文章编号:1000-5862(2013)06-0621-03

扩张 Ockham 代数上的保序映射

吴瑞春,方 捷*
(广东技术师范学院计算机科学学院,广东 广州 510665)

摘要:利用逻辑代数的有关理论研究扩张 Ockham 代数,得到扩张 Ockham 代数中保序映射的一些特征表示,最后给出一个例子说明结论的有效性.

关键词:保序映射;扩张 Ockham 代数;扩张 MS-代数
中图分类号:O 153.1,O 153.2 **文献标志码**:A

0 引言

1个 Ockham 代数是1个有界分配格(L; $\wedge$, $\vee$, 0, 1),其上赋予1个格偶同态f. Ockham 代数类中,1个重要子代数类是 Berman $K_{p,q}$-代数类[1],它是由条件$f^q = f^{2p+q}$所确定,其中$p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$. 特别地,当$p = 1$, $q = 0$时,$K_{1,0}$-代数(L;f)是1个 de Morgan 代数. 如果(L;f)是1个$K_{1,1}$-代数,则$f(L)$是1个 de Morgan 子代数,称之为L的 de Morgan 骨架,记为$S(L)$. 通常称1个$K_{1,1}$-代数(L;f)是1个具有 de Morgan 骨架的 Ockham 代数. 设(L;f)是$K_{1,1}$-代数,如果f满足$x \leqslant f^2(x)$($\forall x \in L$),则称(L;f)是1个 MS-代数. 这个代数类是由 T. S. Blyth 和 J. C. Varlet 于1983年所介绍的代数概念[2]. 有关 Ockham 代数和 MS-代数的基本性质,读者可参见文献[3].

2000年,T. S. Blyth 等[4]首先引入一个新的代数类,称之为扩张 Ockham 代数. 它是指1个代数(L; $\wedge$, $\vee$, f, k, 0, 1),其中(L; $\wedge$, $\vee$, f, 0, 1)是 Ockham 代数,k是(L;f)上的自同态(即k是L的格自同态并且满足条件$fk = kf$). 本文将用$eK_{p,q}$表示扩张$K_{p,q}$-代数簇,其中(L;f)$\in K_{p,q}$并且k满足条件$k^{2p+q} = k^q$. 称$eK_{1,1}$-代数类中的子代数类(L;f,k)为扩张 MS-代数,如果f和k满足条件$f^2 \geqslant id_L$及$k^2 \leqslant id_L$. 本文将用eMS表示扩张 MS-代数类. 有关扩张 Ockham 代数及扩张 MS-代数的基本性质,读者可参见文献[3-5].

1 扩张 $K_{1,1}$-代数上的保序映射

设X和Y是2个有序集. 映射α: $X \to Y$是保序的,如果$\forall x, y \in X$, $x \leqslant y$蕴含$\alpha(x) \leqslant \alpha(y)$. 1996年,Fang Jie[6]首先研究了 Ockham 代数上的保序映射的特征与性质. 本文将把文献[6]的结果作有趣的推广,并进一步刻画扩张 Ockham 代数中保序映射的某些结构特征.

设$L, M \in eK_{p,q}$. 记$H(L,M)$表示L到M的所有保序映射的全体. 显然,常值映射1: $x \to 1_M$和0: $x \to 0_M$分别是$H(L,M)$的最大元和最小元. 定义$H(L,M)$上的2个格运算如下:

$\forall \alpha, \beta \in H(L,M)$, $\forall x \in L$,

$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x)$,

$(\alpha \vee \beta)(x) = \alpha(x) \vee \beta(x)$.

不难验证,($H(L,M)$; $\wedge$, $\vee$, 0, 1)是1个有界分配格.

定理1 设$L, M \in eK_{1,1}$,则($H(L,M)$; f, k)$\in eK_{1,1}$,其中运算f和k如下:

$\forall \alpha \in H(L,M)$, $\forall x \in L$,

$$f(\alpha)(x) = f[\alpha(f(x))], \quad k(\alpha)(x) = k[\alpha(k(x))].$$

证 众所周知,$H(L,M)$是1个有界分配格. 设$\alpha, \beta \in H(L,M)$,则$\forall x \in L$,

$$f(\alpha \wedge \beta)(x) = f[(\alpha \wedge \beta)(f(x))] = f[\alpha(f(x)) \wedge \beta(f(x))] = f(\alpha(f(x))) \vee f(\beta(f(x))) = f(\alpha)(x) \vee f(\beta)(x) = (f(\alpha) \vee f(\beta))(x).$$

于是有$f(\alpha \wedge \beta) = f(\alpha) \vee f(\beta)$. 类似可证,$f(\alpha \vee \beta) = f(\alpha) \wedge f(\beta)$, $k(\alpha \wedge \beta) = k(\alpha) \wedge k(\beta)$,

收稿日期:2013-06-27
基金项目:国家自然科学基金(111261021)资助项目.
通信作者:方 捷(1956-),男,广东惠来人,教授,博士,博士生导师,主要从事格与序代数结构的研究.

