第 37 卷 第 5 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 5
2013 年 9 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Sep. 2013

文章编号:1000-5862(2013)05-0453-04

复振荡中的辐角分布

何 涛,易才凤*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:利用无限级型函数和无限级 Borel 方向的一个等价条件,研究了微分方程$f''+A(z)f=0$解的零点聚值线和 Borel 方向之间的关系,其中$A(z)$是超越亚纯函数且$\sigma(A)<\infty$.

关键词:亚纯函数;无穷级;Borel 方向;零点聚值线

中图分类号:O 174.52 **文献标志码**:A

0 引言及主要结果

本文假定读者熟悉 Nevanlinna 值分布论的基本理论和标准记号[1-2],以$T(r,f)$记复平面上亚纯函数f的特征函数,而以$\lambda(f)$和$\sigma(f)$分别记为f的零点收敛指数和增长级,并用$\sigma_2(f)$表示亚纯函数f的超级. 为叙述和证明定理的需要,再介绍熊庆来无限级的相关概念[3].

定义 1 设$g(z)$是无限级亚纯函数,实函数$\rho(r)$称为函数$g(z)$的熊庆来无限级,如果$\rho(r)$满足如下性质:

(i) $\rho(r)$是$r\geqslant r_0(r_0>0)$上的连续非减函数并且$\rho(r)\to\infty\ (r\to\infty)$;

(ii) 函数$U(r)=r^{\rho(r)}\ (r\geqslant r_0)$满足

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log U(R)}{\log U(r)}=1,\quad R=r+\frac{r}{\log U(r)};$$

(iii) $\displaystyle\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,g)}{\rho(r)\log r}=1.$

上述定义最先为熊庆来所介绍,关于$\rho(r)$的存在性,庄圻泰[4]给出了其简单的证明.

定义 2 射线J:$\arg z=\theta$称为$g(z)$的 1 条$\rho(r)$级 Borel 方向,如果

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,g=a)}{\rho(r)\log r}=1,$$

$\forall\varepsilon>0$和任意的复数$a\in C_\infty$成立,最多除去 2 个例外的a值,其中$n(r,\theta,\varepsilon,g=a)$表示$g(z)$在扇形域$\Omega(\theta,\varepsilon,r)=\{z:\theta-\varepsilon<\arg z<\theta+\varepsilon,|z|<r\}$内$a$值点的个数.

1982 年,S. Bank 和 I. Laine 在文献[5]中首次运用亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论研究了 2 阶线性微分方程

$$f''+A(z)f=0 \tag{1}$$

解的振荡性质,其中$A(z)$为整函数. 后来,关于微分方程解的振荡性质的研究被国内外许多学者所关注,并得到了一系列重要的研究成果[6-9]. 2004 年,伍胜健从辐角分布的角度,对 2 阶方程解的零点聚值线和 Borel 方向之间的关系进行了研究,得到如下有趣的结果.

定理 A[10] 假设$A(z)$是级为$\sigma(A)<\infty$的超越整函数,f_1,f_2是方程(1)的 2 个线性无关解,记$E=f_1f_2$,并且E的零点收敛指数$\lambda(E)=\infty$,则从原点出发的半直线J:$\arg z=\theta$是E的 1 条∞级 Borel 方向的充要条件是$\lambda_\theta(E)=\infty$,其中

$$\lambda_\theta(E)=\lim_{\varepsilon\to0}\lambda_{\theta,\varepsilon}(E),$$

$$\lambda_{\theta,\varepsilon}(E)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\log r}.$$

吴昭君,孙道椿将定理 A 中的∞级 Borel 方向换成熊庆来无限级,得到了下面的结论.

定理 B[11] 假设$A(z)$是级为$\sigma(A)<\infty$的超越整函数,f_1,f_2为方程(1)的 2 个线性无关解,令$E=f_1f_2$,再设$\lambda(E)=\infty$,$\rho(r)$是E的一个无限级,则从原点出发的半直线J:$\arg z=\theta$是E的 1 条$\rho(r)$级 Borel 方向的充要条件是

$$\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r}=1.$$

伍胜健在文献[10]中研究整函数解的零点聚值线和 Borel 方向的关系时,运用了最大模这个重要

收稿日期:2013-04-10

基金项目:国家自然科学基金(11171170)资助项目.

