第 37 卷 第 6 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 6
2013 年 11 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Nov. 2013

文章编号:1000-5862(2013)06-0628-05

多尺度双向矩阵值小波的性质

韩可众[1],任必军[2]
(1. 河南信息统计职业学院,河南 郑州 450011;2. 河南财政税务高等专科学校信息工程系,河南 郑州 451464)

摘要:运用矩阵理论和时频分析方法研究多尺度双向矩阵值小波的性质. 首先引进了多尺度双向矩阵值正交小波的概念,然后提供了短支撑多尺度双向矩阵值正交小波的构造算法,最后刻画一类多尺度双向矩阵值正交小波包的特征.

关键词:双向矩阵值尺度函数;正向面具函数;负向面具函数;双向矩阵值小波;矩阵值小波变换;双向矩阵值小波包

中图分类号:O 174.2 **文献标志码**:A

0 引言

小波分析[1-3]是近 20 多年来迅速发展起来的一个数学分支,它是当前应用数学和工程数学中一个飞速发展的新领域. 矩阵值小波是一类广义的多小波[4]. 1996 年,文献[5]首先引进了矩阵值小波的概念,研究了二尺度矩阵值正交小波的存在性及其构造方法,并且用二尺度矩阵值正交小波研究矩阵值信号采样问题. S. Bacchelli 等研究了二尺度矩阵值正交小波的构造性质. 文献[6]利用离散的矩阵值正交小波变换研究海洋涡流现象. 2007 年,文献[7]引入了双向小波的概念,与传统意义上的小波相比,双向小波具有一般情形,具有单小波和多小波都没有的一些性质,在实际应用过程中也具有更强的灵活性,如可以通过利用双向小波变换得出心电图压缩算法[8]. 随着人们对小波分析研究的不断深入,双向小波成为一个研究热点. 由于矩阵值小波有着明显的优势,在实施离散的多小波变换之前需要预滤波,而实施离散的矩阵值小波变换则不需要进行预滤波,使得矩阵值小波应用范围更广. 所以,研究双向矩阵值小波是必要的. 然而,关于双向矩阵值小波的文献甚少. 鉴于此,本文研究多尺度双向矩阵值小波的性质及构造算法,提供了短支撑多尺度双向矩阵值正交小波的构造算法,得到了双向矩阵值小波包的正交公式.

1 基本概念

在本文中,$L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times3})$ 是所有的矩阵值函数的集合,即

$$L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times3})=\{\boldsymbol{G}(t)=\begin{pmatrix}g_{11}(t)&g_{12}(t)&g_{13}(t)\\g_{21}(t)&g_{22}(t)&g_{23}(t)\\g_{31}(t)&g_{32}(t)&g_{33}(t)\end{pmatrix},$$

$$g_{lv}(t)\in L^2(\mathbf{R}),l,v=1,2,3\},$$

其中 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 表示实数集与复数集,用 I_r 和 O 分别表示单位矩阵和零矩阵,则 $\forall \boldsymbol{G}(t)\in L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times3})$,它的积分以及傅里叶变换分别定义为

$$\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{G}(t)\,\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\int_{\mathbf{R}}g_{11}(t)\,\mathrm{d}t&\int_{\mathbf{R}}g_{12}(t)\,\mathrm{d}t&\int_{\mathbf{R}}g_{13}(t)\,\mathrm{d}t\\\int_{\mathbf{R}}g_{21}(t)\,\mathrm{d}t&\int_{\mathbf{R}}g_{22}(t)\,\mathrm{d}t&\int_{\mathbf{R}}g_{23}(t)\,\mathrm{d}t\\\int_{\mathbf{R}}g_{31}(t)\,\mathrm{d}t&\int_{\mathbf{R}}g_{32}(t)\,\mathrm{d}t&\int_{\mathbf{R}}g_{33}(t)\,\mathrm{d}t\end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}(\omega)=\int_{\mathbf{R}}\boldsymbol{G}(t)\exp\{-\mathrm{i}\omega t\}\,\mathrm{d}t,\omega\in\mathbf{R}.$$

$\forall \boldsymbol{G}(t)\in L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times3})$,$\|\boldsymbol{G}\|_2$ 表示矩阵值函数的范数,并且

$$\|\boldsymbol{G}\|_2=\Big(\sum_{l,v=1}^{3}\int_{\mathbf{R}}|g_{lv}(t)|^2\mathrm{d}t\Big)^{1/2}.$$

对于 2 个矩阵值函数 $\boldsymbol{F}(t),\boldsymbol{G}(t)\in L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{n\times n})(n\geqslant3)$,定义它们的符号内积为

收稿日期:2013-06-30
基金项目:2012 年河南省基础与前沿技术研究(122300410061)资助项目.
作者简介:韩可众(1957-),男,河南南阳人,教授,主要从事小波分析、数论和线性代数方面的研究.

