文章编号:1000-5862(2013)05-0457-05

圆弧多边形的单叶性内径

杨宗信,丁　静

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌　330022)

摘要:根据圆弧多边形区域的 Schwarz-Christoffel 变换的构造过程中 Schwarz 导数的作用,得到了圆弧三角形和正圆弧多边形区域的单叶性内径,证明了它们都是 Nehari 圆.

关键词:Schwarz 导数;单叶性内径;圆弧多边形

中图分类号:O 174.51　　**文献标志码**:A

0　引言

设 D 为复平面 C 上的边界多于 2 点的单连通区域,$\rho_D(z)|\mathrm{d}z|$ 为其曲率 -4 的双曲度量. 用 B 表示单位圆盘 $B=\{z:|z|<1\}$,U 表示上半平面 $U=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$,则 $\rho_B(z)=1/(1-|z|^2)$,$\rho_U(x+\mathrm{i}y)=1/(2y)$. 对于一般的单连通区域 D,其双曲度量密度由公式 $\rho_D(z)=|h'(z)|/(1-|h(z)|^2)$ 确定,其中 $h:D\to B$ 为共形映射.

设 f 是区域 D 内局部单叶的解析函数,即 $\forall z\in D$,$f'(z)\neq 0$. 定义 f 在点 z 处的 Schwarz 导数为 $S_f(z)=(f''(z)/f'(z))'-(f''(z)/f'(z))^2/2$. 对于局部单叶的全纯函数,Schwarz 导数是有意义的. 对于半纯函数,其 Schwarz 导数在极点处的定义为 $S_f(z)=S_{1/f}(z)$. 这样,在区域 D 内处处局部单叶的半纯函数的 Schwarz 导数在区域 D 内处处有定义,并且它为全纯函数. 特别地,Möbius 变换的 Schwarz 导数为 0.

设 f 和 g 都是局部单叶的半纯函数,并且复合函数 $f\circ g$ 有意义,则

$$S_{f\circ g}(z)=S_f(g(z))(g'(z))^2+S_g(z).$$

对于单连通区域 D 内任意给定的全纯函数 φ,必定存在区域 D 内局部单叶的解析函数 f,使得 $S_f=\varphi$. 设 f 是单连通区域 D 内局部单叶的解析函数,定义 S_f 的范数为 $\|S_f\|_D=\sup\limits_{z\in D}|S_f(z)|\rho_D^{-2}(z)$. $\|S_f\|_D$ 具有如下基本性质:

(ⅰ) 当且仅当 f 是 Möbius 变换时,$\|S_f\|_D=0$;

(ⅱ) 若 g 为 D 上的共形映照,f 为 $g(D)$ 上的共形映照,则 $\|S_{f\circ g}\|_D=\|S_f-S_{g^{-1}}\|_{g(D)}$;

(ⅲ) 设 f 为 D 上的共形映照,则 $\|S_f\|_D=\|S_{f^{-1}}\|_{f(D)}$;

(ⅳ) 设 φ 和 ψ 是任给的 Möbius 变换,则 $\|S_f\|_D=\|S_{\varphi\circ f\circ\psi}\|_{\psi^{-1}(D)}$.

设 D 是扩充复平面上的单连通区域,定义 D 的单叶性内径 $\sigma(D)$ 为

$$\sigma(D)=\sup\{\alpha:\|S_f\|_D\leqslant\alpha\Rightarrow f\text{在}D\text{内单叶}\},$$

这一定义等价于

$$\sigma(D)=\inf\{\|S_f\|_D:f\text{在}D\text{内单叶,但}f(D)\text{不是拟圆}\}.$$

根据 $\|S_f\|_D$ 的基本性质(ⅳ)知,当 φ 为 Möbius 变换时,$\sigma(\varphi(D))=\sigma(D)$.

单叶性内径在万有 Teichmüller 空间理论中具有重要意义. L. V. Ahlfors 等[1] 证明了:对于定义在单连通区域 D 内的局部单叶的解析函数 f,如果 $\|S_f\|_D<\sigma(D)$,则 f 在 D 内单叶且可以拟共形延拓到整个复平面. 文献 [2] 和文献 [3] 证明了对于单连通区域 D,当且仅当 D 是拟圆时,$\sigma(D)>0$.

