第 37 卷 第 6 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 37 No. 6
2013 年 11 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Nov. 2013

文章编号:1000-5862(2013)06-0624-04

一类特殊粗糙核算子的有界性

谢显华,马　丽

(赣南师范学院数学与计算机科学学院,江西 赣州　341000)

摘要: 主要研究一类特殊粗糙核奇异积分算子 $T_{\Omega,\alpha,b}f(x) = P.V\int_{R^n} b(|y|)\Omega(y')|y|^{-n-\alpha}f(x-y)\mathrm{d}y$,当 $b\in\Delta_\gamma(\gamma\geqslant 2)$,$\alpha\geqslant 0$,且 $\Omega(y')\in L^1(S^{n-1})$ 时的 $L^p_\alpha(R^n)$ 有界性,该积分条件较前人提出的条件弱,从而推广了前人的结论.

关键词: Littlewood-Paley 理论;粗糙核;Fourier 变换估计;算子插值理论

中图分类号: O 177.6　　**文献标志码:** A

0　引言

设 $R^n(n\geqslant 2)$ 是 n-维欧氏空间,S^{n-1} 为 R^n 中赋予 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\sigma(\cdot)$ 的单位球面. 对非零点 $x\in R^n$,记 $x' = x/|x|$. 设 $\Omega\in L^1(S^{n-1})$ 为 R^n 的零次齐次函数,且满足

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x')\mathrm{d}\sigma(x') = 0. \tag{1}$$

对 $s\geqslant 1$,令 Δ_s 表示如下定义在 $[0,+\infty)$ 上可测函数类

$$\Delta_s := \{b(t): \|b\|_{\Delta_s} = \sup_{u>0}\left(\frac{1}{u}\int_0^u |b(t)|^s\mathrm{d}t\right)^{1/s} < +\infty\}.$$

显然,当 $1\leqslant s_1\leqslant s_2 < +\infty$ 时,则有

$$\Delta_\infty\subset\Delta_{s_1}\subseteq\Delta_{s_2}\subseteq\Delta_1.$$

如下定义奇异积分算子 $SI_b(f)$:

$$SI_b(f)(x) = P.V\int_{R^n} b(|y|)\Omega(y')|y|^{-n-\alpha}f(x-y)\mathrm{d}y. \tag{2}$$

明显地,当 $b\equiv 1$ 时,$SI_b(f)$ 即为经典的 Calderon-Zygmund[1-2] 算子,此时记 $SI_b(f) = SI(f)$. Calderon-Zygmund 证明了当 $\Omega\in L\log^+ L(S^{n-1})$ 且满足消失性和(1)式时,SI_b 是 $L^p(R^n)(1<p<\infty)$ 有界的. 随后,R. Fefferman[3] 证明了当 Ω 满足 Lipschitz 条件时,$SI(f)$ 也是 $L^p(R^n)(1<p<\infty)$. 紧接着,文献[4] 运用 Littlewood-Paley 理论和 Fourier 变换估计改进了 R. Fefferman 的结论,证明了当 $\Omega\in L^q(S^{n-1})$ 时,SI_b 是 $L^p(R^n)(1<p<\infty)$ 有界的,类似的结论可参见文献[5-13]. 最近,Fan Dashan 和 Pan Yibiao 运用另一方法证明如下定理.

定理 A[14]　设算子 SI_b 如(2)式所示,若 $\Omega\in H^1(S^{n-1})$ 且满足(1)式,那么 SI_b 是 $L^p(R^n)(1<p<\infty)$ 有界的.