$$\langle \boldsymbol{F},\boldsymbol{G}\rangle = \int_{\mathbf{R}} \boldsymbol{F}(t)\,\boldsymbol{G}(t)^{*}\,\mathrm{d}t,$$

其中“$*$”表示复共轭转置. 如果 $G(t) \in L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times 3})$ 满足下面的双向加细方程

$$\boldsymbol{G}(t) = \sum_{v\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{d}_v^{+}\boldsymbol{G}(3t-v) + \sum_{v\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{d}_v^{-}\boldsymbol{G}(v-3t), \tag{1}$$

则称 $G(t)$ 为双向矩阵值加细函数,且 $\{\boldsymbol{d}_k^{+}\}_{k\in\mathbf{Z}}$, $\{\boldsymbol{d}_k^{-}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 都是 3×3 的常数矩阵,分别叫做正向面具和负向面具,$\mathbf{Z}$ 表示整数集. 在(1)式的两边实施傅里叶变换得

$$\hat{\boldsymbol{G}}(\omega) = D^{+}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega/3})\,\hat{\boldsymbol{G}}(\omega/3) + D^{-}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega/3})\,\overline{\hat{\boldsymbol{G}}(\omega/3)}, \tag{2}$$

其中 $D^{+}(z) = \dfrac{1}{3}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{d}_k^{+} z^k$ 叫做正向面具符号, $D^{-}(z) = \dfrac{1}{3}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{d}_k^{-} z^k$ 叫做负向面具符号.

定义 1　如果矩阵值加细函数 $G(t) \in L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times 3})$ 满足

$$\langle \boldsymbol{G}(t),\boldsymbol{G}(t-v)\rangle = \delta_{0,v}\boldsymbol{I}_3,$$
$$\langle \boldsymbol{G}(t),\boldsymbol{G}(v-t)\rangle = \boldsymbol{O},\ v\in\mathbf{Z},$$

则称 $G(t)$ 是正交的矩阵值加细函数.

2　多尺度矩阵值多分辨分析

定义矩阵值函数伸缩与平移族的闭子空间序列 $\{V_j\} \subset L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times 3})$ 如下:

$$V_j = \mathrm{Clos}_{L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times 3})}\{\mathrm{Span}\{\sqrt{3^j}\boldsymbol{G}(3^j t-k),\sqrt{3^j}\boldsymbol{G}(v-3^j t): k,v\in\mathbf{Z}\}\},\ j\in\mathbf{Z}.$$

定义 2　若闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 满足条件:

(ⅰ) $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$;

(ⅱ) $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{\boldsymbol{O}\}$, $\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ 在 $L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times 3})$ 中稠密,其中 $\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵值;

(ⅲ) $\boldsymbol{\Phi}(t) \in V_j \Leftrightarrow \boldsymbol{\Phi}(3t) \in V_{j+1}$, $j\in\mathbf{Z}$;

(ⅳ) 矩阵值函数族 $\{\boldsymbol{G}(t-k),\boldsymbol{G}(v-t): k,v\in\mathbf{Z}\}$ 构成了子空间 V_0 的 Riesz 基,

则称方程(1)定义的矩阵值函数 $G(t)$ 生成了矩阵值函数空间 $L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times 3})$ 中的多尺度双向矩阵值多分辨分析 $\{V_j\}$. 这时,把 $G(t)$ 称为这个矩阵值多分辨分析的尺度函数.

设 W_j 是子空间 V_j 在 V_{j+1} 中的直交补空间,并且存在 2 个紧支撑的矩阵值函数 $\boldsymbol{\Psi}_1(t)$, $\boldsymbol{\Psi}_2(t) \in L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times 3})$,使得的它们伸缩平移构成了子空间 W_j 的 Riesz 基,即

$$W_j = \mathrm{Clos}_{L^2(\mathbf{R},\mathbf{C}^{3\times 3})}\{\mathrm{Span}\{\sqrt{3^j}\boldsymbol{\Psi}_\alpha(3^j t-k),\sqrt{3^j}\boldsymbol{\Psi}_\beta(v-3^j t): \alpha,\beta=1,2,k,v\in\mathbf{Z}\}\},\ j\in\mathbf{Z},$$

因此,关于多尺度双向矩阵值尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的多尺度双向矩阵值小波函数 $\boldsymbol{\Psi}_\alpha(t)$ 应满足双向加细方程

$$\boldsymbol{\Psi}_\alpha(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{q}_k^{(\alpha)+}\boldsymbol{G}(3t-k) + \sum_{v\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{q}_k^{(\alpha)-}\boldsymbol{G}(v-3t),\ \alpha=1,2. \tag{2}$$

在(2)式两端作傅里叶变换可得

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}_\alpha(\omega) = Q^{(\alpha)+}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega/3})\,\hat{\boldsymbol{G}}(\omega/3) + Q^{(\alpha)-}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega/3})\,\overline{\hat{G}(\omega/3)},$$

其中 $Q^{(\alpha)+}(z) = \dfrac{1}{3}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{q}_k^{(\alpha)+} z^k$ 为正向小波符号函数,$Q^{(\alpha)-}(z) = \dfrac{1}{3}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{q}_k^{(\alpha)-} z^k$ 为负向小波符号函数.

