文章编号:1000-5862(2013)05-0466-05

一类分数次中立型发展方程的初值问题

肖 飞
(华东交通大学数学与信息科学系,江西 南昌 330013)

摘要:利用 Krasnoselkii 不动点定理研究一类新的具有无限延迟的中立型分数次发展方程,得到 mild 解的存在性定理,最后给出1个例子来验证结论的有效性.

关键词:分数次;中立型发展方程;mild 解
中图分类号:O 175.6 **文献标志码**:A

0 引言和预备知识

考虑如下 Banach 空间中的具有无穷延迟中立型分数次发展方程:

$$\begin{cases} D^q[x(t)-u(t,x_t)]=A[x(t)-u(t,x_t)]+ \\ f(t,x_t,\int_0^t h(t,s,x_s)\mathrm{d}s),t\in[0,T], \\ x(0)=\varphi(t)\in P,t\in(-\infty,0], \end{cases} \quad (1)$$

这里 $T>0,0<q<1,A:D(A)\to X$ 是1个 Banach 空间 X 上的紧解析半群$\{T(t),t\geqslant 0\}$的无穷小生成元,则存在常数 $M\geqslant 1$ 使得 $\|T(t)\|\leqslant M$. D^q 表示 Caputo 意义下的分数次微分,P 表示相空间,$h:\Delta\times P\to X$,其中 $\Delta=\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$,$f:[0,T]\times P\times X\to X$,$x_t:(-\infty,0]\to X$ 定义为 $\forall\theta\in(-\infty,0]$,$x_t(\theta)=x(t+\theta)$,$\varphi\in P$ 且 $\varphi(0)=0$.

研究分数次发展方程 mild 解的存在性具有重要的意义. G. M. Mophou 等[1] 考察了具有无穷时中立型分数次发展方程. 文献[2] 研究了一类具有无穷延迟中立型分数次发展方程的 Cauchy 问题. 不动点理论和临界点理论是研究微分方程解的存在性的重要工具[3-7]. 本文研究了一类新的方程,利用不动点理论证明了 mild 解的存在性定理,把文献[5-6]的结果推广到 Banach 空间.

以下记 $I=[0,T]$. 相空间$(P,\|\cdot\|_P)$是1个赋准范线性空间,其元素为从$(-\infty,0)$映到 X 上的函数,且具有以下性质[8-9]:

(A_0) 若函数 $x:(-\infty,T]\to X$ 在 I 上连续,且 $x_0\in P$,则对于 $t\in I$,

(i) $x_t\in P$;

(ii) $\|x_t\|\leqslant H\|x_t\|_P$,此处 H 为一常数;

(iii) 当 $t\geqslant 0$ 时,存在连续函数 $C_1(t)>0$,局部有界函数 $C_2(t)\geqslant 0$ 使得

$$\|x_t\|_P\leqslant C_1(t)\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|x(s)\|+C_2(t)\|x_0\|_P, \quad (2)$$

不妨设 $C_i^*=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}C_i(t),i=1,2$;

(A_1) 对于(A_0)中所述的函数 $x(t)$,x_t 是 I 上的 P-值连续函数;

(A_2) P 充要.

注1 性质(A_0)中条件(ii)等价于 $\forall\varphi\in P$,有 $\|\varphi(0)\|\leqslant H\|\varphi\|_P$.

注2 若 $BUC((-\infty,0])$ 表示所有有界且一致连续函数关于上确界范数所组成的 Banach 空间,则其为相空间.

定义空间 Ω 如下:

$$\Omega=\{x:(-\infty,T]\to X \text{ 使得 } x|_{(-\infty,0]}\in P \text{ 且 } x|_I\in C(I,X)\}.$$

定义方程(1)的 mild 解如下:

定义1[10-11] 函数 $x\in\Omega$ 称为方程(1)的 mild 解,如果满足

$$x(t)=\begin{cases} \varphi(t),t\in(-\infty,0], \\ -Q(t)u(0,\varphi)+u(t,x_t)+\int_0^t R(t-s)\cdot \\ f(s,x_s,\int_0^s h(s,\tau,x_\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,t\in[0,T], \end{cases} \quad (3)$$