此外,文献[4] 在前人研究的基础上扩大了积分算子的适用范围,研究了另一奇异积分算子 $T_{\Omega,\alpha,b}f(x)$,定义如下

$$T_{\Omega,\alpha,b}f(x) = P.V\int_{R^n} b(|y|)\Omega(y')|y|^{-n-\alpha}f(x-y)\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0}T_{\Omega,\alpha,b,\varepsilon}f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon} b(|y|)\Omega(y')|y|^{-n-\alpha}f(x-y)\mathrm{d}y,$$

其中 $b\in\Delta_\infty$,$\alpha\geqslant 0$ 及 $\Omega\in H^q(S^{n-1})$ 满足 $\int_{S^{n-1}}\Omega(y')Y_m(y')\mathrm{d}\sigma(y') = 0$,$Y_m(y')$ 表示定义在 S^{n-1} 上的 m 次任意多项式. 有如下结论.

定理 B[15]　设 $1<p<\infty$,$\tilde{p} = \max\{p, p/(p-1)\}$. 若 $b\in\Delta_\infty$,$\Omega\in H^q(S^{n-1})(q=(n-1)/(n-1-\alpha))$ 且对定义在 S^{n-1} 上的 m 次任意多项式 $Y_m(y')(m\leqslant N)$ 满足

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(y')Y_m(y')\mathrm{d}\sigma(y') = 0, \tag{3}$$

则

$$\|T_{\Omega,\alpha,b}(f)\|_{L^p(R^n)}\leqslant C\|\Omega\|_{H^q(S^{n-1})}\|f\|_{L^p_\alpha(R^n)},$$

收稿日期:2013-06-03

基金项目:国家自然科学基金(11361004),江西省自然科学基金(2012BAB201014)和江西省科技计划(GJJ13659)资助项目.

作者简介:谢显华(1978-),男,江西兴国人,副教授,主要从事泛函分析和调和分析研究.

其中 $N \leqslant \alpha\tilde{p}/2 - 1$,$\tilde{p} = \max\{p, p/(p-1)\}$.

一个自然的问题是: 若 $b \in \Delta_s(s > 1)$,Ω 仍满足定理 B 所对应的条件,定理 B 的结论是否仍然成立? 本文主要解决这一问题.

定理 1　若 $b \in \Delta_s(s \geqslant 2)$,$\Omega \in H^q(S^{n-1})(q = (n-1)/(n-1+\alpha))$ 且 Ω 还满足(3) 式,那么 $T_{\Omega,\alpha,b}(f)$ 是 $L_\alpha^r(R^n)$ 有界的(其中 $r \geqslant 2$).

若定理 1 得证,则本定理推广了定理 A 和定理 B 的相关结论.

为方便起见,下文中字母 C 总表示与基本变量无关的常数,但在不同的位置其值可以不同.

1　辅助引理

为了证明定理 1,先引入相关的定义和引理.

首先给出一些相关概念和记号. 定义在 S^{n-1} 的 Poisson 核 $P_{ry'}(x') = (1-r^2)/|ry' - x'|^n$,其中 $0 \leqslant r < 1$,$x', y' \in S^{n-1}$,结合 Poisson 核 $P_{ry'}(x')$ 的定义,于是 $\forall f \in S'(S^{n-1})$,定义极大径向函数 $P^+ f(x')$ 如下:

$$P^+ f(x') = \sup_{0 \leqslant r < 1} |\langle f, P_{rx'}\rangle|,$$

其中 $S'(S^{n-1})$ 表示 S^{n-1} 空间上的全体 Schwartz 分布,其中 Hardy 空间 $H^q(S^{n-1})$ 的范数定义为 $\|f\|_{H^q(S^{n-1})} = \|P^+ f\|_{L^q(S^{n-1})} < \infty$.