定义 3　设 $G(t)$ 是正交的双向矩阵值尺度函数,双向矩阵值小波函数满足(2)式. 如果 $G(t)$ 与 $\boldsymbol{\Psi}_\alpha(t)$ 满足

$$\begin{cases}\langle \boldsymbol{G}(t),\boldsymbol{\Psi}_\alpha(t-k)\rangle = \boldsymbol{O},\\ \langle \boldsymbol{G}(t),\boldsymbol{\Psi}_\alpha(k-t)\rangle = \boldsymbol{O},\\ \langle \boldsymbol{\Psi}_\alpha(t),\boldsymbol{\Psi}_\beta(t-k)\rangle = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{0,k},\\ \langle \boldsymbol{\Psi}_\alpha(t),\boldsymbol{\Psi}_\beta(k-t)\rangle = \boldsymbol{O},\end{cases}$$

其中 $\alpha,\beta\in\{1,2\}$,则称 $\boldsymbol{\Psi}_\alpha(t)$ $(\alpha\in\{1,2\})$ 是对应于 $G(t)$ 的双向矩阵值正交小波函数.

定理 1　设 $G(t)$ 是双向向量值正交尺度函数,则 $\forall k\in\mathbf{Z}$,

$$\begin{cases}\sum_{k\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{d}_k^{+}(\boldsymbol{d}_{k+3l}^{+})^{*} + \boldsymbol{d}_k^{-}(\boldsymbol{d}_{k+3l}^{-})^{*}] = 3\delta_{0,l}\boldsymbol{I}_3,\ l\in\mathbf{Z},\\ \sum_{k\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{d}_k^{+}(\boldsymbol{d}_{k+3l}^{-})^{*} + \boldsymbol{d}_k^{-}(\boldsymbol{d}_{k+3l}^{+})^{*}] = \boldsymbol{O},\quad l\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

证　由于 $G(t)$ 是正交的双向矩阵值尺度函数,根据定义 1 有

$$\begin{aligned}\delta_{0,l}\boldsymbol{I}_3 &= \langle \boldsymbol{G}(t),\boldsymbol{G}(t-l)\rangle = \langle \sum_{k\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{d}_k^{+}\boldsymbol{G}(3t-k) + \boldsymbol{d}_k^{-}\boldsymbol{G}(k-3t)],\sum_{n\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{d}_n^{+}\boldsymbol{G}(3t-(3l+n)) + \boldsymbol{d}_n^{-}\boldsymbol{G}((3l+n)-3t)]\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{d}_k^{+}(\boldsymbol{d}_n^{+})^{*}\langle \boldsymbol{G}(3t-k),\boldsymbol{G}(3t-(3l+n))\rangle + \boldsymbol{d}_k^{+}(\boldsymbol{d}_n^{-})^{*}\langle \boldsymbol{G}(k-3t),\boldsymbol{G}((3l+n)-3t)\rangle] \\ &\quad + \sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{d}_k^{-}(\boldsymbol{d}_n^{+})^{*}\langle \boldsymbol{G}(k-3t),\boldsymbol{G}(3t-(3l+n))\rangle + \boldsymbol{d}_k^{-}(\boldsymbol{d}_n^{-})^{*}\langle \boldsymbol{G}(k-3t),\boldsymbol{G}((3l+n)-3t)\rangle] \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{d}_k^{+}(\boldsymbol{d}_n^{+})^{*}\delta_{k,3l+k}\ \frac{1}{3}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{d}_k^{-}(\boldsymbol{d}_n^{-})^{*}\delta_{k,3l+k} = \frac{1}{3}\sum_{k\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{d}_k^{+}(\boldsymbol{d}_{3l+k}^{+})^{*} + \boldsymbol{d}_k^{-}(\boldsymbol{d}_{3l+k}^{-})^{*}].\end{aligned}$$

同理可以证明定理 1 中的第 2 个等式也成立.

定理 2[8]　设 $G(t)$ 是正交的双向矩阵值尺度

函数,并且 $\boldsymbol{\Psi}_{\alpha}(t)$ 是关于 $G(t)$ 的双向矩阵值正交小波函数,则有

$$\begin{cases} \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{q}_k^{(\alpha)+}(\boldsymbol{q}_{k+3l}^{(\beta)+})^* + \boldsymbol{q}_k^{(\alpha)-}(\boldsymbol{q}_{k+3l}^{(\beta)-})^*] = m\delta_{\alpha,\beta}\delta_{0,l}\boldsymbol{I}_r, \\ \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{q}_k^{(\alpha)+}(\boldsymbol{q}_{k+3l}^{(\beta)-})^* + \boldsymbol{q}_k^{(\alpha)-}(\boldsymbol{q}_{k+3l}^{(\beta)+})^*] = \boldsymbol{O}, \\ \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{d}_k^{+}(\boldsymbol{q}_{k+3l}^{(\alpha)+})^* + \boldsymbol{d}_k^{-}(\boldsymbol{q}_{k+3l}^{(\alpha)-})^*] = \boldsymbol{O}, \\ \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} [\boldsymbol{d}_k^{+}(\boldsymbol{q}_{k+3l}^{(\alpha)-})^* + \boldsymbol{d}_k^{-}(\boldsymbol{q}_{k+3l}^{(\alpha)+})^*] = \boldsymbol{O}. \end{cases} \tag{3}$$