这里

收稿日期:2013-06-10
基金项目:国家自然科学基金(11261019)资助项目.
作者简介:肖 飞(1981-),男,江西吉安人,讲师,主要从事泛函分析和微分几何方面的研究.

$$Q(t)=\int_0^\infty \xi_q(\sigma)T(t^q\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

$$R(t)=q\int_0^\infty \sigma t^{q-1}\xi_q(\sigma)T(t^q\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

注 3　由于$\int_0^\infty \sigma\xi_q(\sigma)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\Gamma(1+q)}$,所以,

$$\| R(t)\|_{B(X)}\leqslant C_{q,M}t^{q-1},t>0,$$

其中 $C_{q,M}=qM/\Gamma(1+q)$.

1　主要结论

(H1) $f:I\times P\times X\to X$ 满足$(v,w)\in P\times X$, $f(\cdot,v,w):I\to X$ 可测,$f(t,\cdot,\cdot):P\times X\to X$ 对几乎所有的$t\in I$连续,且存在2个正有界函数$\mu_i(t)(i=1,2)$使得

$$\|f(t,v,w)\|\leqslant\mu_1(t)\|v\|+\mu_2(t)\|w\|,$$

$(t,v,w)\in I\times P\times X$,且$\sup\limits_{t\in I}|\mu_i(t)|=\mu_i,i=1,2$;

(H2) 存在常数 L 满足 $0<LC_i^*<1$,且

$$\| u_1(t_1,\varphi)-u_2(t_2,\varphi_2)\|\leqslant L(|t_1-t_2|+|\varphi_1-\varphi_2|_p),t_1,t_2\in I,\varphi_1,\varphi_2\in P;$$

(H3) 存在常数$K_1,K_2\geqslant 0$,使得函数$h:\Delta\times P\to X$ 满足

$$\| h(t,s,\varphi_1)-h(t,s,\varphi_2)\|\leqslant K_1\|\varphi_1-\varphi_2\|_P,$$

$$K_2=\sup_{(t,s)\in\Delta}\| h(t,s,0)\|,$$

这里 $t\in I,\varphi_1,\varphi_2\in P$;

(H4) 存在常数 $\delta\in(0,1)$,使得

$$C_1^*\left[L+\frac{T^qC_{q,M}}{q}\mu_1+\frac{T^qC_{q,M}K_1}{q}\mu_2\right]<\delta. \tag{4}$$

定理 1　假设(H1) ~ (H4)成立,则方程(1)在 I 上存在 mild 解.

证　定义映射 $\Gamma:\Omega\to\Omega$ 如下:

$$(\Gamma x)(t)=\begin{cases}\varphi(t),t\in(-\infty,0],\\ -Q(t)u(0,\varphi)+u(t,x_t)+\int_0^t R(t-s)f(s,x_s,\\ \int_0^s h(s,\tau,x_\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,t\in[0,T].\end{cases}$$

下面将证明映射 Γ 存在不动点,从而方程(1)存在 mild 解.

设$\bar{y}(\cdot):(-\infty,T]\to X$和$z(\cdot):(-\infty,T]\to X$定义如下:

$$\bar{y}(t)=\begin{cases}\varphi(t),t\in(-\infty,0],\\ 0,\quad t\in[0,T],\end{cases}$$

$$z(t)=\begin{cases}0,t\in(-\infty,0],\\ -Q(t)u(0,\varphi)+u(t,\bar{y}_t+z_t)+\int_0^t R(t-s)\cdot\\ f(s,\bar{y}_s+z_s,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,t\in[0,T],\end{cases}$$

则$x(t)=\bar{y}(t)+z(t),t\in(-\infty,T]$. 容易看出 x 满足(3)式当且仅当 z 满足 $z_0=0$. 作空间 $Z_0=\{z\in\Omega:z_0=0\}$,则 $\forall z\in Z_0$ 有

$$\| z\|_{Z_0}=\sup_{t\in I}\| z(t)\|+\| z_0\|_P=\sup_{t\in I}\| z(t)\|,$$

则 Z_0 按此范数构造成 1 个 Banach 空间,$\forall r>0$,令 $B_r=\{z\in Z_0:\| z\|_{Z_0}\leqslant r\}$.