Hardy 空间 $H^q(S^{n-1})$ 中的一个重要性质是原子分解: 一类是被 1 控制的 $L^\infty(S^{n-1})$ 例外原子 $E(x)$,另一类是 $L^r(S^{n-1})$,$r > 1$ 中的 (q,r) 正则原子函数 $a(x')$,其中 $a(x')$ 满足如下条件:

(ⅰ) $\operatorname{supp}(a) \subset \{x' \in S^{n-1}, |x' - x_0'| < \rho\}$,对某个 $x_0' \in S^{n-1}$ 以及 $0 < \rho \leqslant 2$;

(ⅱ) 当 $\Omega \in H^q(S^{n-1})$ 时,对定义在 S^{n-1} 上的 m 次任意多项式 $Y_m(y')(m \leqslant N)$ Ω 满足

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(y') Y_m(y') \mathrm{d}\sigma(y') = 0;$$

(ⅲ) $\|a\|_{L^r(S^{n-1})} \leqslant \rho^{-(n-1)(1/q - 1/r)}$.

$\forall \Omega \in H^q(S^{n-1})$ 都满足原子分解

$$\Omega = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i E_i.$$

记非零点 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in R^n$,其中 $\xi/|\xi| = (\xi'_1, \xi'_2, \cdots, \xi'_n) = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n) = \zeta \in S^{n-1}$,$(\zeta_2, \cdots, \zeta_n) = \zeta^*$.

引理 1　设 $n \geqslant 3$,$a(\cdot)$ 为定义在 S^{n-1} 的 (q,∞) 原子,其支集为 $S^{n-1} \cap B(\zeta,\rho)$,其中 $B(\zeta,\rho)$ 表示以 ρ 为半径,$\zeta = \xi' \in S^{n-1}$ 为中心的球. 记

$$F_a(s) = (1-s^2)^{(n-3)/2} X_{(-1,1)}(s) \int_{S^{n-2}} a(s, (1-s^2)^{1/2}\tilde{y}) \mathrm{d}\sigma(\tilde{y}),$$

则 $\exists s_0 \in R$,使得

$$\operatorname{supp}(F_a) \subseteq (s_0 - 2r(\xi'), s_0 + 2r(\xi'));$$

$$\|F_a\|_\infty \leqslant C\rho^{(1-1/q)(n-1)} r(\xi')^{-1}; \tag{4}$$

$$\int_R F_a(s) s^k \mathrm{d}s = 0, \quad \forall k \in [0, N],$$

其中 $r(\xi') = |A_\rho \xi'| = |\xi|^{-1}|A_\rho \xi|$ 及 $A_\rho \xi = (\rho\xi_1, \rho\xi_2, \cdots, \rho\xi_n)$.

设 $a(x')$ 为一个 $(q,\infty)(q = (n-1)/(n-1+\alpha))$ 原子,则算子 $T_{\Omega,\alpha,b}(f)(x)$ 可如下表示:

$$T_{\Omega,\alpha,\varepsilon}(f)(x) = \int_{|y|>\varepsilon} b(|y|) |y|^{-n-\alpha} a(y) f(x-y) \mathrm{d}y,$$

其中 $f \in S(R^n)$,$\varepsilon > 0$,且 C 为与 $a(x')$ 无关的常数.

不失一般性,假设 $\operatorname{supp}(a) \subseteq B(l,\rho) \cap S^{n-1}$,其中 $l = (1,0,0,\cdots,0)$,且记 $I_k = (2^k, 2^{k+1})$,$k = 1,2,\cdots$,那么 $T_{\Omega,\alpha,b} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_k f(x)$,易知 $\hat{T}_k f(\xi) = \hat{\sigma}_k(\xi)\hat{f}(\xi)$,记 $\sigma_k(x) = b(|x|)|x|^{-n-\alpha} a(x') \cdot X_{I_k(|x|)}$,于是有

$$T_k f(x) = \int_{R^n} b(|y|)|y|^{-n-\alpha} a(y') X_{I_k(|y|)} f(x-y) \mathrm{d}y.$$

引理 2　$\forall k \in \mathbf{Z}$,$\rho > 0$,$b \in \Delta_s(s \geqslant 2)$,有

$$(\text{i})\ |\hat{\sigma}_k(\xi)| \leqslant C\|b\|_{\Delta_s} 2^{-k\alpha} |2^k A_\rho \xi|^{N+1} \cdot \rho^{(1-1/q)(n-1)}; \tag{5}$$

$$(\text{ii})\ |\hat{\sigma}_k(\xi)| \leqslant C\|b\|_{\Delta_s} 2^{-k\alpha} |2^k A_\rho \xi|^{-1/2} \rho^{(1-1/q)(n-1)}, \tag{6}$$

左式 $\forall s \geqslant 2$ 成立.

