文章编号:1000-5862(2013)05-0479-03

Laplace 方程的 Green 函数解法的研究

桑明煌,周　行,戴海浪

(江西师范大学物理与通信电子学院,江西 南昌　330022)

摘要:应用 Green 函数对 Laplace 方程进行求解,得到了积分形式的解,并在对求出的解进行了具体的运用,同时也对该解进行总结分析推广到 n 维情况.

关键词:Laplace 方程;Green 函数;积分形式的解;n 维

中图分类号:O 411.1　　**文献标志码**:A

0　引言

从具体的物理过程看,一个偏微分方程表示一种特定的场和产生这个场的场源之间的关系[1].如热传导方程表示温度场和热源之间的关系[2];Laplace 方程则可表示静电场和电荷分布的关系等.

于是这给求解方程提供了思路:先求点源产生的场,然后利用叠加原理来求由任何连续分布源产生的场[3],这就是 Laplace 方程等偏微分方程[4]的基本解法,它已成为近代物理偏微分方程研究的重要方法之一[5].然而,在求解过程中不免会出现许多假设,在求解Laplace方程的过程中常见的方法是分离变量法,对于 2 维和 3 维的偏微分方程比较方便求解,若出现了 n 维的情况下的求解就困难,因此,对此类问题本文着重介绍利用 Green 函数来求 Laplace 方程的解[6].

本文介绍的方法可以避免变量的多重性求解的现象,并且求解过程较简便和较易掌握.将此方法求证静电势的平均定理,从求解过程中可知减少了许多复杂的变量之间的微分方程的计算,得到的结果也具有直观的数学形式和物理意义.在对Laplace方程的由 Green 函数解法所得的解推广到 n 维情况下的分析,从中可以分析 Laplace 方程的多维解通过 Green 函数解法更加体现出物理意义和方便解.

1　Poisson 方程的基本解

Laplace 方程是由 Poisson 方程在自由电荷为 0 的情况下获得,在求解 Laplace 方程时先求解 Poisson 方程的基本解的特性是一个必要的过程.

求任何场源所产生的场,可先求点源所产生的场,然后再利用叠加原理即可,这主要是因为在物理学中,任何场源可看作是相应的点源叠加.

如考虑方程:

$$-\nabla^2 u = \delta(x), \tag{1}$$

$$-\nabla^2 u = f(x), \tag{2}$$

其中 $f(x)$,$\delta(x)$ 是连续函数,u 是场源的电势.

在 3 维空间中,若设介电常数 $\varepsilon = 1$,则方程(1)表示在原点处的单位正电荷所产生的静电场;方程(2)表示密度为 $f(x)$ 的分布电荷所产生的静电场;而任何连续分布电荷可看作是一些点电荷叠加而成,即

$$f(x) = \delta(x) f(x). \tag{3}$$

因此,方程(2)表示的总电场应是这些点电荷所产生的电场的迭加.

设 $E \in \vartheta(\mathbf{R}^n)$ 在广义函数意义下满足方程(1),若 $f(x)$ 是广义函数,则对于方程(2)而言,有

$$\begin{aligned}&\langle -\nabla^2 u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle = \langle \delta \cdot f, \varphi\rangle = \\ &\langle (-\nabla^2 E)\cdot f, \varphi\rangle = \langle -\nabla^2 (E\cdot f), \varphi\rangle, \\ &\forall \varphi \in C(\mathbf{R}^n),\end{aligned} \tag{4}$$

即 $E \cdot f$ 在广义函数意义下满足方程(2),此时,称 E 为方程(2)(或 Laplace 算子)的基本解.

2　Laplace 方程的 Green 函数法

如何求解Laplace方程的解的积分形式,为了建立 Laplace 方程的积分形式,需要先推导出 Green 公

收稿日期:2012-12-23

基金项目:国家自然科学基金(60807014)资助项目.

作者简介:桑明煌(1967-),男,江西德安人,教授,主要从事量子光学方面的研究.