通信作者:易才凤(1955-),女,江西吉安人,教授,主要从事复分析方向研究.

工具,而在讨论亚纯系数的相关问题时,最大模的工具不适用了,从而关于亚纯系数微分方程解的零点聚值线和 Borel 方向的相关结果比较少. 2009 年,田宏根,吴昭君则利用角域上的特征函数,讨论了当方程(1) 的系数为超越亚纯函数时,方程解的零点聚值线和 Borel 方向之间的关系,证明了下面的定理 C,推广了定理 A.

定理 C[12] 假设 $A(z)$ 是超越亚纯函数,其增长级 $\sigma(A) < \infty$,并设 f_1,f_2 为方程(1) 的 2 个线性无关解. 令 $E = f_1f_2$,如果 $\sigma(E) = \infty$,则从原点出发的半直线 $J:\arg z = \theta$ 是 E 的 1 条 ∞ 级 Borel 方向的充要条件是 $\lambda_\theta(E) = \infty$.

受定理 B 的启发,本文将定理 C 中的 ∞ 级换成熊庆来的无限级,证明了如下的定理.

定理 1 假设 $A(z)$ 是超越亚纯函数,其增长级 $\sigma(A) < \infty$,设 f_1,f_2 是方程(1) 的 2 个线性无关解. 令 $E = f_1f_2$,再设 $\sigma(E) = \infty$,而 $\rho(r)$ 是 E 的一个熊庆来无限级,则射线 $J:\arg z = \theta$ 是 E 的 1 条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向的充要条件是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r} = 1.$$

1 引理

为叙述和证明引理的需要,先介绍角域内的相关记号与 Nevanlinna 基本理论.

记 $\Omega(\alpha,\beta) = \{z:\alpha < \arg z < \beta, |z| > 0\}$,$\overline{\Omega}(\alpha,\beta,r) = \{z:\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta, 0 < |z| < r\}$.

设 $f(z)$ 是一个亚纯函数,当 $r > 1$ 时,定义

$$A_{\alpha,\beta}(r,f) = \frac{k}{\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^k} - \frac{t^k}{r^{2k}}\right)\left\{\log^+ |f(te^{i\alpha})| + \log^+ |f(te^{i\beta})|\right\}\frac{dt}{t},$$

$$B_{\alpha,\beta}(r,f) = \frac{2k}{\pi r^k}\int_\alpha^\beta\log^+ |f(re^{i\alpha})|\sin k(\theta-\alpha)d\theta,$$

$$C_{\alpha,\beta}(r,f) = 2\sum_{b_v\in\Omega}\left(\frac{1}{|b_v|^k} - \frac{|b_v|^k}{r^{2k}}\right)\sin k(\beta_v - \alpha),$$

其中 $k = \pi/(\beta-\alpha)$,和式 $\sum\limits_{b_v\in\Omega}$ 是对 $f(z)$ 在扇形区域 $\Omega(\alpha,\beta,r)$ 内的所有极点 $b_v = |b_v|e^{i\theta}$ 求和,重级极点按重数计算. 若重级极点只计 1 次,则记为 $\overline{C}_{\alpha,\beta}(r,f)$. $\forall a \in \mathbf{C}$,记

$$C_{\alpha,\beta}(r,a) = C_{\alpha,\beta}(r,(f-a)^{-1}).$$

进一步定义

$$D_{\alpha,\beta}(r,f) = A_{\alpha,\beta}(r,f) + B_{\alpha,\beta}(r,f),$$
$$S_{\alpha,\beta}(r,f) = C_{\alpha,\beta}(r,f) + D_{\alpha,\beta}(r,f).$$

为简单起见,将 $A_{\alpha,\beta}(r,f)$,$B_{\alpha,\beta}(r,f)$,$C_{\alpha,\beta}(r,f)$,$D_{\alpha,\beta}(r,f)$,$S_{\alpha,\beta}(r,f)$ 分别简记为 $A(r,f)$,$B(r,f)$,$C(r,f)$,$D(r,f)$,$S(r,f)$.