$\forall z\in B_r$,根据(2)式,则有

$$\begin{aligned}&\|\bar{y}_t+z_t\|_P\leqslant\|\bar{y}_t\|_P+\| z_t\|_P\leqslant\\ &C_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|\bar{y}_\tau\|+C_2(t)\|\bar{y}_0\|_P+\\ &C_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\| z(\tau)\|+C_2(t)\| z_0\|_P=\\ &C_2(t)\|\varphi\|_P+C_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\| z(\tau)\|\leqslant\\ &C_2^*\|\varphi\|_P+C_1^*r:=r^*.\end{aligned} \tag{5}$$

定义

$$\tilde{\Gamma}z(t)=\begin{cases}0,t\in(-\infty,0],\\ -Q(t)u(0,\varphi)+u(t,\bar{y}_t+z_t)+\int_0^t R(t-s)\cdot\\ f(s,\bar{y}_s+z_s,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s,t\in[0,T].\end{cases}$$

所以 Γ 存在不动点等价于 $\tilde{\Gamma}$ 存在不动点,故只需证明 $\tilde{\Gamma}$ 存在不动点即可.

$\forall z\in B_r,t\in I$,据假设(H1)和(5)式可得

$$\begin{aligned}&\| f(t,\bar{y}_t+z_t,\int_0^t h(t,s,\bar{y}_s+z_s)\mathrm{d}s)\|\leqslant\\ &\mu_1(t)\|\bar{y}_t+z_t\|_P+\mu_2(t)\|\int_0^t[h(t,s,\bar{y}_s+\\ &z_s)-h(t,s,0)+h(t,s,0)]\mathrm{d}s\|\leqslant\\ &\mu_1(t)r^*+\mu_2(t)(K_1r^*+K_2).\end{aligned} \tag{6}$$

根据假设(H2)可得

$$\begin{aligned}&\| u(t,\bar{y}_t+z_t)\|\leqslant\| u(t,\bar{y}_t+z_t)-u(t,0)\|+\\ &\| u(t,0)\|\leqslant L\| u(t,\bar{y}_t+z_t)\|_P+M_1\leqslant\\ &Lr^*+M_1,\end{aligned} \tag{7}$$

这里 $M_1=\sup\limits_{t\in I}\| u(t,0)\|$.

设$\tilde{\Gamma}z(t)=\tilde{\Gamma}_1z(t)+\tilde{\Gamma}_2z(t)$,则

$$\tilde{\Gamma}_1z(t)=-Q(t)u(0,\varphi)+u(t,\bar{y}_t+z_t),$$

$$\tilde{\Gamma}_2z(t)=\int_0^t R(t-s)f(s,\bar{y}_s+z_s,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s.$$

根据(H2)和(2)式可知 $\widetilde{\Gamma}_1$ 是压缩映射.

下面分3个步骤来证明 $\widetilde{\Gamma}$ 存在不动点.

首先,证明 $\exists r>0$ 使得 $\widetilde{\Gamma}(B_r)\subset B_r$. 若不然,则 $\forall l>0$,存在函数 $z^l(\cdot)\in B_l$ 和 $t\in I$ 使得 $\|(\widetilde{\Gamma}z^l)(t)\|>l$. 另一方面,由(6)式和(7)式可得

$$\begin{aligned}l<&\|(\widetilde{\Gamma}z^l)(t)\|\leqslant\\&\|-Q(t)u(0,\varphi)+u(t,\bar{y}_t+z_t^l)\|+\int_0^t\|R(t-s)f(s,\bar{y}_s+z_s^l,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau^l)\mathrm{d}\tau)\|\mathrm{d}s\leqslant\\&LM\|\varphi\|_P+MM_1+Ll^*+M_1+C_{q,M}\int_0^t(t-s)^{q-1}[\mu_1(s)l^*+\mu_2(s)T(K_1l^*+K_2)]\mathrm{d}s\leqslant\\&L(M\|\varphi\|_P+l^*)+M_1(M+1)+\frac{T^qC_{q,M}}{q}[\mu_1l^*+T\mu_2(K_1l^*+K_2)],\end{aligned}$$

两边除以 l,并令 $l\to\infty$,可得

$$1<C_1^*\left[L+\frac{T^qC_{q,M}}{q}\mu_1+\frac{T^{q+1}C_{q,M}K_1}{q}\mu_2\right].$$

这与(4)式矛盾. 故 $\exists r>0$,使得 $\widetilde{\Gamma}(B_r)\subset B_r$.