关于单叶性内径的研究始于上世纪中叶,但得到的具体结果还是很少. 文献 [4] 和文献 [5] 证明了单位圆盘的单叶性内径 $\sigma(B)=2$. 随后,文献 [6] 证明了对扩充复平面上一切单连通区域 D 都有 $\sigma(D)\leqslant 2$,当且仅当 D 为圆盘或半平面时有 $\sigma(D)=2$,此时 D 为单位圆盘在 Möbius 变换的像.

若用 S 表示上半平面通过映照 $h(z)=\log z$ 得到的平行带域,则 $\sigma(S)=0$. O. Lehto 等[7-8] 给出了角域的单叶性内径:若 $A_k=\{z:z\in\mathbf{C},0<\arg z<k\pi\}$,

收稿日期:2013-06-23

基金项目:国家自然科学基金(11071063,11261022)和江西省教育厅科研(GJJ12175)资助项目.

作者简介:杨宗信(1966-),男,江西兴国人,教授,博士,主要从事单复变几何函数论方面的研究.

则当 $0 < k < 1$ 时,$\sigma(A_k) = 2k^2$;当 $1 < k < 2$ 时,$\sigma(A_k) = 4k - 2k^2$. 文献[9] 证明了对正 n 边形的内部区域 P_n,有 $\sigma(P_n) = 2(n-2)^2/n^2$.

对于一般的区域,文献[10] 计算了矩形和等角六边形的单叶性内径,证明了:当矩形 R 的长宽比小于某一常数时,$\sigma(R) = 1/2$,与正方形的单叶性内径相等;当等角六边形 H 的边为 $baabaa$ 且 $b/a \leqslant 1.671\ 17\cdots$ 时,$\sigma(H) = 8/9$,这与正六边形的单叶性内径相同. L. M. Wieren 研究的区域都有 1 个共同的特征,即 $\sigma(D) = 2 - \| S_h \|_B$,其中 h 为 B 到 D 的共形映照. L. M. Wieren 称具有这种特征的区域为 Nehari 圆(Nehari disk). 利用 L. M. Wieren 的方法,文献[11] 得到了菱形的单叶性内径,并证明了菱形是 Nehari 圆. 笔者也对 Nehari 圆和四边形区域的单叶性内径做出过一些结果[12-13].

L. M. Wieren 研究单叶性内径的方法需要构造单位圆到特定区域的 Schwarz-Christoffel 变换,再对该变换的 Schwarz 导数的范数进行估计. 虽然 Riemann 映照定理确保了单位圆到边界多于一点的单连通区域的共形映照的存在性,但构造一个具体的映照却不是一件容易的事.

根据 Schwarz-Christoffel 变换的构造思路[14-15],对于一般的多边形区域,在相差一个相似变换的情况下,Schwarz-Christoffel 变换 f 由其对数导数 f''/f' 决定;而当区域的边界由圆弧(其中可以有直线段)组成时,在相差 1 个 Möbius 变换的情况下,Schwarz-Christoffel 变换 f 由其 Schwarz 导数 $S_f = (f''/f')' - (f''/f')^2/2$ 决定.

定义 1 设 D 是复平面上的单连通区域,它的边界是 n 段圆弧(圆弧之中有些可能是直线段,直线段可看作特殊的圆弧),则称 D 为圆弧多角形,在不致引起混淆的情况下,也称之为圆弧多边形. 不失一般性,可以假定 D 是一有界区域,否则的话,通过一次适当的分式线性变换,可使之为有界区域,且仍为圆弧多角形. 若圆弧 n 角形 D 的 n 个内角都等于 $\alpha\pi(0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$,则称 D 为等角圆弧 n 边形;若还有 D 的 n 条边的弧长都相等,则称其为正圆弧 n 边形,记为 $\tilde{P}_n(\alpha)$.

边界两两正交的圆弧多边形区域是双曲凸区域[16-17] 的典型例子,可是,单位圆到圆弧多边形区域的 Schwarz-Christoffel 变换的构造更加困难,相关的单叶性内径结果更少. 文献[9] 用几何的方法求出了标准圆弧三角形的单叶性内径. 本文用解析的方法得到了圆弧三角形和正圆弧 n 边形区域的单叶性内径,并证明了它们都是 Nehari 圆.

1 圆弧三角形区域

对于复平面上任意 2 个不同的点 z_1,z_2,用(z_1,z_2)表示连接 z_1 与 z_2 的开线段,$[z_1,z_2]$ 表示连接 z_1 与 z_2 的闭线段. 任一开(闭)线段经 Möbius 变换得到在扩充复平面下的像,称之为开(闭)圆弧. 对于圆弧 γ,称扩充复平面上包含 γ 的圆周或直线为 γ 的支撑圆周,记为 $C(\gamma)$.