3 双向矩阵值正交小波的构造

下面给出具有紧支撑的多尺度双向矩阵值小波的构造算法. 在应用上,往往需要一些特殊的小波,如对称矩阵值小波、插值矩阵值小波等[10-11].

定理 3 假设 $G(t)$ 是紧支撑双向矩阵值正交尺度函数,满足双向加细方程

$$\boldsymbol{G}(t) = \sum_{k=0}^{3}\boldsymbol{d}_k^{+}\boldsymbol{G}(3t-k) + \sum_{k=0}^{3}\boldsymbol{d}_k^{-}\boldsymbol{G}(k-3t),$$

假设存在 1 个整数 $l(0\leqslant l\leqslant 3)$,使得矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是 1 个本征有界可逆矩阵,且

$$\boldsymbol{M}_s^2 = [3\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{d}_l^{+}(\boldsymbol{d}_l^{+})^* - \boldsymbol{d}_l^{-}(\boldsymbol{d}_l^{-})^*]^{-1}\cdot [\boldsymbol{d}_l^{+}(\boldsymbol{d}_l^{+})^* + \boldsymbol{d}_l^{-}(\boldsymbol{d}_l^{-})^*],$$

定义

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_j^{(s)+} = \boldsymbol{M}_s^*\boldsymbol{d}_j^{+}, & j\neq l, \\ \boldsymbol{q}_j^{(s)+} = -\boldsymbol{M}_s^{-1}\boldsymbol{d}_j^{+}, & j=l, \\ \boldsymbol{q}_j^{(s)-} = \boldsymbol{M}_s^*\boldsymbol{d}_j^{-}, & j\neq l, \\ \boldsymbol{q}_j^{(s)-} = -\boldsymbol{M}_s^{-1}\boldsymbol{d}_j^{-}, & j=l, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $j,l\in\{0,1,2,3\}$,$s\in\{1,2\}$,则相应于矩阵值正交尺度函数 $G(t)$ 的矩阵值正交小波函数

$$\boldsymbol{\Psi}_s(t) = \sum_{k=0}^{3}\boldsymbol{q}_k^{(s)+}\boldsymbol{G}(3t-k) + \sum_{k=0}^{3}\boldsymbol{q}_k^{(s)-}\boldsymbol{G}(k-3t).$$

证 为了方便,令 $l=1$,根据定理 2 和(3)式知,定理 3 成立的条件是 $\{\boldsymbol{q}_0^{(s)+},\boldsymbol{q}_1^{(s)+},\boldsymbol{q}_2^{(s)+},\boldsymbol{q}_3^{(s)+},\boldsymbol{q}_0^{(s)-},\boldsymbol{q}_1^{(s)-},\boldsymbol{q}_2^{(s)-},\boldsymbol{q}_3^{(s)-},s\in\{1,2\}\}$ 满足下列等式:

$$\boldsymbol{d}_0^{+}(\boldsymbol{q}_3^{(s)+})^* + \boldsymbol{d}_0^{-}(\boldsymbol{q}_3^{(s)-})^* = \boldsymbol{O}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{d}_0^{+}(\boldsymbol{q}_3^{(s)-})^* + \boldsymbol{d}_0^{-}(\boldsymbol{q}_3^{(s)+})^* = \boldsymbol{O}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{d}_0^{+}(\boldsymbol{q}_0^{(s)+})^* + \boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{q}_1^{(s)+})^* + \boldsymbol{d}_2^{+}(\boldsymbol{q}_2^{(s)+})^* + \boldsymbol{d}_3^{+}(\boldsymbol{q}_3^{(s)+})^* + \boldsymbol{d}_0^{-}(\boldsymbol{q}_0^{(s)-})^* + \cdots + \boldsymbol{d}_3^{-}(\boldsymbol{q}_3^{(s)-})^* = \boldsymbol{O}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{q}_0^{+}(\boldsymbol{q}_3^{(\alpha)+})^* + \boldsymbol{q}_0^{-}(\boldsymbol{q}_3^{(\beta)-})^* = \boldsymbol{O}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{q}_0^{+}(\boldsymbol{q}_3^{(\alpha)-})^* + \boldsymbol{q}_0^{-}(\boldsymbol{q}_3^{(\beta)+})^* = \boldsymbol{O}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{q}_0^{(s)+}(\boldsymbol{q}_0^{(s)+})^* + \cdots + \boldsymbol{q}_3^{(s)+}(\boldsymbol{q}_3^{(s)+})^* + \boldsymbol{q}_0^{(s)-}(\boldsymbol{q}_0^{(s)-})^* + \boldsymbol{q}_1^{(s)-}(\boldsymbol{q}_1^{(s)-})^* + \cdots + \boldsymbol{q}_3^{(s)-}(\boldsymbol{q}_3^{(s)-})^* = 3\boldsymbol{I}_3. \tag{10}$$