其次,证明 $\widetilde{\Gamma}_2$ 连续. 设 $\{z^k\}_{k\in\mathbf{N}}\subset B_r$,当 $k\to\infty$ 时,$z^k\to z\in B_r$. 由条件(H3)和 Lebesgue 控制收敛定理[12]可得当 $k\to\infty$ 时

$$\int_0^t h(t,s,\bar{y}_s+z_s^k)\mathrm{d}s\to\int_0^t h(t,s,\bar{y}_s+z_s)\mathrm{d}s.$$

根据(5)式有 $\|\bar{y}_t+z_t^k\|_P\leqslant r^*$. 再由(H1)可得

$$\begin{aligned}&\|f(t,\bar{y}_t+z_t^k,\int_0^t h(t,s,\bar{y}_s+z_s^k)\mathrm{d}s)-f(t,\bar{y}_t+z_t,\int_0^t h(t,s,\bar{y}_s+z_s)\mathrm{d}s)\|\leqslant\\&2\mu_1(t)r^*+\mu_2(t)T(K_1r^*+K_2)=[2\mu_1(t)+\mu_2(t)K_1T]r^*+\mu_2(t)K_2T.\end{aligned}$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理可得,当 $k\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}&\|(\widetilde{\Gamma}_2z^k)(t)-(\widetilde{\Gamma}_2z)(t)\|\leqslant\\&\int_0^t\|R(t-s)[f(s,\bar{y}_s+z_s^k,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau^k)\mathrm{d}\tau)-f(t,\bar{y}_s+z_s,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau)\mathrm{d}\tau)]\|\mathrm{d}s\leqslant\\&C_{q,M}\int_0^t(t-s)^{q-1}\|f(s,\bar{y}_s+z_s^k,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau^k)\mathrm{d}\tau)-f(t,\bar{y}_s+z_s,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau)\mathrm{d}\tau)\|\mathrm{d}s\to0.\end{aligned}$$

因此,$\lim\limits_{k\to\infty}\|\widetilde{\Gamma}_2z^k-\widetilde{\Gamma}_2z\|_{Z_0}=0$. 所以 $\widetilde{\Gamma}_2$ 连续.

最后证明 $\widetilde{\Gamma}_2$ 是紧的. 令 $U(t)=\{(\widetilde{\Gamma}_2z)(t)\mid z\in B_r\}$. $\forall t\in(0,T]$,$0<\varepsilon<t$,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\Gamma}_{2,\varepsilon}z)(t)=&\int_0^{t-\varepsilon}R(t-s)f(s,\bar{y}_s+z_s^k,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau^k)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s=qT(\varepsilon^q\sigma)\int_0^{t-\varepsilon}(t-s)^{q-1}f(s,\bar{y}_s+z_s,\\&\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau)\mathrm{d}\tau)\int_0^\infty\sigma\xi_q(\sigma)T((t-s)^q\sigma-\varepsilon^q\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由于当 $t\in(0,T]$ 时 $T(t)$ 是紧算子,则 $\forall\varepsilon$,$U_\varepsilon(t)=\{(\widetilde{\Gamma}_{2,\varepsilon}z)(t)\mid z\in B_r\}$ 是 X 中的相对紧集. 进而有

$$\begin{aligned}&\|(\widetilde{\Gamma}_2z)(t)-(\widetilde{\Gamma}_{2,\varepsilon}z)(t)\|\leqslant qM^2\int_{t-\varepsilon}^t(t-s)^{q-1}\|f(s,\bar{y}_s+z_s,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau)\mathrm{d}\tau)\|\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{M^2}{\Gamma(1+q)}[(2\mu_1+\mu_2K_1T)r^*+\mu_2K_2T]\varepsilon^q,\end{aligned}$$

因此,$U(t)$ 是 X 中的相对紧集.