对于 Jordan 区域 $D \in \overline{C}$,当 D 的边界由 3 条圆弧首尾相接且不是任何 2 条圆弧之并时,称区域 D 为圆弧三角形,并称 3 条圆弧为此三角形的边,称它们的端点为 D 的顶点. 若 w 为 D 的顶点,则称 D 的两边的过 w 的切线正向的夹角为其内角. 若 D 是圆弧三角形,T 为 Möbius 变换,则 $T(D)$ 仍是圆弧三角形. 若圆弧三角形 D 满足条件:对于 D 的任意 2 边 γ_1,γ_2 有 $C(\gamma_1) \cap C(\gamma_2) = \{v, v'\}$,其中 v 是 D 的顶点且 $v' \in \overline{C}\backslash\overline{D}$,则称 D 为标准圆弧三角形.

若 Jordan 区域 $D \in \overline{C}$ 的边界由 2 条圆弧相交而成,交点分别为 a 和 b,交角(内角)为 α,则通过 Möbius 变换 $z \to (z-a)/(z-b)$ 可将区域 D 映射为角域 $A_\alpha = \{z: 0 < \arg z < \alpha\pi\}, 0 < \alpha \leqslant 2$. 由此可知,区域 D 的单叶性内径与角域 A_α 的相同.

文献[10] 证明了:若区域 D_n 和 D 都是单连通区域,在 Caratheodory 核收敛意义下,D_n 关于 w_0 收敛于 D,则有 $\sigma(D) \geqslant \limsup\limits_{n\to\infty}\sigma(D_n)$,并由此证明了当凸 n 边形 P 的某个内角大小为 $k\pi$ 时,$\sigma(P) \leqslant 2k^2$.

对于圆弧多边形 $\tilde{P}$,如果其最小内角为 $k\pi$,$0 < k < 1$,通过一系列适当的 Möbius 变换 T_n,可以用 $\tilde{P}$ 在这列 Möbius 变换下的像穷尽角域 A_k,即 $T_n(\tilde{P})$ 关于 $\tilde{P}$ 内某一给定点收敛于 $\tilde{P}$,从而有

引理 1 若圆弧多边形 $\tilde{P}$ 的最小内角为 $k\pi$,$0 < k < 1$,则 $\sigma(\tilde{P}) \leqslant 2k^2$.

由引理 1 可得

推论 1 设 D 为等角圆弧 n 边形区域,其内角等于 $\alpha\pi$,$0 < \alpha < 1$,则 $\sigma(D) \leqslant 2\alpha^2$.

引理 2 若 D 为单连通区域,h 是单位圆 B 到 D 的共形映射,则 $\sigma(D) \geqslant 2 - \| S_h \|_B$.

定理 1 若 $\tilde{P}_3$ 是标准圆弧三角形,其最小内角为 $\gamma\pi$,则 $\sigma(\tilde{P}_3) = 2\gamma^2$.

证 设 $\tilde{P}_3$ 是标准圆弧三角形的内部区域,其

顶点分别 A,B,C，对应的内角分别为 $\alpha\pi,\beta\pi,\gamma\pi$ $(\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma)$，根据双曲几何的基本理论，有 $\alpha+\beta+\gamma\leqslant 1$. 设 $f:B\to\tilde{P}_3$ 是单位圆到 $\tilde{P}_3$ 的 Riemann 映照，由于 $\sigma(\tilde{P}_3)$ 在 Möbius 变换下的不变性，不妨设 $A=f(1),B=f(\mathrm{i}),C=f(-1)$. 在不涉及椭圆积分的繁杂计算的情形下，研究 f 的 Schwarz 导数.

由 Schwarz-Christoffel 变换的构造过程，函数 f 的 Schwarz 导数：

$$S_f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\alpha^2}{(z-1)^2}+\frac{1-\beta^2}{(z-\mathrm{i})^2}+\frac{1-\gamma^2}{(z+1)^2}\right]+\frac{c_1}{z-1}+\frac{c_2}{z-\mathrm{i}}+\frac{c_3}{z+1},$$

其中 c_1,c_2,c_3 满足方程组

$$\begin{cases}c_1+c_2+c_3=0,\\ \frac{1}{2}(3-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)+c_1+\mathrm{i}c_2-c_3=0,\\ (1-\alpha^2)+\mathrm{i}(1-\beta^2)-(1-\gamma^2)+c_1-c_2+c_3=0,\end{cases}$$