式,而 Green 公式是线面积分中 Gauss 公式的直接推论.

设 Ω 是以足够光滑的曲面 S 为边界多连通区域,$P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 是在 $\Omega+S$ 上连续,在 Ω 内具有 1 阶连续偏导数的任意函数,则

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}\Omega=$$
$$\iint_{S}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad(5)$$

(5) 式为奥氏公式.

设 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 是在 $\Omega+S$ 上有连续的 1 阶偏导数,在 Ω 内有连续的 2 阶偏导数. 取 $P=uv_x$,$Q=uv_y$,$R=uv_z$ 则有

$$\iiint_{\Omega}\lfloor(uv_x)_x+(uv_y)_y+(uv_z)_z\rfloor\mathrm{d}\Omega=$$
$$\iint_{S}uv_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+uv_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+uv_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\qquad(6)$$

应用乘积的求导公式,(6) 式左右两端分别化为

$$\iiint_{\Omega}\lfloor(uv_x)_x+(uv_y)_y+(uv_z)_z\rfloor\mathrm{d}\Omega=$$
$$\iiint_{\Omega}(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)\mathrm{d}\Omega+\iiint_{\Omega}u\ \nabla^2v\mathrm{d}\Omega,\qquad(7)$$
$$\iint_{S}uv_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+uv_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+uv_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\iint_{S}u(v_x\cos(\boldsymbol{n},x)+v_y\cos(\boldsymbol{n},y)+v_z\cos(\boldsymbol{n},z))\mathrm{d}S=$$
$$\iint_{S}u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S,\qquad(8)$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法线方向,故

$$\iint_{S}u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=$$
$$\iiint_{\Omega}(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)\mathrm{d}\Omega+\iiint_{\Omega}u\ \nabla^2v\mathrm{d}\Omega,\qquad(9)$$

同理可得:若取 $P=vu_x$,$Q=vu_y$,$R=vu_z$,则有

$$\iint_{S}v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=$$
$$\iiint_{\Omega}(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)\mathrm{d}\Omega+\iiint_{\Omega}v\ \nabla^2u\mathrm{d}\Omega,\qquad(10)$$

则由(9) 和(10) 式可得

$$\iint_{S}\left(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}(u\ \nabla^2v-v\ \nabla^2u)\mathrm{d}\Omega,\qquad(11)$$

(11) 式就是重要的 Green 公式.

利用 Green 公式可以推导出调和函数的积分表达式,所谓调和函数,就是 Laplace 方程的连续解. 即具备 2 阶连续偏导数且满足 Laplace 方程的函数.

在 Ω 中,取定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 之后,再求调和函数 $u(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的值,考虑函数,设 $v=1/r=1/\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$,$v(x,y,z)$ 满足的方程

$$-\nabla^2v=\delta(M-M_0),M(x,y,z)\in\Omega,\qquad(12)$$

(12) 式由(3) 式可得.

于是在 Ω 内作 1 个以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心,以充分小的正数 ε 为半径的球面 Γ_ε. 它所包围的球域记作 B_ε,在区域 Ω 内对任意的函数 $u\in\Omega$ 及函数 $v=1/r$,用 Green 公式,得

$$\iiint_{\Omega}\left(u\ \nabla^2\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\ \nabla^2u\right)\mathrm{d}v=$$
$$\iint_{S}\left(u\frac{\partial(1/r)}{\partial\boldsymbol{n}}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.\qquad(13)$$

在球面 Γ_ε 上,有

$$\partial(1/r)\Big/\partial\boldsymbol{n}=-\partial(1/r)\Big/\partial r=1/r^2=1/\varepsilon^2.\qquad(14)$$

由积分中值定理可得

$$\iint_{\Gamma\varepsilon}u\frac{\partial(1/r)}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Gamma\varepsilon}u\mathrm{d}S=4\pi u(M_1),\qquad(15)$$

其中 $M_1\in\Gamma_\varepsilon$,同理得

$$\iint_{\Gamma\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\Gamma\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=4\pi\varepsilon\frac{\partial u(M_2)}{\partial\boldsymbol{n}},\qquad(16)$$

其中 $M_2\in\Gamma_\varepsilon$.