$k(\alpha \vee \beta) = k(\alpha) \vee k(\beta)$. 因此 $\forall x \in L$,
$f^3(\alpha)(x) = f^3[\alpha(f^3(x))] = f[\alpha(f(x))] = f(\alpha)(x)$;
$k^3(\alpha)(x) = k^3[\alpha(k^3(x))] = k[\alpha(k(x))] = k(\alpha)(x)$;
$[fk(\alpha)](x) = f[k(\alpha)(f(x))] = fk[\alpha(kf(x))] = kf[\alpha(fk(x))] = [kf(\alpha)](x)$.

由此推知$(H(L,M);f,k)$是扩张$K_{1,1}$-代数. 定理 1 得证.

推论 1 若$L,M \in eMS$,则$H(L,M) \in eMS$.

设$(L;f,k) \in eK_{1,1}$. 考虑 1 个重要子集

$$S(L) = \{x \in L | f^2(x) = k^2(x) = x\}.$$

容易看出,$S(L)$是扩张 de Morgan 代数,且有$S(L) = \{f^2k^2(x) | x \in L\}$. 称子集$S(L)$为$L$的扩张 de Morgan 骨架.

定理 2 若$L,M \in eK_{1,1}$,则$H(S(L),S(M)) \backsimeq S(H(L,M))$(代数同构).

证 设$\alpha \in H(S(L),S(M))$. 定义$\alpha_*: L \to M$且$\alpha_*(x) = \alpha(f^2k^2(x))$. 不难验证,$\alpha_* \in H(L,M)$. 事实上,$\forall x \in L$,

$$f^2(\alpha_*)(x) = f^2[\alpha_*(f^2(x))] = f^2[\alpha(f^4k^2(x))] = f^2[\alpha(f^2k^2(x))] = \alpha(f^2k^2(x)) = \alpha_*(x).$$

因此,$f^2(\alpha_*) = \alpha_*$. 类似可证,$k^2(\alpha_*) = \alpha_*$. 从而得到 $\alpha_* \in S(H(L,M))$. 定义 $v: H(S(L),S(M)) \to S(H(L,M))$ 且 $v(\alpha) = \alpha_*$. 事实上,$\forall x \in L$,$v(\alpha \wedge \beta)(x) = (\alpha \wedge \beta)_*(x) = (\alpha \wedge \beta)(f^2k^2(x)) = \alpha(f^2k^2(x)) \wedge \beta(f^2k^2(x)) = \alpha_*(x) \wedge \beta_*(x) = (\alpha_* \wedge \beta_*)(x) = (v(\alpha) \wedge v(\beta))(x)$.

于是得到$v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$. 类似地,$v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta)$. 故$v$是格同态. 它也是单射的. 事实上,若 $\alpha_* = \beta_*$,则 $\forall x \in L$,$\alpha(f^2k^2(x)) = \beta(f^2k^2(x))$. 由于 $\forall x \in S(L)$,$x = f^2k^2(x)$,因此$\alpha = \beta$. 故v是单射.

令$\beta \in S(H(L),H(M))$,则$f^2(\beta) = k^2(\beta) = \beta$. 于是 $\forall x \in L$,$f^2[\beta(f^2(x))] = k^2[\beta(k^2(x))] = \beta(x)$. $\forall x \in L$,定义$\alpha(f^2k^2(x)) = \beta(f^2k^2(x))$. 易见,$\alpha \in H(S(L),S(M))$. 从而,$\forall x \in L$,$\alpha_*(x) = \alpha(f^2k^2(x)) = \beta(f^2k^2(x)) = f^2[\beta(f^4k^2(x))] = \beta(k^2(x)) = k^2[\beta(k^2(x))\} = \beta(x)$.

因此,$v(\alpha) = \alpha_* = \beta$. 故$v$是格同构映射.