解这个方程组得到

$$\begin{cases}c_1=\frac{1}{4}[(2+\mathrm{i})\alpha^2+\mathrm{i}\beta^2-\mathrm{i}\gamma^2-2-\mathrm{i}],\\ c_2=\frac{1}{2}(-\alpha^2-\mathrm{i}\beta^2+\gamma^2+\mathrm{i}),\\ c_3=\frac{1}{4}[-\mathrm{i}\alpha^2+\mathrm{i}\beta^2+(\mathrm{i}-2)\gamma^2+2-\mathrm{i}].\end{cases}$$

经过一些初等运算可得

$$S_f(z)=[(z^2-1)(z-\mathrm{i})]^{-2}\{[(1+\mathrm{i})\alpha^2-\beta^2+(1-\mathrm{i})\gamma^2-1]+2\mathrm{i}(\alpha^2+\gamma^2-2)z+[(\mathrm{i}-1)\alpha^2+\beta^2-(\mathrm{i}+1)\gamma]\}.$$

$S_f(z)$ 在闭圆盘 $\bar{B}=\{z:|z|\leqslant 1\}$ 上除去点 $\pm1,\mathrm{i}$ 外均解析，且

$$\lim_{z\to1}|S_f(z)|(1-|z|^2)^2=2-2\alpha^2,$$
$$\lim_{z\to\mathrm{i}}|S_f(z)|(1-|z|^2)^2=2-2\beta^2,$$
$$\lim_{z\to-1}|S_f(z)|(1-|z|^2)^2=2-2\gamma^2,$$

所以，

$$\sup_{z\in B}|S_f(z)|(1-|z|^2)^2\geqslant\max\{2-2\alpha^2,2-2\beta^2,2-2\gamma^2\}=2-2\gamma^2.$$

又由于

$$\lim_{z\in\bar{B}\setminus\{\pm1,\mathrm{i}\},|z|\to1}|S_f(z)|(1-|z|^2)^2=0,$$

根据最大模原理，$\sup_{z\in B}|S_f(z)|(1-|z|^2)^2\leqslant 2-2\gamma^2$. 因此，有 $\|S_f\|_B=\sup_{z\in B}|S_f(z)|,(1-|z|^2)^2=2-2\gamma^2$. 由引理 2，$\sigma(\tilde{P}_3)\geqslant 2\gamma^2$；再由引理 1，$\sigma(\tilde{P}_3)\leqslant 2\gamma^2$. 定理 1 得证.

根据 L. M. Wieren 关于 Nehari 圆的定义可知，标准圆弧三角形的内部区域是 Nehari 圆.

2　正圆弧 n 边形区域

由于 Schwarz 导数的范数在 Möbius 变换下的不变性，对于正圆弧 n 边形 $\tilde{P}_n(\alpha)$，只要求它的内角大小都相等且每条边的弧长相等，而不必考虑其顶点的位置，圆弧既可向外凸，也可向内凹. 不过，为了得到具体的 Riemann 映照，可以先设定 $\tilde{P}_n(\alpha)$ 的位置.

引理 3　设 $\tilde{P}_n(\alpha)$ 为正圆弧 n 边形区域，其中心在原点，顶点为 n 次单位根，内角等于 $\alpha\pi(0\leqslant\alpha\leqslant2)$，则将单位圆共形映照为 $\tilde{P}_n(\alpha)$ 的内部区域且满足 $f_\alpha(0)=0,f'_\alpha(0)>0$ 的解析函数为

$f_\alpha(z)=z\Gamma(1-1/n)\Gamma((1-\alpha)/2+1/n)F((1-\alpha)/2+1/n,(1-\alpha)/2,1+1/n;z^n)/[\Gamma(1+1/n)\Gamma((1-\alpha)/2-1/n)F((1-\alpha)/2-1/n,(1-\alpha)/2,1-1/n;z^n)]$，

其中 F 是超几何函数[18].