引理 1 设 $f(z)$ 是复平面上的亚纯函数,$\Omega(\alpha,\beta)$ 为角域,其中 $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$,则

(i)[13] $\forall a \in \mathbf{C}$,有

$$S(r,(f-a)^{-1}) = S(r,f) + O(1),$$

其中 $r > 1$;

(ii) $\forall r < R$,有

$$A\left(r,\frac{f'}{f}\right) \leqslant K\left\{\left(\frac{R}{r}\right)^k\int_1^R\frac{\log T(t,f)}{t^{1+k}}dt + \log\frac{r}{R-r} + \log\frac{R}{r} + 1\right\},$$

$$B\left(r,\frac{f'}{f}\right) \leqslant \frac{4k}{r^k}m\left(r,\frac{f'}{f}\right),$$

其中 $k = \pi/(\beta-\alpha)$,K 是仅依赖于 r 和 R 的正常数.

(iii)[14] 对于任意 q 个不同的复数 $a_j \in C_\infty$,$j = 1,2,\cdots,q$,有 $(q-2)S(r,f) < \sum\limits_{j=1}^q\overline{C}(r,a_j) + h(r)$,

其中

$$h(r) = D\left(r,\frac{f'}{f}\right) + \sum_{1\leqslant j\leqslant q,a_j\neq\infty}D\left(r,\frac{f'}{f-a_j}\right) + O(1).$$

由文献[13] 可知 $h(r) = O(\log U(r))$,因此,有

$$(q-2)S(r,f) < \sum_{j=1}^q\overline{C}(r,a_j) + O(\log U(r)).\quad(2)$$

对于无限级亚纯函数的 Borel 方向,庄圻泰证明了如下定理.

引理 2 设 $f(z)$ 是复平面上的无限级亚纯函数,$\rho(r)$ 是 $f(z)$ 的一个熊庆来无穷级,射线 $L:\arg z = \theta_0$ 是函数 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向的充要条件是

$$\forall\eta(0 < \eta < \pi/2),\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\eta,\theta+\eta}(r,f)}{\rho(r)\log r} = 1.$$

引理 3 对任意充分小的 $0 < \eta < \pi/2$,如果

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\eta,\theta+\eta}(r,E)}{\rho(r)\log r} < 1,$$

则
$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\eta/3,E=0)}{\rho(r)\log r} < 1.$$

证 假设结论不成立,则存在充分小的 $0 < \varepsilon < \pi/2$,使得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon/3,E=0)}{\rho(r)\log r} = 1,$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r} < 1.$$

由定义 1,有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon/3,E=0)}{\log U(R)} =$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon/3,E=0)}{\log U(r)}\frac{\log U(r)}{\log U(R)}\geqslant$$
$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon/3,E=0)}{\log U(r)}\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log U(r)}{\log U(R)}=1,$$

则 $\forall\tau,0<\tau<1-\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)/(\rho(r)\log r)$,存在序列 $\{R_n\}$,$R_n=r_n+r_n/\log U(r_n)\to\infty\ (n\to\infty)$,并满足

$$n(r_n)=n(r_n,\theta,\varepsilon/3,E=0)\geqslant(U(R_n))^{1-\tau}.$$

假设 $b_v=|b_v|e^{i\beta_v}(v=1,2,\cdots)$ 是 $E=0$ 在 $\Omega(\theta-\varepsilon/3,\theta+\varepsilon/3)$ 内的根,重根按重数计算,由于 $\theta-\varepsilon/3<\beta_v<\theta+\varepsilon/3,v=1,2,\cdots$,则 $\varepsilon/6<\beta_v-\theta+\varepsilon/2<5\varepsilon/6$,从而 $\sin[\pi(\beta_v-\theta+\varepsilon/2)/\varepsilon]>1/2$. 由关于 $S(r,f)$ 的第一基本定理,有