证　(ⅰ) $\forall \xi \in R^n$,选取一个旋转变换,使得 $O(\xi) = |\xi| l = |\xi|(1,0,0,\cdots,0)$. 设 $y' = (s, y_2', y_3', \cdots, y_n')$,于是有

$$|\hat{\sigma}_k(\xi)| = C\int_{I_k} b(t) t^{-1-\alpha} \int_{S^{n-1}} a(O^{-1}(y')) \cdot \mathrm{e}^{-it|\xi|\langle l, y'\rangle} \mathrm{d}\sigma(y') \mathrm{d}t,$$

其中 O^{-1} 是 O 的逆变换,$a(O^{-1}(y'))$ 表示定义在 $B(\xi', \rho) \cap S^{n-1}$ 的 (q,∞) 原子,并且 $a(y') \subseteq B(l,\rho) \cap S^{n-1}$. 因此

$$|\hat{\sigma}_k(\xi)| = \left| C\int_{I_k} b(t) t^{-1-\alpha} \int_{S^{n-1}} F_a(s) \mathrm{e}^{-it|\xi|s} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \right| \leqslant$$

$$C2^{-k\alpha} \int_{I_k} |b(t) t^{-1-\alpha}| \cdot \left| \int_R F_a(s) \mathrm{e}^{-it|\xi|s} \mathrm{d}s \right| \mathrm{d}t \leqslant$$

$$C2^{-k\alpha} \left(\int_{I_k} \frac{\left| \int_R F_a(s) \mathrm{e}^{-it|\xi|s} \mathrm{d}s \right|^{s'}}{t} \mathrm{d}t \right)^{1/s'} \leqslant$$

$$C2^{-k\alpha}\,|2^kA_\rho\xi|^N\rho^{(1-1/q)(n-1)}.\tag{7}$$

(7) 式证明过程中假定 $\mathrm{supp}F_a\subseteq(-2r(\xi'),2r(\xi'))$，并且在第2个不等式中运用了 Hölder 不等式和(4) 式，故(5) 式得证.

下面证明(6) 式. 在(7) 式右边运用 Hölder 不等式，有

$$|\hat{\sigma}_k(\xi)|\leqslant C\left|\int_{I_k}b(t)\,t^{-1-\alpha}\int_R F_a(s)\,\mathrm{e}^{-it|\xi|s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$C\|b\|_{\Delta_s}2^{-k\alpha}\left(\int_{2^k|\xi|}^{2^{k+1}|\xi|}\frac{\left|\int_R F_a(s)\,\mathrm{e}^{-its}\mathrm{d}s\right|^{s'}}{t}\mathrm{d}t\right)^{1/s'}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\Delta_s}2^{-k\alpha}\left(\int_{2^k|\xi|}^{2^{k+1}|\xi|}\left|\int_R F_a(s)\,\mathrm{e}^{-its}\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\cdot$$

$$\left(\int_{2^k|\xi|}^{2^{k+1}|\xi|}(t^{-1})^{2/(2-s')}\mathrm{d}t\right)^{(2-s')/(2s')}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\Delta_s}2^{-k\alpha}\,|2^kA_\rho\xi|^{-1/2}\rho^{(1-1/q)(n-1)}\ (s\geqslant 2).$$

于是(7) 式得证.