定理 2　设 $\tilde{P}_n(\alpha)$ 为正圆弧 n 边形区域，其内角大小为 $\alpha\pi(0<\alpha<1)$，则

$$\sigma(\tilde{P}_n(\alpha))=2\alpha^2.$$

证　由 $\sigma(\tilde{P}_n(\alpha))$ 在 Möbius 变换下的不变性知，可以假定 $\tilde{P}_n(\alpha)$ 为单位圆盘 B 在 Schwarz-Christoffel 变换

$$|f_\alpha(z)|=z\left(\int_0^1\frac{\tau^{(\alpha-1)/2+1/n}\mathrm{d}\tau}{[(1-\tau)(1-z^n\tau)]^{(\alpha+1)/2}}\right)\cdot\left(\int_0^1\frac{\tau^{(\alpha-1)/2-1/n}\mathrm{d}\tau}{[(1-\tau)(1-z^n\tau)]^{(\alpha+1)/2}}\right)^{-1}=$$

$z\Gamma(1-1/n)\Gamma((1-\alpha)/2+1/n)F((1-\alpha)/2+1/n,(1-\alpha)/2,1+1/n;z^n)/[\Gamma(1+1/n)\cdot\Gamma((1-\alpha)/2-1/n)F((1-\alpha)/2-1/n,(1-\alpha)/2,1-1/n;z^n)]$

下的像. 经过计算（或由 Schwarz-Christoffel 变换的构造过程）可得

$$S_{f_\alpha}(z)=\frac{n^2}{2}(1-\alpha^2)\frac{z^{n-2}}{(1-z^n)^2}(z\in B),$$

从而

$$\lim_{r\to1}|S_{f_\alpha}(z)|(1-r^2)^2=\lim_{r\to1}\left[\frac{n^2}{2}(1-\alpha^2)\cdot\frac{r^{n-2}}{(1-r^n)^2}(1-r^2)^2\right]=2(1-\alpha^2),$$

所以，$\sup_{z\in B}|S_{f_\alpha}(z)|(1-|z|^2)^2\geqslant 2(1-\alpha^2)$. 另一方

面,由于

$$\frac{1}{|z|}-|z|=2\sinh\left(\log\frac{1}{|z|}\right)\leqslant$$

$$2\cdot\frac{2}{n}\sinh\left(\frac{n}{2}\log\frac{1}{|z|}\right)\leqslant\frac{2}{n}\left(\frac{1}{|z|^{n/2}}-|z|^{n/2}\right),$$

所以,$\forall z\in B$,有

$$\frac{|z|^{n-2}(1-|z|^2)^2}{(1-|z|^n)^2}\leqslant\frac{4}{n^2},$$

从而有

$$|S_{f_\alpha}(z)(1-|z|^2)^2|=\left|\frac{n^2}{2}(1-\alpha^2)\cdot\frac{z^{n-2}}{(1-z^n)^2}(1-|z|^2)^2\right|\leqslant 2(1-\alpha^2).$$

综上所述,$\|S_{f_\alpha}(z)\|_B=2(1-\alpha^2)$.

由引理2,$\sigma(\tilde{P}_n(\alpha))\geqslant 2-\|S_{f_\alpha}(z)\|_B=2\alpha^2$. 再由引理1的推论,有$\sigma(\tilde{P}_n(\alpha))\leqslant 2-\|S_{f_\alpha}\|_B=2\alpha^2$. 因此,$\sigma(\tilde{P}_n(\alpha))=2\alpha^2$. 由上述计算过程可知,正圆弧$n$边形区域$\sigma(\tilde{P}_n(\alpha))$为Nehari圆.

当$\alpha=0$时,函数

$f(z)=z\Gamma(1-1/n)\Gamma(1/2+1/n)F(1/2+1/n,1/2,1+1/n;z^n)/[\Gamma(1+1/n)\Gamma(1/2-1/n)F(1/2-1/n,1/2,1-1/n;z^n)]$,

其中F是超几何函数,$f(z)$将单位圆$B=\{z:|z|<1\}$共形映照为顶点在$e^{2\pi iv/n}(v=1,2,\cdots,n)$,内角为0的正圆弧多边形,证明了$\|S_f\|_B=2$. 由于该正圆弧多边形的每个顶点关于内部区域是尖点,该正圆弧多边形的边界不是拟圆周,显然,该正圆弧多边形区域的单叶性内径为0.

根据L. M. Wieren关于Nehari圆的定义知,内角为$\alpha\pi(0\leqslant\alpha<1)$的正圆弧$n$边形区域是Nehari圆.