将(15) 和(16) 式代入(13) 式可得

$$\iint_{S}\left[u\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S+4\pi u(M_1)-4\pi\varepsilon\cdot$$
$$\frac{\partial u(M_2)}{\partial\boldsymbol{n}}+\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\ \nabla^2u\mathrm{d}v=0.\qquad(17)$$

令 $\varepsilon\to0$,得 $M_1\to M_0$,$M_2\to M_0$,故有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{\Gamma\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0,\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{\Gamma\varepsilon}u\cdot\frac{1}{r^2}=4\pi u(M_0),$$

令(17) 式左右两端 $\varepsilon\to0$,则有

$$\iint_{S}\left[u\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S+\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\ \nabla^2u\mathrm{d}v=$$
$$-4\pi u(M_0),\qquad(18)$$

即

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\iint_{S}-\left(u\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\ \nabla^2u\mathrm{d}v\right),\qquad(19)$$

其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$,因此得到调和函数 u 的积分表达式,同时也是 Laplace 方程的解的积分形式的连续解.

3 Green 函数法的 Laplace 方程的解具体运用

静电势的平均定理 在没有电荷的区域里,任

一点静电势的值等于以该点为心的球面上各点电势的平均值.

证　以球心为原点取球坐标系. 由(7)式得出，Laplace 方程 $\nabla^2 u = 0$ 的解，已经在上面内容中求得为(15)式，因此 Laplace 方程的解为

$$u(\boldsymbol{r}) = -\varepsilon_0 \iint_S u(\boldsymbol{r}) \frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial \boldsymbol{r}'} \mathrm{d}S', \tag{20}$$

其中 $\varepsilon_0 = 1/(4\pi)$，$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \psi$ 是球内空间的 Green 函数[7]，且

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 4rr'\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 r'^2/R^2 - 2rr'\cos\alpha}}\right], \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是场点的位矢，$\boldsymbol{r}'$ 是源点的位矢，α 是 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 的夹角，R 是球面的半径.

由(21)式得出，当 $r = 0$，$r' = R$ 时，

$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial r'}\right|_{\substack{r=0\\ r'=R}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, \tag{22}$$

代入(20)式便得球心的电势为

$$u_c = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S'} u(R,\theta,\varphi)\,\mathrm{d}S' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} u(R,\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega, \tag{23}$$

即球心的电势 u_c 等于球面电势的平均值.

4　推广到 n 维情况

在 $u(M_0)$ 中，若取 u 为调和函数，即 $\nabla^2 u = 0$（Laplace 方程），则有

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S -\left[u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S, \tag{24}$$

所以 $U(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S -\left[u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S$ 为调和函数的积分表达式.(24)式可以说明对于 $\Omega + S$ 上有连续 1 阶偏导数的调和函数 u，它在区域 Ω 内任一点 M_0 的值，可由这个函数及其法线方向导数在边界 S 上的值，并借助于函数 $1/r$ 用曲面积分 $u(M_0)$ 式表达出.

上面推导假定了点 M_0 在区域 Ω 内，若把点 M_0 取在边界 S 上，类似可得

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_S -\left[u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S. \tag{25}$$

若把点 M_0 取在边界 Ω 外，这时函数 $v = 1/r$ 在 Ω 内无奇异点，故对函数 u 及 v 可以直接应用(11)式，得

$$\iint_S -\left[u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S = 0. \tag{26}$$

以上的讨论在 n 维空间也是成立的($n \geqslant 2$)，只需要把 $1/r$ 换为 r^{2-n}，把 4π 换成 $2n^{n/2}/\Gamma(n/2)$；在 2 维情形，需要换 $1/r = \ln(1/r)$，并换 4π 为 2π. 由 $u(M_0)$ 的函数及其法向量导数 $\partial u/\partial \boldsymbol{n}$ 在边界 Γ 上的函数的数值把函数 u 在区域 Ω 内部的数值表示出来，利用这一点今后可以对 Laplace 方程的解用来解决 $\nabla^2 u = f(x)$ 的定解问题[8].