又因为 $\forall x \in L$,$f(v(\alpha))(x) = f[\alpha_*(f(x))] = f[\alpha(f^3k^2(x))] = f[\alpha(fk^2(x))]$;$v(f(\alpha))(x) = f(\alpha)(f^2k^2(x)) = f[\alpha(f^3k^2(x))] = f[\alpha(fk^2(x))]$,所以$f(v(\alpha)) = v(f(\alpha))$. 类似可证,$k(v(\alpha)) = v(k(\alpha))$. 因此$v$是$H(S(L),S(M))$到$S(H(L,M))$的(代数)同构映射. 定理 2 得证.

2 扩张 MS-代数上的不动点刻画

设$(L;f,k)$是 1 个扩张 Ockham 代数. 称$x \in L$是 1 个不动点,如果$f(x) = k(x) = x$. 将用Fix表示L的不动点集. 对扩张 Ockham 代数L和M,考虑集合$H_*(L,M) = \{\alpha \in H(L,M) | (\forall x \in L)\alpha(f(x)) = f(\alpha(x)),\alpha(k(x)) = k(\alpha(x))\}$.

定理 3 如果$L,M \in eMS$,则$FixH(L,M) = \mathrm{Max}H_*(L,M)$.

为证定理 3,首先证明引理 1.

引理 1 设$L \in eMS$,则有如下性质:

(i) $\forall x \in L$,$k^2(x) \leqslant x \leqslant f^2(x)$;

(ii) $\forall x \in L$,$f^2k^2(x) = f^2(x)$.

证 由扩张 MS-代数类定义知,(i)显然成立. 又设$x \in L$,则由(i)得$fk^2(x) \geqslant f(x)$. 另一方面,$fk^2(x) = k^2(f(x)) \leqslant f(x)$. 因此$fk^2(x) = f(x)$. 从而有$f^2k^2(x) = f^2(x)$. 故(ii)成立. 引理 1 得证.

定理 3 的证明 首先 $\forall \alpha \in H_*(L,M)$,有$fk(\alpha) \in FixH(L,M)$. 事实上,$\forall x \in L$,

$f(\alpha)(x) = f[\alpha(f(x))] = \alpha(f^2(x))$;

$k(\alpha)(x) = k[\alpha(k(x))] = \alpha(k^2(x))$.

因而,$\forall x \in L$,

$$f^2k(\alpha)(x) = f[fk(\alpha)(f(x))] = f^2[k(\alpha)(f^2(x))] = f^2k[\alpha(kf^2(x))] = \alpha(k^2f^4(x)) = \alpha(f^2k^2(x)) = fk[\alpha(fk(x))] = fk(\alpha)(x),$$

故$f^2k(\alpha) = fk(\alpha)$. 同理可证,$(fk^2)(\alpha) = fk(\alpha)$. 因此$fk(\alpha) \in FixH(L,M)$. 现设$\beta \in \mathrm{Max}H_*(L,M)$. 由上面的论证可知,$fk(\beta) \in FixH(L,M)$. 因此有$f^2k(\beta) = fk(\beta) = fk^2(\beta)$. 从而得到$k(\beta) \leqslant kf^2(\beta) = k^2f(\beta) \leqslant f(\beta)$. 于是$fk(\beta) \geqslant f^2(\beta) \geqslant \beta$. 由于$\beta$是$H_*(L,M)$中的 1 个极大元,故$fk(\beta) = \beta$. 因而有$\beta \in FixH(L,M)$. 从而得到

$$\mathrm{Max}H_*(L,M) \subseteq FixH(L,M).$$

为证 $FixH(L,M) \subseteq \mathrm{Max}H_*(L,M)$. 设 $\alpha \in FixH(L,M)$,则$f(\alpha) = \alpha$,$k(\alpha) = \alpha$. 因而有

(i) $\forall x \in L$,$\alpha(x) = f(\alpha)(x) = f[\alpha(f(x))]$;

(ii) $\forall x \in L$,$\alpha(x) = k(\alpha)(x) = k[\alpha(k(x))]$.

