqslant \tau_1+\tau_2$.

另一方面,$\forall \varepsilon (0 < 3\varepsilon < \tau_2 - \tau_1)$,存在 1 列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \to 1^-$,有

$$T(r_n,f_1) \leqslant (\tau_1+\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma_8}, \quad (3)$$

$$T(r_n,f_2) \geqslant (\tau_2-\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma_8}. \quad (4)$$

由(3) ~ (4) 式及引理 1 可知

$$T(r_n,f_1+f_2) \geqslant T(r_n,f_2) - T(r_n,f_1) - \log 2 \geqslant (\tau_2-\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma_8} - (\tau_1+\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma_8} - \log 2 \geqslant (\tau_2-\tau_1-3\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma_8}. \quad (5)$$

由(5) 式可知,$\sigma(f_1+f_2) \geqslant \sigma_8$,且 $\tau(f_1+f_2) \geqslant \tau_2 - \tau_1$. 综上所述,有 $\sigma(f_1+f_2) = \sigma_8$ 且 $\tau_2 - \tau_1 \leqslant \tau(f_1+f_2) \leqslant \tau_1+\tau_2$. 由引理 1,$T(r,f_1f_2) \leqslant T(r,f_1) + T(r,f_2)$ 以及 $T(r,f_1f_2) \geqslant T(r,f_2) - T(r,f_1) - O(1)$ 和 $T(r,1/f_2) = T(r,f_2) + O(1)$,类似可证 $\sigma(f_1f_2) = \sigma(f_1/f_2) = \sigma_8$ 及 $\tau(f_2) - \tau(f_1) \leqslant \max\{\tau(f_1f_2), \tau(f_1/f_2)\} \leqslant \tau(f_2) + \tau(f_1)$.

当 $\tau(f_2) = \tau_2 = \infty$ 时,同理可证结论也成立.

定理 2 的证明　不妨令 $\tau_3 = \tau(f_1) < \underline{\tau}(f_2) = \tau_4 < \infty$,则由定义 5 和定义 6 知,$\forall \varepsilon > 0$,存在 1 列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \to 1^-$,有

$$T(r_n,f_1) \leqslant (\tau_3+\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma(f_1)}, \quad (6)$$

$$T(r_n,f_2) \leqslant (\tau_4+\varepsilon)(1-r_n)^{-\mu(f_2)}. \quad (7)$$

一方面,由(6) ~ (7) 式及引理 1,有

$$T(r_n,f_1+f_2) \leqslant T(r_n,f_1) + T(r_n,f_2) + \log 2 \leqslant (\tau_3+\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma(f_1)} + (\tau_4+\varepsilon)(1-r_n)^{-\mu(f_2)} + \log 2 \leqslant (\tau_3+\tau_4+3\varepsilon)(1-r_n)^{-\mu(f_2)}.$$

所以 $\mu(f_1+f_2) \leqslant \mu(f_2)$,且 $\underline{\tau}(f_1+f_2) \leqslant \tau_3+\tau_4$.

另一方面,$\forall \varepsilon (0 < 3\varepsilon < \tau_4 - \tau_3)$,当 $r \to 1^-$ 时,有

$$T(r,f_1) \leqslant (\tau_3+\varepsilon)(1-r)^{-\sigma(f_1)}, \quad (8)$$

$$T(r,f_2) \geqslant (\tau_4-\varepsilon)(1-r)^{-\mu(f_2)}. \quad (9)$$

由(8) ~ (9) 式及引理 1 可知

$$T(r,f_1+f_2) \geqslant T(r,f_2) - T(r,f_1) - \log 2 \geqslant (\tau_4-\varepsilon)(1-r)^{-\mu(f_2)} - (\tau_3+\varepsilon)(1-r)^{-\sigma(f_1)} - \log 2 \geqslant (\tau_4-\tau_3-3\varepsilon)(1-r)^{-\mu(f_2)}. \quad (10)$$