设 $0<t_2<t_1<T$,则 $\forall z\in B_r$,

$$\|(\widetilde{\Gamma}_2z)(t_1)-(\widetilde{\Gamma}_2z)(t_2)\|\leqslant I_1+I_2,$$

其中

$$I_1=\|\int_0^{t_2}[R(t_1-s)-R(t_2-s)]f(s,\bar{y}_s+z_s,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\|,$$

$$I_2=\int_{t_2}^{t_1}R(t_1-s)\|f(s,\bar{y}_s+z_s,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau)\mathrm{d}\tau)\|\mathrm{d}s.$$

对于 I_1,记 $H(s)=f(s,\bar{y}_s+z_s,\int_0^s h(s,\tau,\bar{y}_\tau+z_\tau)\mathrm{d}\tau)$,则有

$$\begin{aligned}I_1\leqslant&q\int_0^{t_2}\int_0^\infty\sigma\|[(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}]\xi_q(\sigma)\cdot T((t_1-s)^q\sigma)H(s)\|\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s+q\int_0^{t_2}\int_0^\infty\sigma(t_2-s)^{q-1}\cdot\\&\xi_q(\sigma)\|T((t_1-s)^q\sigma)-T((t_2-s)^q\sigma)\|\cdot\|H(s)\|\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s\leqslant C_{q,M}\int_0^{t_2}\left|(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\right|\cdot\\&\|H(s)\|\mathrm{d}s+q\int_0^{t_2}\int_0^\infty\sigma(t_2-s)^{q-1}\xi_q(\sigma)\|T((t_1-s)^q\sigma)-T((t_2-s)^q\sigma)\|\|H(s)\|\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s\leqslant[(\mu_1+\\&\mu_2K_1T)r^*+\mu_2K_2T][C_{q,M}\int_0^{t_2}\left|(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\right|\mathrm{d}s+q\int_0^{t_2}\int_0^\infty\sigma(t_2-s)^{q-1}\xi_q(\sigma)\|T((t_1-s)^q\sigma)-T((t_2-s)^q\sigma)\|\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s].\end{aligned}$$

由于当 $t>0$ 时,$T(t)$ 按一致算子拓扑连续,所以,当 $t_2\to t_1$ 时,$I_1\to 0$.

根据(6)式,当 $t_2\to t_1$ 时,

$$I_2\leqslant\int_{t_2}^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\|H(s)\|\mathrm{d}s\leqslant C_{q,M}[(\mu_1+\mu_2K_1T)r^*+\mu_2K_2T]\int_{t_2}^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\mathrm{d}s\to 0.$$

因而,当 $t_2\to t_1$ 时,$\|(\widetilde{\Gamma}_2z)(t_1)-(\widetilde{\Gamma}_2z)(t_2)\|\to 0$,由 Arzela-Ascoli 定理[13],$\widetilde{\Gamma}_2$ 是紧算子. 根据 Krasnoselkii 不动点定理可知,Γ 在 B_r 中有不动点 z^*. 设 $x(t)=\bar{y}(t)+z^*(t)$,则 $x(t)$ 是 Γ 的不动点,它为方程(1)的 mild 解.