$$S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(R_n,E)\geqslant C_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(R_n,a)+O(1)\geqslant C_{\theta-\varepsilon/2,\theta+\varepsilon/2}(R_n,a)+O(1)\geqslant 2\sum_{\substack{1<|b_v|<r_n\\ \theta-\varepsilon/2<\beta_v<\theta+\varepsilon/2}}\left(\frac{1}{|b_v^k|}-\frac{|b_v^k|}{R_n^{2k}}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{\varepsilon}\left(\beta_v-\theta+\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(1)\geqslant 2\sum_{\substack{1<|b_v|<r_n\\ \theta-\varepsilon/3<\beta_v<\theta+\varepsilon/3}}\left(\frac{1}{|b_v^k|}-\frac{|b_v^k|}{R_n^{2k}}\right)\sin\frac{\pi}{\varepsilon}\left(\beta_v-\theta+\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(1)\geqslant\sum_{\substack{1<|b_v|<r_n\\ \theta-\varepsilon/3<\beta_v<\theta+\varepsilon/3}}\left(\frac{1}{|b_v^k|}-\frac{|b_v^k|}{R_n^{2k}}\right)+O(1),$$

其中 $k=\pi/\varepsilon$. 将上式中的和式用 Stieltjes 积分表示,并进行分部积分可得

$$S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(R_n,E)\geqslant\int_1^{r_n}\frac{1}{t^k}\mathrm{d}n(t)-\frac{1}{R_n^{2k}}\int_1^{r_n}t^k\mathrm{d}n(t)+O(1)\geqslant k\int_1^{r_n}\frac{n(t)}{t^{k+1}}\mathrm{d}t+\frac{n(r_n)}{r_n^k}-\frac{r_n^k n(r_n)}{R_n^{2k}}+\frac{k}{R_n^{2k}}\int_1^{r_n}n(t)t^{k-1}\mathrm{d}t+O(1)\geqslant\frac{n(r_n)}{r_n^k}-\frac{r_n^k n(r_n)}{R_n^{2k}}+O(1)\geqslant\left(\frac{1}{r_n^k}-\frac{1}{R_n^k}\right)n(r_n)+O(1),$$

于是

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r}\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(R_n,E)}{\rho(R_n)\log R_n}\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log\left(\frac{1}{r_n^k}-\frac{1}{R_n^k}\right)}{\rho(R_n)\log R_n}+\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log n(r_n)}{\rho(R_n)\log R_n}\geqslant 1-\tau+\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log(R_n^k-r_n^k)-k(\log R_n+\log r_n)}{\rho(R_n)\log R_n}=1-\tau.$$

这与 τ 的假设矛盾,即引理 3 得证.

引理 4[15]　假设 $f(z)=g(z)/d(z)$ 为无穷级亚纯函数,其超级 $\sigma_2(f)=\sigma$,其中 $g(z)$ 和 $d(z)$ 是整函数且满足 $\sigma(d)<\infty$. 又设 $A(z)$ 为亚纯函数满足 $\sigma(A)=\beta<\infty$,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 1 列趋于无穷的 $\{r_k\}$ 使得对于满足 $|z|=r_k$ 和 $|g(z)|=M(r_k,g)$ 的 z,当 k 充分大时,有

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_g(r_k)}{z}\right)^n(1+o(1))\ (n\geqslant 1),$$
$$\sigma_2(f)=\lim_{k\to\infty}\log\log\nu_g(r_k)/\log r_k,$$
$$\exp\{-r^{\beta+\varepsilon}\}\leqslant|A(z)|\leqslant\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}.$$

引理 5　设 $A(z)$ 是超越亚纯函数,其级为 $\sigma(A(z))<\infty$,则方程(1)的任意非零亚纯解的超级 $\sigma_2(f)\leqslant\sigma(A(z))$.