2　定理的证明

定理1 的证明　现在取非负径向 $C^\infty(R^n)$ 函数 $\Phi(x)$ 满足

(ⅰ) $0\leqslant\Phi(x)\leqslant 1$，且

$\mathrm{supp}(\Phi)\subseteq\{x,1/2\leqslant|x|\leqslant 2\}$；

(ⅱ) $\Phi_j(x)=\Phi(2^jx)$ 且 $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\Phi_j^2(t)\equiv 1$ 对于 $t\in R^n\backslash\{0\}$.

定义乘子算子 S_j 如下:

$$(\hat{S}_jf)(\xi)=\hat{f}(\xi)\,\Phi_j(A_\rho\xi).$$

易知 $T_{\Omega,\alpha,b}f(x)=\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty}\tilde{T}_jf(x)$，其中 $\tilde{T}_j(f)(x)=\sum\limits_k S_{j+k}(T_k(S_{j+k}))f(x)$.

由 Littlewood-Paley 理论可知，$\forall p\in(1,\infty)$，

$$\|\tilde{T}_jf\|_2^2\leqslant C\|(\sum_k|T_k(S_{j+k}f)|^2)^{1/2}\|_{L^p(R^n)}.\tag{8}$$

一方面，假定 $p\geqslant 2$，记 $m=(p/2)'=p/(p-2)$，此时取非负函数 $g\in L^m(R^n)$，其中 $\|g\|_m=1$. 结合(8) 式，有

$$\|\tilde{T}_jf\|_p^2\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{R^n}|T_k(S_{k+j}f)|^2g(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于

$$|T_k(S_{k+j}f)(x)|^2=\left|\int_{2^k\leqslant|y|<2^{k+1}}b(|y|)\,|y|^{-n-\delta}a(y')\cdot\right.$$

$$\left.S_{j+k}f(x-y)\,\mathrm{d}y\right|^2\leqslant\rho^{-2(n-1)(1-1/q)}2^{-2k\alpha}\left(\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{|b(t)|^s}{t}\mathrm{d}t\right)^{2/s}\cdot$$

$$\left(\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{\left|\int_{S^{n-1}}A(y')\,S_{j+k}f(x-ty')\,\mathrm{d}y'\right|^{s'}}{t}\mathrm{d}t\right)^{2/s'}\leqslant$$

$$C\rho^{-2(n-1)(1-1/q)}2^{-2k\alpha}\cdot$$

$$\left(\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{\left|\int_{S^{n-1}}A(y')\,S_{j+k}f(x-ty')\,\mathrm{d}y'\right|^{s'}}{t}\mathrm{d}t\right)^{2/s'}\leqslant$$

$$C\rho^{-2(n-1)(1-1/q)}2^{-2k\alpha}\left(\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{\left|\int_{S^{n-1}}A(y')\,\left|S_{j+k}^2f(x-ty')\,\mathrm{d}y'\right|\right.}{t}\mathrm{d}t\right)\leqslant$$

$$C\rho^{-2(n-1)(1-1/q)}2^{-2k\alpha}L_k(|S_{j+k}f|^2)(x),$$

其中 $A(y')=\rho^{(n-1)(1-1/q)}a(y')$，且

$$L_k(|S_{j+k}f|^2)(x)=$$

$$\int_{2^k\leqslant|y|<2^{k+1}}A(y')\,|y|^{-n}S_{j+k}^2f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

故

$$\|\tilde{T}_jf\|_p^2\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{R^n}|T_k(S_{k+j}f)|^2g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\rho^{-2(n-1)(1-1/q)}\int_{R^n}\sum_k 2^{-2k\alpha}|S_{k+j}f(x)|^2N_Ag(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中