如果 $\{\boldsymbol{q}_0^{(s)+},\boldsymbol{q}_1^{(s)+},\boldsymbol{q}_2^{(s)+},\boldsymbol{q}_3^{(s)+},\boldsymbol{q}_0^{(s)-},\boldsymbol{q}_1^{(s)-},\boldsymbol{q}_2^{(s)-},\boldsymbol{q}_3^{(s)-},s\in\{1,2\}\}$ 由(4)式给出,那么由(3)式可知(5)~(6)式、(8)~(9)式成立. 根据(3)式和(4)式可以推出(7)式和(10)式成立,即

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{d}_0^{+}(\boldsymbol{q}_0^{(s)+})^* + \boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{q}_1^{(s)+})^* + \cdots + \boldsymbol{d}_2^{+}(\boldsymbol{q}_2^{(s)+})^* + \boldsymbol{d}_0^{-}(\boldsymbol{q}_0^{(s)-})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{q}_1^{(s)-})^* + \cdots + \boldsymbol{d}_3^{-}(\boldsymbol{q}_3^{(s)-})^* = \\ &\boldsymbol{d}_0^{+}(\boldsymbol{d}_0^{+})^*\boldsymbol{M}_s - \boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^*\boldsymbol{M}_s^{-1} + \cdots + \boldsymbol{d}_3^{+}(\boldsymbol{d}_3^{+})^*\boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{d}_0^{-}(\boldsymbol{d}_0^{-})^*\boldsymbol{M}_s - \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*\boldsymbol{M}_s^{-1} + \cdots + \boldsymbol{d}_3^{-}(\boldsymbol{d}_3^{-})^*\boldsymbol{M}_s = \\ &[3\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* - \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\boldsymbol{M}_s - [\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\boldsymbol{M}_s^{-1} = [\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\boldsymbol{M}_s^{-1} - \\ &[\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\boldsymbol{M}_s^{-1} = \boldsymbol{O}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{q}_0^{(s)+}(\boldsymbol{q}_0^{(s)+})^* + \boldsymbol{q}_1^{(s)+}(\boldsymbol{q}_1^{(s)+})^* + \boldsymbol{q}_2^{(s)+}(\boldsymbol{q}_2^{(s)+})^* + \boldsymbol{q}_3^{(s)+}(\boldsymbol{q}_3^{(s)+})^* + \boldsymbol{q}_0^{(s)-}(\boldsymbol{q}_0^{(s)-})^* + \cdots + \boldsymbol{q}_3^{(s)-}(\boldsymbol{q}_3^{(s)-})^* = \\ &\boldsymbol{M}_s^*\boldsymbol{d}_0^{+}(\boldsymbol{d}_0^{+})^*\boldsymbol{M}_s + (\boldsymbol{M}_s^{-1})^*\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^*\boldsymbol{M}_s^{-1} + \boldsymbol{M}_s^*\cdot\boldsymbol{d}_2^{+}(\boldsymbol{d}_2^{+})^*\boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{M}_s^*\boldsymbol{d}_3^{+}(\boldsymbol{d}_3^{+})^*\boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{M}_s^*\boldsymbol{d}_0^{-}(\boldsymbol{d}_0^{-})^*\boldsymbol{M}_s + \\ &(\boldsymbol{M}_s^{-1})^*\boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*\boldsymbol{M}_s^{-1} + \boldsymbol{M}_s^*\boldsymbol{d}_2^{-}(\boldsymbol{d}_2^{-})^*\boldsymbol{M}_s + \boldsymbol{M}_s^*\cdot\boldsymbol{d}_3^{-}(\boldsymbol{d}_3^{-})^*\boldsymbol{M}_s = \boldsymbol{M}_s^*[3\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* - \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\cdot \\ &\boldsymbol{M}_s^* + (\boldsymbol{M}_s^{-1})^*[\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\boldsymbol{M}_s^{-1} = \\ &(\boldsymbol{M}_s^{-1})^*[(\boldsymbol{M}_s^*)^2(3\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* - \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*)\cdot\boldsymbol{M}_s^2 + \boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\boldsymbol{M}_s^{-1} = (\boldsymbol{M}_s^{-1})^*[(\boldsymbol{M}_s^*)^2\cdot \\ &(\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*) + \boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\boldsymbol{M}_s^{-1} = \boldsymbol{M}_s^*[\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\cdot \\ &\boldsymbol{M}_s^{-1} + (\boldsymbol{M}_s^{-1})^*[\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\boldsymbol{M}_s^{-1} = \\ &\boldsymbol{M}_s^*[\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^* + (\boldsymbol{M}_s^{-2})^*(\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*)]\boldsymbol{M}_s^{-1} = \boldsymbol{M}_s^*[\boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* + \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^* + \\ &3\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{d}_1^{+}(\boldsymbol{d}_1^{+})^* - \boldsymbol{d}_1^{-}(\boldsymbol{d}_1^{-})^*]\boldsymbol{M}_s^{-1} = 3\boldsymbol{M}_s^*\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{M}_s^{-1} = 3\boldsymbol{I}_3. \end{aligned}$$