证　假设 $f(z)$ 为方程(1)的非零亚纯解,将(1)改写为

$$-A(z)=f''(z)/f(z).\tag{3}$$

因为 f 的极点只能产生于 A 的极点,所以 $\lambda(1/f)\leqslant\sigma(A)$. 利用 Hadamard 分解定理,可将 f 表为 $f(z)=g(z)/d(z)$,其中 $g(z)$ 和 $d(z)$ 都是整函数,且 $d(z)$ 的零点是 $f(z)$ 的极点,从而 $\lambda(d)=\sigma(d)=\lambda(1/f)\leqslant\sigma(A)<\infty$,再由引理 4 知,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 1 列趋于无穷的 $\{r_k\}$ 使得对满足 $|z|=r_k$ 和 $|g(z)|=M(r_k,g)$ 的 z 有

$$\frac{f''(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_g(r_k)}{z}\right)^2(1+o(1)),$$
$$\sigma_2(f)=\lim_{k\to\infty}\frac{\log\log\nu_g(r_k)}{\log r_k},$$
$$\exp\{-r^{\sigma(A)+\varepsilon}\}\leqslant|A(z)|\leqslant\exp\{r^{\sigma(A)+\varepsilon}\}.$$

结合(3)式可得

$$\nu_g^2(r_k)(1+o(1))\leqslant r_k^2\exp\{r_k^{\sigma(A)+\varepsilon}\}.$$

由于 ε 是任意的,对上式两边同时取 2 次对数再除以 $\log r_k$,当 k 充分大时,即 $\sigma_2(f)\leqslant\sigma(A(z))$.

2　定理的证明

定理 1 的证明　由引理 2,只需证明 $\overline{\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}}\dfrac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r}=1$ 的充要条件是 $\forall\varepsilon>0$,$\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r}=1$ 成立,则定理 1 得证.

下面证明这一结论.

必要性　由引理 3,$\forall\varepsilon,0<\varepsilon<\eta/3$,由

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)/(\rho(r)\log r)=1,$$

必有 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)/(\rho(r)\log r)\geqslant 1$.

另一方面,由于

$$\overline{C}_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,a) \leqslant 2n(r,\theta,\varepsilon,E=a),$$

而 $n(r,\theta,\varepsilon,E=a) \leqslant n(r,E=a) \leqslant N(R,E=a)(\log R/r)^{-1} \leqslant T(R,E=a)(\log R/r)^{-1}$,其中 $R = R + r/\log U(r)$,$U(r) = r^{\rho(r)}$,$\forall r > 1$. 由 $\rho(r)$ 是 E 的一个熊庆来无穷级可知,$\forall \varepsilon > 0$,当 r 充分大时,有 $T(R,E=a) < U(R)^{1+\varepsilon}$,于是有

$$\overline{C}_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,a) \leqslant 2n(r,\theta,\varepsilon,E=a) < 2(\log R/r)^{-1}(U(R))^{1+\varepsilon},$$

再结合(2)式,并取 $q=3$ 得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\left[\overline{C}_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,a)+o(\log(U(r)))\right]}{\rho(r)\log r} \leqslant 1.$$

所以 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r} = 1.$

综上所述必要性得证.

充分性 由引理5知方程(1)的任意非零亚纯解满足 $\sigma_2(f) \leqslant \sigma(A)$,因此 $\sigma_2(f_i) \leqslant \sigma(A)$,$i=1,2$. $\forall \theta \in R$ 和充分小的 $\varepsilon > 0$($\sigma(A) - \pi/(2\varepsilon) < 1$). 令 $R = 2r$,由引理1(ii),有

$$A\left(r,\frac{f_i'}{f_i}\right) \leqslant O\left(\int_1^{2r}\frac{\log^+ T(t,f)}{t^{1+\pi/(2\varepsilon)}}\mathrm{d}t\right) = O\left(\int_1^{2r}\frac{t^{\sigma(A)+1}}{t^{1+\pi/(2\varepsilon)}}\mathrm{d}t\right) = O(1),i=1,2.$$

根据对数导数引理

$$m(r,f_i'/f_i) = O(\log^+ T(r,f_i)+\log r) = O(r^{\sigma(A)+1}),i=1,2.$$

结合引理1和上式得

$$B(r,f_i'/f_i) = O(r^{\sigma(A)+1-\pi/(2\varepsilon)}) = O(1),i=1,2.$$

因此

$$D(r,f_i'/f_i) = O(1),i=1,2.$$

另一方面,由文献[6]知 f_1 和 f_2 的 Wronsky 行列式 W 是1个非零常数,记其为 $c(\neq 0)$. 又

$$\frac{1}{E} = \frac{W}{E}\frac{1}{c} = \frac{1}{c}\frac{f_2'}{f_2} - \frac{1}{c}\frac{f_1'}{f_1},$$

所以 $D(r,1/E) = O(1)$.