2　应用

考虑如下的分数次发展方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^q}{\partial t^q}\left[v(t,\xi)-t\displaystyle\int_{-\infty}^0\gamma_1(\theta)\frac{|v(t+\theta,\xi)|}{1+|v(t+\theta,\xi)|}\mathrm{d}\theta\right]=\\ \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[v(t,\xi)-t\displaystyle\int_{-\infty}^0\gamma_1(\theta)\frac{|v(t+\theta,\xi)|}{1+|v(t+\theta,\xi)|}\mathrm{d}\theta\right]+\\ \displaystyle\int_{-\infty}^0\gamma_2(\theta)\sin(t^2|v(t+\theta,\xi)|)\mathrm{d}\theta+\\ \dfrac{t^k}{k}\sin\left|\displaystyle\int_0^t(t-s)\int_{-\infty}^0\gamma_3(\theta)\frac{|v(t+\theta,\xi)|}{1+|v(t+\theta,\xi)|}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\right|,\\ v(t,0)-t\displaystyle\int_{-\infty}^0\gamma_1(\theta)\frac{|v(t+\theta,0)|}{1+|v(t+\theta,0)|}\mathrm{d}\theta=0,\\ v(t,1)-t\displaystyle\int_{-\infty}^0\gamma_1(\theta)\frac{|v(t+\theta,1)|}{1+|v(t+\theta,1)|}\mathrm{d}\theta=0,\\ v(\theta,\xi)=v_0(\theta,\xi),-\infty<\theta\leqslant 0,\end{cases}\tag{8}$$

这里 $0<q<1$,$\xi\in[0,1]$,$k\in\mathbf{N}$,$\gamma_i(i=1,2,3):(-\infty,0]\to\mathbf{R}$,$v_0:(-\infty,0]\times[0,1]\to\mathbf{R}$ 是连续函数,且满足

$$\int_{-\infty}^0|\gamma_i(\theta)|\mathrm{d}\theta<\infty(i=1,2,3).$$

设 $X=L^2([0,1],\mathbf{R})$,定义 $A:D(A)\subset X\to X$ 如下:

$$\begin{cases}D(A)=H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1),\\ Az=z'',\end{cases}$$

则 A 生成 1 个一致有界的紧解析半群 $T(t)$,且满足 $\|T(t)\|\leqslant 1$.

定义相空间 $P=BUC(\mathbf{R}^-,X)$,并定义 $\|\varphi\|_P=\sup\limits_{-\infty<\theta\leqslant 0}|\varphi(\theta)|$,$\varphi\in P$. 易见 $C_1(t)=1$.

对 $t\in[0,1]$,$\xi\in[0,1]$,$\varphi\in P$,取

$$x(t)(\xi)=v(t,\xi),$$

$$\varphi(\theta)(\xi)=v_0(\theta,\xi),$$

$$u(t,\varphi)(\xi)=t\int_{-\infty}^0\gamma_1(\theta)\frac{|v(t+\theta,\xi)|}{1+|v(t+\theta,\xi)|}\mathrm{d}\theta,$$

$$f(t,\varphi,x(t))(\xi)=\int_{-\infty}^0\gamma_2(\theta)\cdot\sin(t^2|\varphi(\theta)(\xi)|)\mathrm{d}\theta+\frac{t^k}{k}\sin|x(t)(\xi)|,$$

$$h(t,s,x_s)=(t-s)\int_{-\infty}^0\gamma_3(\theta)\cdot\frac{|v(t+\theta,\xi)|}{1+|v(t+\theta,\xi)|}\mathrm{d}\theta,$$

则方程(8)可以写成方程(1)的形式,且有

$$\|f(t,\varphi,x(t))(\xi)\|\leqslant t^2\|\varphi\|_P\int_{-\infty}^0|\gamma_2(\theta)|\mathrm{d}\theta+\frac{t^k}{k}\|x(t)\|\leqslant\mu_1(t)\|x(t)\|+\mu_2(t)\|\varphi\|_P,$$

这里 $\mu_1(t)=t^k/k$,$\mu_2(t)=t^2\int_{-\infty}^0|\gamma_2(\theta)|\mathrm{d}\theta$.

对于 $t_1,t_2\in[0,1]$,$\varphi\in P$,有

$$\|u(t_1,\varphi_1)-u(t_2,\varphi_2)\|\leqslant$$

$$|t_1-t_2|\int_{-\infty}^0\left\|\gamma_1(\theta)\frac{|\varphi(\theta)(\xi)|}{1+|\varphi_1(\theta)(\xi)|}\right\|\mathrm{d}\theta+t_2\int_{-\infty}^0\left\|\gamma_1(\theta)\left[\frac{|\varphi_1(\theta)(\xi)|}{1+|\varphi_1(\theta)(\xi)|}-\frac{|\varphi_2(\theta)(\xi)|}{1+|\varphi_2(\theta)(\xi)|}\right]\right\|\mathrm{d}\theta\leqslant$$

$$|t_1-t_2|\int_{-\infty}^0|\gamma_1(\theta)|\mathrm{d}\theta+\|\varphi_1-\varphi_2\|_P\cdot\int_{-\infty}^0|\gamma_1(\theta)|\mathrm{d}\theta=L(|t_1-t_2|+\|\varphi_1-\varphi_2\|_P),$$