3 直角圆弧等边四边形区域

作为正圆弧n边形区域的特例,讨论直角圆弧等边四边形区域,即区域D的边界是4条两两正交的圆弧且4条圆弧的弧长相等. 由简单的双曲几何可知,4条圆弧中必有2条圆弧(1组对边)属于同一圆周,另一组对边分别属于与前一圆周正交的2个圆周. 由于$\sigma(D)$在Möbius变换下的不变性,不失一般性,记B为开单位圆盘$B=\{z:|z|<1\}$,D_1,D_2分别为以$\pm 1/\alpha$为圆心,$\sqrt{1-\alpha^2}/\alpha$为半径的圆盘,即$D_{1,2}=\{z:|z\mp 1/\alpha|<\sqrt{1-\alpha^2}/\alpha\}$,设区域$D=B\backslash(\overline{D}_1\cup\overline{D}_2)$,则此四边形的顶点依次为$e^{2i\arcsin\alpha}$,$-e^{-2i\arcsin\alpha}$,$-e^{2i\arcsin\alpha}$,$e^{-2i\arcsin\alpha}$,当$\alpha$满足方程

$$4(1-\alpha^2)(\pi-2\arcsin\alpha)^2=\alpha^2(\pi-4\arcsin\alpha)^2$$

时,区域D的边界的4条圆弧两两正交且弧长相等. 利用Mathematica可得$\alpha\approx 0.874\,9\cdots$,由此可知,当区域$G$为上述区域$D$在Möbius变换下的像时,其单叶性内径$\sigma(G)=1/2$,与正方形的单叶性内径相同.

4 参考文献

[1] Ahlfors L V,Weill G. A uniqueness theorem for Beltrami equations [J]. Proc Amer Math Soc,1962,13(6):975-978.

[2] Ahlfors L V. Quasiconformal reflections [J]. Acta Math,1963,109(1):291-301.

[3] Gehring F W. Characteristic properties of quasidisks [D]. Montreal:Les Presses de L'Universite de Montreal,1982.

[4] Nehari Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions [J]. Bull Amer Math Soc,1949,55(6):545-551.

[5] Hille E. Remarks on a paper by Zeev Nehari [J]. Bull Amer Math Soc,1949,55(6):552-553.

[6] Lehtinen M. On the inner radius of univalency for non-circular domains [J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math,1980,5(1):45-47.

[7] Lehto O. Univalent functions and teichmuller spaces [M]. New York:Springer-Varlag,1987.

[8] Lehto O. Remarks on Nehari's theorem about the Schwarzian derivative and schlicht functions [J]. Journal d'Analyse Math,1979,36(1):184-190.

[9] Calvis D. The inner radius of univalence of normal circular triangles and regular polygons [J]. Complex Variables,1985,4(3):295-304.

[10] Wieren L M. Univalence criteria for classes of rectangles and equiangular hexagons [J]. Ann Acad Sci Fenn Math,1997,22(2):407-424.

[11] 朱华成. 菱形的单叶性内径 [J]. 数学年刊,2001,22A(1):77-80.

[12] 王磊,杨宗信. 共形映射与John圆 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2010,34(1):37-41.

[13] 刘新斌,杨宗信. 平行四边形及等腰梯形的单叶性内径 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2010,34(3):267-270.

[14] Nehari Z. Conformal mapping [M]. New York:Dover Publications Inc,1952.

[15] 戈鲁辛. 复变函数的几何理论 [J]. 陈建功,译. 北京:科学出版社,1956.

[16] Ma W,Minda D. Hyperbolically convex functions II [J]. Ann Polon Math,1999,71(3):273-285.

[17] Mejia D, Pommerenke Ch. On hyperbolically convex functions [J]. The Journal of Geometric Analysis, 2000, 10(2): 365-378.

[18] Hille E. Analytic function theory: II [M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1962.

On the Inner Radius of Univalency for Curvilinera Polygons

YANG Zong-xin, DING Jing

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: By using the idea in constructing the Schwarz-Christoffel formular, the inner radius of univalency for curvilinear polygons such as curvilinear triangles and regular circular polygons is studied. And explicit value of those domains is obtained. The results suggest that those domains are all Nehari disk.

Key words: Schwarzian derivative; the inner radius of univalency; curvilinear polygon

(责任编辑：曾剑锋)

(上接第 456 页)

On Angular Distribution in Complex Oscillation

HE Tao, YI Cai-feng*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: It is investigated that connection between the cluster ray of zero-sequence and Borel direction of solutions of second order differential equations $f'' + A(z)f = 0$ where $A(z)$ is a meromorphic function of finite order, by using the infinity order type function and a sufficient and necessary condition for infinity order Borel direction which was established.

Key words: meromorphic function; infinity orde; Borel direction; the cluster ray of zero-sequence

(责任编辑：王金莲)