又 $\forall \theta \in [0,2\pi]$ 和充分小的 $\varepsilon > 0$,在角域 $\{z:\theta-\varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \theta+\varepsilon\}$ 内,满足

$$S(r,E) = C(r,1/E) + O(1).$$

所以,如果 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)/(\rho(r)\log r) = 1$,可知

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log C_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,1/E)}{\rho(r)\log r} = 1.$$

又因为

$$C_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,1/E) \leqslant 2n(r,\theta,\varepsilon,E=0),$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r} \geqslant 1,$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r} = 1.$$

故充分性成立.

3 参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford:Clarendon Press,1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京:科学出版社,1982.

[3] Chuang Chitai. On Borel directions of meromorphic functions of infinite order(II) [J]. Bulletin of the Hongkong Mathematical Society,1999,2(2):305-323.

[4] Chuang Chitai. Sur les fonctions-types [J]. Sci Sinica,1961,10(1):171-181.

[5] Bank S B,Liane I. On the oscillation theory of $f''+Af=0$ where A is entire [J]. Bull Amer Math Soc,1982,6(1):95-98.

[6] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. New York:Walter de Gruyter,1993.

[7] 高仕安,陈宗煊,陈特为. 线性微分方程的复振荡理论 [M]. 武汉:华中理工大学出版社,1998.

[8] 石磊,易才凤. 一类高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(3):230-233.

[9] 刘旭强,易才凤. 关于2阶线性微分方程 $f''+Af'+Bf=0$ 解的增长性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(2):171-174.

[10] Wu Shengjian. Angular distribution in complex oscillation theory [J]. Sci China Math,2005,48(1):107-114.

[11] 吴昭君,孙道椿. 关于复振荡中的辐角分布 [J]. 数学学报:中文版,2007,50(6):1297-1304.

[12] 田宏根,吴昭君. 2阶亚纯系数微分方程解的零点分布 [J]. 应用数学,2009,22(2):365-369.

[13] Goldberg A A,Ostrovskii I V. The distribution of values of meromorphic functions [M]. Moscow:Izdat Nauk,1970.

[14] Zheng Jianhua. Value distribution of mermorphic functions [M]. Berlin:Spring-Verlag,2010.

[15] 王珺,吕巍然. 2阶线性微分方程亚纯解的不动点与超级 [J]. 应用数学学报,2004,27(1):72-80.

(下转第461页)

[17] Mejia D,Pommerenke Ch. On hyperbolically convex functions [J]. The Journal of Geometric Analysis, 2000, 10(2):365-378.
[18] Hille E. Analytic function theory:II [M]. New York:Chelsea Publishing Company,1962.

On the Inner Radius of Univalency for Curvilinera Polygons

YANG Zong-xin,DING Jing
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: By using the idea in constructing the Schwarz-Christoffel formular,the inner radius of univalency for curvilinear polygons such as curvilinear triangles and regular circular polygons is studied. And explicit value of those domains is obtained. The results suggest that those domains are all Nehari disk.

Key words: Schwarzian derivative;the inner radius of univalency;curvilinear polygon

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 456 页)

On Angular Distribution in Complex Oscillation

HE Tao,YI Cai-feng*
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: It is investigated that connection between the cluster ray of zero-sequence and Borel direction of solutions of second order differential equations $f''+A(z)f=0$ where $A(z)$ is a meromorphic function of finite order,by using the infinity order type function and a sufficient and necessary condition for infinity order Borel direction which was established.

Key words: meromorphic function;infinity orde;Borel direction;the cluster ray of zero-sequence

(责任编辑:王金莲)