由(10) 式可知 $\mu(f_1+f_2) \geqslant \mu(f_2)$,且 $\underline{\tau}(f_1+f_2) \geqslant \tau_4 - \tau_3$. 综上所述,有 $\mu(f_1+f_2) = \mu(f_2)$ 且 $\tau_4 - \tau_3 \leqslant \underline{\tau}(f_1+f_2) \leqslant \tau_4+\tau_3$. 由引理 1,有 $T(r,f_1f_2) \leqslant T(r,f_1) + T(r,f_2)$ 以及 $T(r,f_1f_2) \geqslant T(r,f_2) - T(r,f_1) - O(1)$ 和 $T(r,1/f_2) = T(r,f_2) + O(1)$,类似可证 $\mu(f_1f_2) = \mu(f_1/f_2) = \mu(f_2)$ 及 $\underline{\tau}(f_2) - \tau(f_1) \leqslant \max\{\underline{\tau}(f_1f_2), \underline{\tau}(f_1/f_2)\} \leqslant \underline{\tau}(f_2) + \tau(f_1)$.

当 $\underline{\tau}(f_2) = \tau_4 = \infty$ 时,同理可证结论也成立.

定理 3 的证明　不妨假设 $\tau_5 = \tau_M(f_1) < \tau_M(f_2) = \tau_6 < \infty$,则由定义 5 知,$\forall \varepsilon (0 < 2\varepsilon < \tau_6 - \tau_5)$,存在 1 列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \to 1^-$,有

$$M(r_n,f_1) \leqslant \exp\{(\tau_5+\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma_9}\}, \quad (11)$$

$$M(r_n,f_2) > \exp\{(\tau_6-\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma_9}\}. \quad (12)$$

在圆周 $|z| = r_n (n = 1,2,\cdots)$ 上,选取点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $|f_2(z_n)| = M(r_n,f_2)$,则由(11) ~ (12) 式,有

$$M(r_n,f_1+f_2) \geqslant |f_1(z_n) + f_2(z_n)| \geqslant |f_2(z_n)| - |f_1(z_n)| \geqslant M(r_n,f_2) - M(r_n,f_1) \geqslant \exp\{(\tau_6-\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma_9}\} - \exp\{(\tau_5+\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma_9}\} \geqslant \frac{1}{2}\exp\{(\tau_6-\varepsilon)(1-r_n)^{-\sigma_9}\} (r_n \to 1^-).$$

因此可得 $\sigma_M(f_1+f_2) \geqslant \sigma_9$ 且 $\tau_M(f_1+f_2) \geqslant \tau_6$.

另一方面,由

$$M(r,f_1+f_2) \leqslant M(r,f_1) + M(r,f_2) \leqslant \exp\{(\tau_5+\varepsilon)(1-r)^{-\sigma_9}\} + \exp\{(\tau_6+\varepsilon)(1-r)^{-\sigma_9}\} \leqslant 2\exp\{(\tau_6+\varepsilon)(1-r)^{-\sigma_9}\}$$

可得 $\sigma_M(f_1+f_2) \leqslant \sigma_9$ 且 $\tau_M(f_1+f_2) \leqslant \tau_6$. 故有 $\sigma_M(f_1+f_2) = \sigma_9$ 且 $\tau_M(f_1+f_2) = \tau_M(f_2)$.

当 $\tau_M(f_2) = \tau_6 = \infty$ 时,同理可证结论也成立.

定理 4 的证明　由积分中值定理有 $f(z) = f(0) + \int_0^z f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta$,其中 $|z| = r < 1$,积分路径是单位圆内从 0 到 z 的直线. 从而有

$$M(r,f) \leqslant |f(0)| + \left|\int_0^z f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant |f(0)| + rM(r,f') \leqslant |f(0)| + M(r,f'),$$

即

$$M(r,f')\geqslant M(r,f)-|f(0)|. \quad (13)$$

因此可得 $\sigma_M(f')\geqslant\sigma_M(f)$. 另一方面,在圆周 $|z|=r\in[0,1)$ 中任取一点 z_0 使其满足 $|f'(z_0)|=M(r,f')$,其中 $s(r)=1-d(1-r)$, $0<d<1$. 由柯西不等式 $f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\zeta$,其中被积曲线为圆周 $C=\{\zeta:|\zeta-z_0|=s(r)-r\}$ 且由 $\max\{|f|:\zeta\in C\}\leqslant M(s(r),f)$,有

$$M(r,f')=|f'(z_0)|\leqslant$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}(s(r)-r)\right|d\theta\leqslant\frac{M(s(r),f)}{s(r)-r},$$
$$M(r,f')\leqslant M(s(r),f)/[(1-d)(1-r)]. \quad (14)$$