$$N_Ag(x)=\sup_k L_k^*g(x)=$$

$$\sup_k\int_{2^k}^{2^{k+1}}|A(y')|\,|y|^{-n}g(x+y)\,\mathrm{d}y,$$

由旋转方法及 Hardy-Littlewood 极大函数的有界性知

$$\|N_Ag(x)\|_{L^s(R^n)}\leqslant C\|g\|_{L^s(R^n)}\leqslant C.$$

利用 Hölder 不等式，有

$$\|\tilde{T}_jf\|_p^2\leqslant C\rho^{-2(n-1)(1-1/q)}\cdot$$

$$\|(\sum_k|2^{-k\alpha}S_{k+j}f|^2)^{1/2}\|_{L^p(R^n)}.$$

由 S_k 定义及 Triebel-Lizorkin 空间定义易知

$$\|(\sum_k|(2^{-k}/\rho)^{\alpha}S_kf|^2)^{1/2}\|_{L^p(R^n)}\cong$$

$$\|f\|_{F_p^{\alpha,2}(R^n)}\cong\|f\|_{L_\alpha^p(R^n)},$$

于是当 $p\geqslant 2$ 时，有

$$\|\tilde{T}_jf\|_{L^p(R^n)}\leqslant C2^{j\alpha}\|f\|_{L_p^\alpha(R^n)}.\tag{9}$$

另一方面，当 $p=2$ 时，有

$$\|\tilde{T}_jf\|_2^2\leqslant C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{R^n}|T_k(S_{k+j}f)|^2(y)\,\mathrm{d}y\leqslant$$

$$C\sum_k\int_{R^n}|\Phi_{j+k}(A_\rho\xi)\,\hat{\sigma}_k(\xi)\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant$$

$$C\sum_k\int_{D_{j+k}}|\hat{\sigma}_k(\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi,\tag{10}$$

其中 $D_{j+k}=\{\xi:2^{-j-k-1}\leqslant|A_\rho\xi|<2^{-j-k+1}\}$.

若 $j\geqslant 0$，由(5) 式和(10) 式可知

$$\|\widetilde{T}_jf\|_2^2 \leqslant C\sum_k\int_{D_{j+k}}|\hat{\sigma}_k(\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \leqslant$$

$$C\sum_k 2^{-2k\alpha}\rho^{2(n-1)(1/q-1)}\int_{D_{j+k}}|\hat{f}(\xi)|^2(2^k|A_\rho\xi|)^{2N+2}\mathrm{d}\xi \leqslant$$

$$C2^{-(2N+2)j}\sum_k\rho^{2(1/q-1)(n-1)}\int_{D_{j+k}}|\hat{f}(\xi)|^2 2^{-2k\alpha}\mathrm{d}\xi.$$

注意到 $\alpha+(1/q-1)(n-1)=0$ 且在积域 D_{j+k} 上，有 $2^{-k\alpha}\cong 2^{j\alpha}|A_\rho\xi|\leqslant 2^{j\alpha}\rho^\alpha|\xi|^\alpha$，于是

$$\|\widetilde{T}_jf\|_2^2 \leqslant C2^{-2j(N-\alpha+1)}\sum_k\int_{D_k}|\hat{f}(\xi)|^2\xi^{2\alpha}\mathrm{d}\xi,$$

即

$$\|\widetilde{T}_jf\|_2 \leqslant C2^{-j(N-\alpha+1)}\|f\|_{L_\alpha^2(R^n)}. \tag{11}$$

同理，当 $j<0$ 时类似可得

$$\|\widetilde{T}_jf\|_2 \leqslant C2^{j/2}\|f\|_{L_\alpha^2(R^n)}. \tag{12}$$

最后在(9)式与(11)式以及(9)式与(12)式之间使用 Riesz-Thorin 插值定理可知，$\exists\,\theta,\varepsilon\in(0,1)$ 使得

$$\|\widetilde{T}_jf\|_2 \leqslant C2^{-j\{\theta(N-\alpha+1)-(1-\theta)\alpha\}}\|f\|_{L_\alpha^2(R^n)}(j\geqslant 0), \tag{13}$$

$$\|\widetilde{T}_jf\|_2 \leqslant C2^{j\delta}\|f\|_{L_\alpha^2(R^n)}(j<0). \tag{14}$$