4 双向矩阵值小波包的性质

为了实施双向矩阵值小波变换,需要引入双向矩阵值小波包的概念. 首先引入记号

$$\mu\in\{1,2\},\ \boldsymbol{F}_0(t) = \boldsymbol{G}(t),\ \boldsymbol{F}_{\mu}(t) = \boldsymbol{\Psi}_{\mu}(t),$$
$$\boldsymbol{p}_k^{(0)+} = \boldsymbol{d}_k^{+},\ \boldsymbol{p}_k^{(0)-} = \boldsymbol{d}_k^{-},\ \boldsymbol{p}_k^{(\mu)+} = \boldsymbol{q}_k^{+},\ \boldsymbol{p}_k^{(\mu)-} = \boldsymbol{q}_k^{-}.$$

对于 $r\in\mathbf{Z}^+$($\mathbf{Z}^+$ 为非负整数集),递推地得到函数族

$$\boldsymbol{F}_{3r+\mu}(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{p}_k^{(\mu)+}\boldsymbol{F}_r(3t-k) + \sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{p}_k^{(\mu)-}\boldsymbol{F}_r(k-3t). \tag{11}$$

定义 4 若 $\boldsymbol{F}_{3r+\mu}(t)$ 满足(11)式,则称矩阵值函数族 $\{\boldsymbol{F}_{3r+\mu}(t): r\in\mathbf{Z}^+,\mu\in\{1,2\}\}$ 为对应于矩阵尺度函数 $G(t)$ 的多尺度矩阵值小波包.

在(11)式的两边作傅里叶变换得

$$\hat{F}_{3r+\mu}(3\omega)=P^{(\mu)+}(\omega)\hat{F}_r(\omega)+P^{(\mu)-}(\omega)\overline{\hat{F}_r(\omega)},$$
$$3P^{(\mu)+}(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k^{(\mu)+}e^{-ik\omega},3P^{(\mu)-}(\omega)=-\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k^{(\mu)-}e^{-ik\omega},\mu=0,1,2,3,\omega\in\mathbf{R}.\quad(12)$$

为研究双向矩阵值小波包的性质[12]，将(11)式中 t 改为 $-t$ 得

$$F_{3r+\mu}(-t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k^{(\mu)+}\Psi_r(-3t-k)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k^{(\mu)-}\Psi_r(k+3t),\quad(13)$$

在(13)式的两边作傅里叶变换得

$$\overline{\hat{F}_{3r+\mu}(3\omega)}=\overline{P^{(\mu)+}(\omega)\hat{F}_r(\omega)}+P^{(\mu)-}(\omega)\hat{F}_r(\omega).$$

令 $H(t)=\begin{bmatrix}F_r(t)\\F_r(-t)\end{bmatrix}$，则

$$H_{3r+\mu}(t)=\begin{bmatrix}F_{3r+\mu}(t)\\F_{3r+\mu}(-t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k^{(\mu)+}F_r(3t-k)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k^{(\mu)-}F_r(k-3t)\\\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k^{(\mu)+}F_r(-3t-k)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k^{(\mu)-}F_r(k+3t)\end{bmatrix}=$$
$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\begin{bmatrix}p_k^{(\mu)+}&p_k^{(\mu)-}\\p_{-k}^{(\mu)-}&p_{-k}^{(\mu)+}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_r(3t-k)\\F_r(k-3t)\end{bmatrix}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\begin{bmatrix}p_k^{(\mu)+}&p_k^{(\mu)-}\\p_{-k}^{(\mu)-}&p_{-k}^{(\mu)+}\end{bmatrix}H_{3r+\mu}(3t-k).\quad(14)$$