5　结论

本文从 Green 函数的基本特点出发，运用 Green 函数的特性对 Laplace 方程进行了求解，得到了一个积分形式的解. 此解是一个连续的函数即为调和函数. 对该解进行了讨论，可以得到这种积分形式的解可以推导到不同空间中都是成立的. 因此，用 Green 函数来解 Laplace 方程是对偏微分方程的一种特殊的解法，得到的解更具有一般性.

6　参考文献

[1] 曹春娟，张翠英，赵连生. 线性偏微分方程的理论与应用[M]. 北京：兵器工业出版社，2008.

[2] 戴求亿. 数学物理方程[M]. 长沙：湖南大学出版社，2005.

[3] 约翰 F. 偏微分方程[M]. 朱汝金，译. 北京：科学出版社，1986.

[4] Meier W，Staffelbach O. The self-shrinking generator[J]. Eurocrypt，1994，94：205-214.

[5] 嗣世，马选荣. 静电场第 2 边值问题格林函数的普遍形式[J]. 宁夏大学学报：自然科学版，1988，23(3)：63-69.

[6] 柏钦. 利用格林函数求解 3 阶两点边值问题[J]. 工程数学学报，2005，22(3)：442-443.

[7] Ha S N，Lee C R. Numerical study for two-point boundary value problems using Green′s function[J]. Computers & Mathematics with Applications，2002，44(12)：1599-1608.

[8] 慕尧. 用广义格林函数求解亥姆霍兹方程[J]. 山东科学，1996，9(1)：12-14.

（下转第 487 页）

The Modified Chaotic Particle Swarm Optimization Algorithm in the Economic Load Dispatch

ZOU En[1],XIN Jian-tao[2],LIN Lan[1],GONG Xin[3],LIN Jin-qian[1]
(1. College of Engineering,South China Agricultural University,Guangzhou Guangdong 510642,China;
2. Shenzhen Guang Tong Industrial Development Company Limited,Guangzhou Guangdong 518057,China;
3. Transformer Center of Suizhou Power Supply Company,Suizhou Hubei 441300,China)

Abstract: A modified particle swarm optimization algorithm was presented in order to overcome the weakness of the particle swarm algorithm which has slown convergence rate and is easily trapped in local optimum. The global optimal performance of optimization algorithm was improved by revising the iterative strategy of the particle swarm and introducing the local search mechanism by Tent chaotic map which has strong ergodicity to enhance the global searching of particles. The modified chaotic particle swarm optimization was applied to the simulation in economic load dispatch of 6 unit and 15unit power system respectively,considering the transmission network losses and constrained conditions of the units operation. The results of the simulation show that the algorithm has a faster constringency rate and better global optimization in solving the economic load dispatch problems in power systems,which were of complex constraints such as:high dimension,nonlinear,non-convex,and discrete characteristics etc. Finally,it proves the effectiveness and superiority of this algorithm compared with the other intelligence algorithms.

Key words: Chaos optimization;particle swarm optimization;power system;economic load dispatch

(责任编辑:冉小晓)

(上接第 481 页)

The Research for Application of Green Function Method to Solve Laplace Equation

SANG Ming-huang,ZHOU Hang,DAI Hai-lang
(College of Physics and Communication Electronics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: The application of Green function method to solve Laplace equation is presented,and the obtained solution is in an integral form. The proposed method is proved by a typical example and its extension to n-dimension is also given.

Key words: Laplace equation;Green function;the integral form of solution;n-dimension

(责任编辑:冉小晓)