于是由(13)~(14)式可得

$$\|T_{\Omega,\alpha,b}f\|_{L^r(R^n)} \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty}\|T_jf\|_{L^r(R^n)} \leqslant$$

$$C\|f\|_{L_\alpha^r(R^n)}\sum_{j\geqslant 0}(2^{-j\{\theta(N-\alpha+1)-(1-\theta)\alpha\}}+2^{-j\delta}) \leqslant$$

$$C\|f\|_{L_\alpha(R^n)},$$

其中 $r\geqslant 2$.

于是定理 1 证毕.

3　参考文献

[1] Calderon A P, Zygmund A. On the existence of certain singular integrals [J]. Acta Math, 1952, 88(1): 85-139.

[2] Calderon A P, Zygmund A. On singular integrals [J]. Amer J Math, 1956, 78(2): 289-309.

[3] Fefferman R. A note on singular integrals [J]. Proc Amer Math Soc, 1979, 74(2): 266-270.

[4] Duoandikoetxea J, Rubio De Francia J L. Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates [J]. Invent Math, 1986, 84(3): 541-561.

[5] Blank B E, Fan Dashan. Hardy spaces on compact Lie groups [J]. Ann Fac Sci Toulouse Math, 1997, 6(3): 429-479.

[6] Bergh J, Löfström J. Interpolation spaces [M]. Berlin: Spring-Verlag, 1976.

[7] Colzani L, Taibleson M, Weiss G. Maximal estimates for Cesaro and Riesz means on sphere [J]. Indian Univ Math J, 1984, 33(6): 873-889.

[8] Ding Yang, Lu Shanzhen. Homogeneous fractional integrals on Hardy spaces [J]. Tohoku Math J, 2000, 52(1): 153-162.

[9] Calderon A P, Zygmund A. On singular integrals with variable kernels [J]. Apl Anal, 1978, 7(3): 221-238.

[10] Fan Dashan, Pan Yibiao. A singular integral operator with rough kernel [J]. Proc Amer Math Soc, 1997, 125(12): 3695-3703.

[11] 谢显华，许绍元，马丽，等. 一类沿多项式曲线的粗糙核 Marcinkiewicz 积分算子的 L^p 有界性 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2009, 33(6): 665-669.

[12] 马丽，许绍元，谢显华. 沿旋转曲面单参数 Marcinkiewicz 积分算子的 L^p 有界性 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2011, 35(4): 366-369.

[13] 曾志强，陈冬香. 具有 $H(m)$-型核的奇异积分算子交换子的双权 Lipschitz 估计 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2011, 35(6): 601-604.

[14] Fan Dashan, Pan Yibiao. Singular integral operators with rough kernels supported by subvarieties [J]. Amer J Math, 1997, 119(4): 799-839.

[15] Chen Jiechen, Fan Dashan, Ying Yiming. Certain operators with rough singular kernels [J]. Canad J Math, 2003, 55(3): 504-532.

$L_\alpha^r(R^n)$ Boundedness of a Special Rough Singular Operator

XIE Xian-hua, MA Li

(Department of Mathmatics and Computer, Gannan Normal University, Ganzhou Jiangxi 341000, China)

Abstract: It is to study the boundedness of a class of special rough singular operators under the conditions of $b\in\Delta_\gamma$ $(\gamma\geqslant 2)$ and $\Omega(y')\in L^1(S^{n-1})$, which improves predecessors' conclusion. The operators is as follows:

$$T_{\Omega,\alpha,b}f(x) = P.V\int_{R^n}b(|y|)\Omega(y')|y|^{-n-\alpha}f(x-y)\mathrm{d}y.$$

Key words: Littlewood-Paley theory; rough kernel; Fourier transform estimate; operator interpolation theory

(责任编辑：王金莲)