在(i)中分别用$f(x)$和$f^2(x)$代替x,从而得到

$$\alpha(f(x)) = f[\alpha(f^2(x))],$$

$$\alpha(f^2(x)) = f[\alpha(f^3(x))] = f[\alpha(f(x))] = \alpha(x).$$

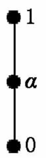
因此 $\alpha(f(x)) = f[\alpha(f^2(x))] = f(\alpha(x))$. 类似可证,$\alpha(k(x)) = k(\alpha(x))$. 故 $\alpha \in H_*(L,M)$. 现证 α 是 $H_*(L,M)$ 中的极大元. 为此设 $\beta \in H_*(L,M)$ 使得 $\alpha \leqslant \beta$. 又因为 $fk(\beta) \in FixH(L,M)$,所以 $\alpha = fk(\alpha) \geqslant fk(\beta)$. 由于 α 和 $fk(\beta)$ 都是不动点,而任意 2 个不动点都是不可比较的,故 $\alpha = fk(\beta)$. 因此,$\forall x \in L$,由引理 1 有

$$\alpha(x) = fk(\beta)(x) = f[k(\beta)(f(x))] = fk[\beta(kf(x))] = \beta(f^2k^2(x)) = \beta(f^2(x)) \geqslant \beta(x),$$

从而得到 $\alpha \geqslant \beta$. 于是有 $\alpha = \beta$. 因此 $FixH(L,M) \subseteq \mathrm{Max}H_*(L,M)$. 定理 3 得证.

注 1　对 $L,M \in eMS$. 如果 L 至少有 1 个不动点 y,但 M 没有不动点,则 $H(L,M)$ 必定没有不动点. 事实上,若 $H(L,M)$ 有不动点 α,则 $f(\alpha) = \alpha$,$k(\alpha) = \alpha$. 由定理 3 的证明知,$\alpha \in H_*(L,M)$. 因而,$\alpha(y) = \alpha(f(y)) = f[\alpha(y)]$,$\alpha(y) = \alpha(k(y)) = k[\alpha(y)]$. 于是 $\alpha(y)$ 是 M 的不动点,矛盾. 故当 $FixL \neq \varnothing$,$FixM = \varnothing$ 时,必有 $FixH(L,M) = \varnothing$.

例 1　考虑如图 1 所示的 1 个 eMS-代数 $(L;f,k)$.



	0	α	1
f	0	0	0
k	0	α	1

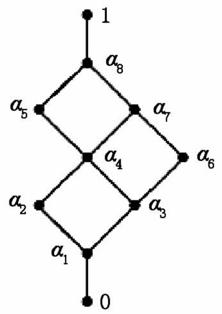
图 1　eMS-代数

容易验证,$H(L,L)$ 有如下 10 个元素(见图 2).

	0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	1
0	0	0	0	0	0	0	α	α	α	1
α	0	0	0	α	α	1	α	α	1	1
0	0	α	1	α	1	1	α	1	1	1

图 2　保序映射全体

同样不难验证,$(H(L,L);f,k)$ 是 1 个 eM-代数(当然也是 eMS-代数),其 Hasse 图如图 3 所示.



	0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	1
f	1	α_5	α_5	α_5	α_5	α_5	0	0	0	1
k	0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	1

图 3　eM-代数

易见,$H_*(L,L) = \{\alpha_4,\alpha_5\}$,$FixH(L,L) = \{\alpha_5\} = \mathrm{Max}H_*(L,L)$. 因而 $FixH(L,L) \neq H_*(L,L)$.

3　参考文献

[1] Blyth T S,Varlet J C. Ockham algebras[M]. Oxford: Oxford University Press,1994.

[2] Blyth T S,Varlet J C. On a common abstraction of de Morgan algebras and Stone algebras[J]. Proc Roy Soc Edinburgh,1983,94(3/4):301-308.

[3] Fang Jie. Distributive lattices with unary operations[M]. Beijing: Science Press,2011.

[4] Blyth T S,Fang Jie. Extended Ockham algebras[J]. Communications in Algebra,1999,27(11):5413-5422.

[5] Blyth T S,Fang Jie. Symmetric extended Ockham algebras[J]. Algebra Colloquium,2003,10(4):479-489.

[6] Fang Jie. The isotone mappings on Ockham algebras[J]. Acta Math Sinica New Series,1996,12(1):43-48.

The Isotone Mappings on Extended Ockham Algebras

WU Rui-chun,FANG Jie*

(School of Computer Science,Guangdong Polytechnic Normal University,Guangzhou Guangdong,510665,China)

Abstract: The extended Ockham algebra is studied by theory of Logic algebras. Some characterization of the isotone mappings on extended Ockham algebras are described. Finally,an example is given to show that the conclusion is validity.

Key words: isotone mapping; extended Ockham algebra; extended MS-algebra

(责任编辑:曾剑锋)