这里 $L=\int_{-\infty}^0|\gamma_1(\theta)|\mathrm{d}\theta$.

对于 $(t,s)\in\Delta$,$\varphi_1,\varphi_2\in P$,有

$$\|h(t,s,\varphi_1)-h(t,s,\varphi_2)\|=$$

$$|t-s|\int_{-\infty}^0\left\|\gamma_3(\theta)\left[\frac{|\varphi_1(\theta)(\xi)|}{1+|\varphi_1(\theta)(\xi)|}-\frac{|\varphi_2(\theta)(\xi)|}{1+|\varphi_2(\theta)(\xi)|}\right]\right\|\mathrm{d}\theta\leqslant$$

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|_P\int_{-\infty}^0|\gamma_3(\theta)|\mathrm{d}\theta=K_1\|\varphi_1-\varphi_2\|_P,$$

这里 $K_1=\int_{-\infty}^0|\gamma_3(\theta)|\mathrm{d}\theta$.

进一步,假设存在常数 $\delta\in(0,1)$,使得

$$L+\frac{C_{q,M}}{q}\mu_1+\frac{C_{q,M}K_1}{q}\mu_2<\delta,$$

则根据定理 1 可知方程(8)存在 mild 解.

3　参考文献

[1] Mophou G M,N Guerekate G M. Existence of mild solu-

tions for some semilinear neutral fractional functional evolution equations with infinite delay [J]. Appli Math Comput,2010,216(1):61-69.
[2] Li Fang,Zhang Jun. Existence of mild solution to fractional integrodifferential equations of neutral type with infinite delay [J]. Adv Diff Equations,2012(1):1-15.
[3] 张申贵. 局部超线性常微分 p-Laplacian 系统的多重周期解 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(3):240-243.
[4] 何静,郑秀敏. 几类高阶线性微分方程亚纯解的迭代级 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(6):584-588.
[5] Hernandez E,Henriquez H R. Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay [J]. J Math Anal Appl,1998,221:452-475.
[6] Hernandez E,Henriquez H R. Existence of periodic solutions of partial neutral functional differential equations with unbounded delay [J]. J Math Anal Appl,1998,221:499-522.
[7] Wang Rongnian,Xiao Tijun,Liang Jin. A note on the fractional Cauchy problems with nonlocal initial conditions [J]. Applied Mathematics Letters,2011,24(8):1435-1442.
[8] Hale J K,Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay [J]. Funkcialaj Ekvacioj,1978,21(1):11-41.
[9] 王克,范猛. 泛函微分方程的相空间理论及应用 [M]. 北京:科学出版社,2009.
[10] El-Borai M M. Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations [J]. Chaos Solitons and Fractals,2002,14(3):433-440.
[11] El-Borai M M. On some stochastic fractional integro-differential equations [J]. Advances Dyn Sys App,2006,1(1):49-57.
[12] 陈爱敏. 高阶半线性抛物型方程解的整体存在性 [J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2010,27(2):52-56.
[13] 张恭庆,郭懋正. 泛函分析讲义:下册 [M]. 北京:北京大学出版社,1990.

The Initial Value Problem of a Kind of Fractional Neutral Evolution Equation

XIAO Fei
(Department of Mathematics and Information Science,East China JiaoTong University,Nanchang Jiangxi 330013,China)

Abstract:A kind of fractional neutral evolution equation is investigated by using the Krasnoselkii's fixed point theorem. The existence of mild solution is proved. At last,an example is given to illustrate our result.

Key words:fractional order;neutral evolution equation;mild solution

(责任编辑:曾剑锋)