由引理 2 可得 $\sigma_M(f')\leqslant\sigma_M(f)$,所以 $\sigma_M(f)=\sigma_M(f')$. 若 $0<\sigma_M(f)<\infty$,则由(13)式与定义 5 易知 $\tau_M(f)\leqslant\tau_M(f')$. 由(14)式与定义 5 有

$$\frac{\log M(r,f')}{(1-r)^{-\sigma_M(f')}}\leqslant\frac{\log M(s(r),f)}{(1-r)^{-\sigma_M(f)}}+$$
$$\frac{\log[(1-d)^{-1}(1-r)^{-1}]}{(1-r)^{-\sigma_M(f)}}\leqslant\frac{\log M(s(r),f)}{(1-s(r))^{-\sigma_M(f)}}\cdot\left(\frac{1}{d}\right)^{\sigma_M(f)}+$$
$$\frac{\log[(1-d)^{-1}(1-r)^{-1}]}{(1-r)^{-\sigma_M(f)}},$$

令 $d\to1$,因此 $\tau_M(f')\leqslant\tau_M(f)$,所以

$$\tau_M(f)=\tau_M(f').$$

注 3 的证明 由引理 3,有

$$T(r,f')\leqslant2T(r,f)+m(r,f'/f)\leqslant3T(r,f)+O\{\log(1-r)^{-1}\}(r\notin E_2),$$

故 $\sigma(f')\leqslant\sigma(f)$. 另一方面,由引理 4,令 $R=(1+r)/2$, $0<r<1$,有

$$T(r,f)<(3+\log(4(1-r)^{-1})T((1+r)/2,f'), \quad (15)$$

由(15)式易得 $\sigma(f)\leqslant\sigma(f')$,故 $\sigma(f')=\sigma(f)$.

3 参考文献

[1] 杨乐. 值分布理论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982.
[2] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.
[3] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford:Clarendon Press,1964.
[4] Tsuji M. Potential theory in modern function theory[M]. Tokyo:Maruzen Press,1959.
[5] Sons L R. Unbouned functions in the unit disc[J]. Internet J Math Sci,1983,6(2):201-242.
[6] Heittokangas J. On complex linear differential equations in the unit disc[J]. Ann Acad Sci Fenn Math Diss,2000,122:1-54.
[7] 涂金,邓冠铁. 系数 A_0 起支配作用的高阶线性微分方程解的增长性[J]. 数学物理学报,2010,30A(4):945-952.
[8] 陈宗煊. 一类单位圆内微分方程解的性质[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2002,26(3):189-190.
[9] 毛志强,吴蝶. 单位圆内解析函数的一个性质[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2011,35(6):608-609.
[10] Levin B J. Distribution of zeros of entire functions[M]. Providence:Amer Math Soc,1980.
[11] Bank S S. A general theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations[J]. Composition Math,1972,25(1):61-70.
[12] Hayman W K. On the characteristic of functions meromorphic in the unit disk and of their integrals[J]. Acta Math,1964,112(1):181-214.

The Order and Type of Meromorphic Functions and Analytic Functions in the Unit Disc

TU Jin[1],HUANG Hai-xia[1],XU Hong-yan[2],CHEN Chun-fang[1]

(1. College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China;
2. Department of Informatics and Engineering,Jingdezhen Ceramic Institute,Jingdezhen Jiangxi 333403,China))

Abstract:The order,lower order and type of f_1+f_2, f_1f_2, f_1/f_2 are investigated by using the Nevanlinna value distribution theory,where $f_1(z)$, $f_2(z)$ are meromorphic functions or analytic functions with the same order and different type in the unit disc,and some results are obtained which improve some previous results.

Key words:unit disc;meromorphic function;analytic function;order;type

(责任编辑:王金莲)