因此，(14)式是关于矩阵值加细函数 $H_{3r+\mu}(t)$ 的加细方程，作傅里叶变换得

$$\hat{H}_{3r+\mu}(3\omega)=P^{(\mu)}(\omega)\hat{H}_r(\omega),$$

其中 $P^{(\mu)}(\omega)=\begin{bmatrix}p^{(\mu)+}(\omega)&p^{(\mu)+}(\omega)\\\overline{p^{(\mu)+}(\omega)}&\overline{p^{(\mu)+}(\omega)}\end{bmatrix}$. 因此，

$$\sum_{j=0}^{2}P^{(\mu)}\left(\omega+\frac{2j\pi}{3}\right)P^{(\lambda)}\left(\omega+\frac{2j\pi}{3}\right)^*=\delta_{\mu,\lambda}I_6,\mu,\lambda=0,1,2.$$

定理 3　若$\{F_r(t):r\in\mathbf{Z}^+\}$是关于矩阵尺度函数 $G(t)$ 的双向矩阵值正交小波包，则 $\forall r\in\mathbf{Z}^+$ 有

$$\begin{cases}\langle F_r(t-k),F_r(t-l)\rangle=\delta_{k,l}I_3,\\\langle F_r(t-k),F_r(-t-l)\rangle=O,\\\langle F_r(-t-k),F_r(t-l)\rangle=O,\\\langle F_r(-t-k),F_r(-t-l)\rangle=\delta_{k,l}I_3,\end{cases}\quad(15)$$

其中 $k,l\in\mathbf{Z}$.

证　(15)式成立等价于

$$\langle H_r(t-k),H_r(t-l)\rangle=\delta_{k,l}I_6.\quad(16)$$

成立.

当 $r=0$ 时，显然成立. 假设当 $0\leqslant r\leqslant 3^{r_0}$ 时，(16)式成立，r_0 是一固定正整数.

当 $3^{r_0}\leqslant r\leqslant 3^{r_0+1}$，则 $3^{r_0-1}\leqslant[r/3]\leqslant 3^{r_0}$. 令 $r=3\cdot[r/3]+\mu,\mu=0,1,2$，有

$$\langle H_{[r/3]}(t-k),H_{[r/3]}(t-l)\rangle=\delta_{k,l}I_6\Leftrightarrow$$
$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\hat{H}_{[r/3]}(3\omega+2j\pi)\hat{H}_{[r/3]}(3\omega+2j\pi)^*=I_6,$$

其中 $[r]=\max\{v\in\mathbf{Z},v\leqslant r\}$，那么，

$$2\pi\langle H_r(t-k),H_r(t-l)\rangle=\int_{\mathbf{R}}\hat{H}_r(\omega)\hat{H}_r(\omega)^*e^{-i(k-l)\omega}d\omega=$$
$$3\int_{\mathbf{R}}P^{(\mu)}(\omega)\hat{H}_{[r/3]}(\omega)\hat{H}_{[r/3]}(\omega)^*P^{(\mu)}(\omega)^*\cdot e^{-3i(k-l)\omega}d\omega=3\sum_{j\in\mathbf{Z}}\int_{2j\pi}^{2(j+1)\pi}P^{(\mu)}(\omega)\hat{H}_{[r/3]}(\omega)\cdot$$
$$\hat{H}_{[r/3]}(\omega)^*P^{(\mu)}(\omega)^*e^{-3i(k-l)\omega}d\omega=3\int_0^{2\pi}P^{(\mu)}(\omega)\cdot\{\sum_{j\in Z}\hat{H}_{[r/3]}(\omega+2j\pi)\hat{H}_{[r/3]}(\omega+2j\pi)^*\}P^{(\mu)}(\omega)^*\cdot$$
$$e^{-3i(k-l)\omega}d\omega=3\int_0^{2\pi}P^{(\mu)}(\omega)P^{(\mu)}(\omega)^*e^{-i3(k-l)\omega}d\omega=$$
$$3\int_0^{2\pi/3}\sum_{j=0}^{2}P^{(\mu)}\left(\omega+\frac{2j\pi}{3}\right)P^{(\mu)}\left(\omega+\frac{2j\pi}{3}\right)^*\cdot e^{-i(k-l)\omega}d\omega=2\pi\delta_{k,l}I_6.$$

定理 4　如果$\{\Psi_r(t):r\in\mathbf{Z}^+\}$是关于尺度函数 $\Psi_0(t)$ 的双向矩阵值小波包，则 $\forall n\in\mathbf{Z}^+,\alpha=1,2$，

$$\begin{cases}\langle F_{3n}(t-k),F_{3n+\alpha}(t-l)\rangle=O,\\\langle F_{3n}(t-k),F_{3n+\alpha}(-t-l)\rangle=O,\\\langle F_{3n}(-t-k),F_{3n+\alpha}(t-l)\rangle=O,\\\langle F_{3n}(-t-k),F_{3n+1}(-t-l)\rangle=O.\end{cases}\quad(17)$$

证　(17)式等价于

$$\langle H_{3n}(t-k),H_{3n+\alpha}(t-l)\rangle=O,\alpha=1,2.$$

事实上，

$$\langle H_{3n}(t-k),H_{3n+\alpha}(t-l)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\hat{H}_{3n}(\omega)\hat{H}_{3n+\alpha}(\omega)^*e^{-i(k-l)\omega}d\omega=$$
$$\frac{3}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\hat{H}_{3n}(3\omega)\hat{H}_{3n}(3\omega)^*e^{-3i(k-l)\omega}d\omega=$$
$$\frac{3}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}P^{(0)}(\omega)\hat{H}_n(\omega)\hat{H}_n(\omega)^*P^{(\alpha)}(\omega)^*e^{-3i(k-l)\omega}d\omega=$$
$$\frac{3}{2\pi}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\int_{2j\pi}^{2(j+1)\pi}P^{(0)}(\omega)\hat{H}_n(\omega)\hat{H}(\omega)^*P^{(\alpha)}(\omega)^*\cdot e^{-3i(k-l)\omega}d\omega=\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}P^{(0)}(\omega)\{\sum_{j\in\mathbf{Z}}\hat{H}_n(\omega+2j\pi)\cdot$$
$$\hat{H}_n(\omega+2j\pi)^*\}P^{(\alpha)}(\omega)^*e^{-3i(k-l)\omega}d\omega=$$
$$\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}P^{(0)}(\omega)P^{(\alpha)}(\omega)^*e^{-3i(k-l)\omega}d\omega=$$
$$\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi/3}\sum_{j=0}^{2}P^{(0)}\left(\omega+\frac{2j\pi}{3}\right)P^{(\alpha)}\left(\omega+\frac{2j\pi}{3}\right)e^{-3i(R-l)\omega}d\omega=O.$$

5 结论

通过引进正向面具符号、负向面具符号、多尺度双向矩阵值多分辨分析,以及运用傅立叶变换和矩阵理论,给出了紧支撑多尺度双向矩阵值正交小波的构造算法. 运用矩阵理论和时频分析方法,刻画一类多尺度双向矩阵值正交小波包的特征,得到关于双向矩阵值小波包的正交公式.

6 参考文献

[1] 高宏伟,韩可众. 2 维 3 尺度双正交小波滤波器的显示构造 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2010,34(6):615-620.

[2] 赵晓花,张贵仓. 一种基于边缘检测和正负量化的盲水印算法 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(1):42-45.

[3] 李华,李杰,江晓武,等. 数量矩阵伸缩的高维矩阵值小波包 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2007,31(4):370-374.

[4] Yang Shouzhi,Tang Yuanyan,Cheng Zhengxing. Construction of compactly supported orthogonal multiwavelet with scale = a [J]. J Comp Math,2001,24(4):451-460.

[5] Xia Xianggen,Suter B W. Vector-valued wavelets and vector filter banks [J]. IEEE Trans Signal Process,1996,44(3):508-518.

[6] Fowler J E,Li Hua. Wavelets Transforms for vector fields using omnidretionally balanced mutli-wavelet [J]. IEEE Trans Signal Processing,2002,50(12):3018-3027.

[7] Yang Shouzhi,Li Youfa. Two-direction refinable functions and two-direction wavelets with dilation factor m [J]. Applied Mathematics and Computation,2007,188(2):1908-1920.

[8] 郑方,章毓晋. 数字信号与图像处理 [M]. 北京:清华大学出版社,2006.

[9] Luo Lisuo,Li Wanshe,Li Qiao. A study on orthogonal two-direction vector-valued wavelets and two-direction wavelet packets [J]. Applied Mathematics and Computation,2011,217(24):10146-10157.

[10] Chen Qingjiang,Cheng Zhengxing. A study on compactly supported orthogonal vector-valued wavelets and wavelet packets [J]. Chaos,Solitons and Fractals,2007,31(4):1024-1034.

[11] Xie Changzhen,Yang Shouzhi. Orthogonal two-direction multiscaling functions [J]. Front Math China,2006,4(1):604-611.

[12] 陈清江,冯金顺,程正兴. 关于多重向量值正交上波的存在性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2006,30(5):431-435.

[13] 邸继征. 小波分析原理 [M]. 北京:科学出版社,2009.

The Properties of Multiscale Two-Directional Matrix-Valued Wavelets

HAN Ke-zhong[1],REN Bi-jun[2]

(1. Henan Information and Statistics Vocational College,Zhengzhou Henan 450011,China;

2. Department of Information Engineering,Henan College of Finance & Taxation,Zhengzhou Henan 451464,China)

Abstract: Properties of multiscale two-directional matrix-valued wavelets are studied by using matrix theory and time-frequency method. Firstly,the concept of orthogonalmultiscale two-directional matrix-valued wavelets is introduced. Secondly,a constructivealgorithm formultiscale two-directional matrix-valued wavelets is presented. Finally,a class of multiscale two-directionalmatrix-valued wavelet packets are characterized.

Key words: matrix-valued scaling functions; positive mask function; negative mask function; two-directional matrix-valued wavelets; matrix-valued wavelet transform; two-directional matrix-valued wavelet packets

(责任编辑:曾剑锋)