

文章编号: 1000-5862(2013)06-0637-04

带直接免疫的 SIRS 模型中疾病 以 2 种途径传播的动力学分析

石定琴, 柯 林, 周金贵*, 余荣忠

(九江学院理学院 江西 九江 332005)

摘要: 在带直接免疫的 SIRS 模型基础上, 考虑疾病以 2 种途径进行传播. 研究表明: 流行病的传染阈值不仅与网络拓扑结构、直接免疫率、免疫丧失率和染病节点的传染能力有关, 而且会受到 2 种传播途径在网络上的分布比例的影响.

关键词: 传染阈值; 直接免疫; 2 种途径

中图分类号: O 157.5

文献标志码: A

0 引言

长期以来, 复杂网络上流行病学的生物模型受到众多来自不同领域的学者们的关注^[1-6]. 对于复杂网络中流行病的传播机制, 不同学者有不同的考虑. R. Pastor-Satorras 认为染病个体的传染能力与它们的度成正比^[7-9], 即度越大的患者传染能力越强, 并且用 $\theta(t) = \sum_k (P(k|k)) I_k$ 表示从度为 k 的结点出发指向染病结点的概率. 结论表明, 无论网络的尺寸有多大, 流行病的传染阈值 λ_c 都为 0.

然而, 文献[10]认为无论每个染病个体的度是多少, 它们都有相同的传染能力 U . 因此 $\theta(t)$ 应该有另一种形式: $\theta(t) = \sum_k U(P(k|k)) I_k / k$. 理论结果计算的表明, 不论个体的度和网络的尺寸有多大, 流行病的传染阈值为常数, 即 $\lambda_c = 1/U$.

以上 2 种观点都只考虑疾病以 1 种相同的途径在网络上传播, 相应的结果都太特殊而不能完全反映出疾病的传播机制. 然而, 在现实网络中, 疾病的传播途径较多, 其传染阈值与度分布和网络尺寸等是相关的, 如艾滋病可以通过性、输血、母婴等多种途径进行传播. 因此, 在复杂网络中考虑疾病以多种途径同时进行传播会更合理. Zhang Hai-feng 在 SIS

模型中讨论疾病以 2 种途径在网络上传播^[11], 得到传染阈值会受到 2 种传播方式的影响.

另外, 给易感者接种疫苗, 无疑对控制疫情的爆发有积极作用. 文献[12]提出了一类带有直接免疫的 SIRS 模型. 遗憾的是该文也只考虑了疾病以一种方式传播. 本文将在带直接免疫的 SIRS 模型中同时考虑以上 2 种传播途径, 利用平均场理论建立模型, 并进行全局分析.

1 基本模型

令 $S_k(t)$, $I_k(t)$, $R_k(t)$ 分别表示 t 时刻度为 k 的节点中易感者浓度、染病者浓度、健康且有免疫力的个体浓度, 并且 $S_k(t) + I_k(t) + R_k(t) = 1$. 其中易感者与染病者接触后会以一定概率得病转化为染病者; 另一方面, 人们了解疫情后, 会有一定比例的易感者接种疫苗, 从而对病毒具有暂时免疫力成为移除者. 染病者治愈后获得暂时免疫力或死亡转化为移除者. 移除者由于免疫力丧失, 会有一部分转化为易感者.

在现实生活中, 传染病不会以一种单一的途径传播. 这里考虑疾病以 2 种途径在网络上传播, 假设网络中节点的度是不相关的, 即 $P(k|k) = kP(k) / \langle k \rangle$, 则 2 种传播途径对应的 $\theta(t)$ 分别为

收稿日期: 2013-10-15

基金项目: 江西省自然科学基金(20132BAB201012), 江西省教育厅科技(GJJ12617)和江西省教育厅青年科学基金(GJJ13714)资助项目.

通信作者: 周金贵(1963-), 男, 江西修水人, 教授, 主要从事管理系统、复杂网络和动力系统方面的研究.

$$\theta_1(t) = \sum_{k'} (P(k'|k)) I_{k'} = \sum_{k'} k' P(k') I_{k'} / \langle k \rangle,$$

$$\theta_2(t) = \sum_{k'} U(P(k'|k)) I_{k'} / k' = \sum_{k'} U P(k') I_{k'} / \langle k \rangle,$$

其中 $P(k')$ 为度分布.

设 β_1, β_2 分别为与 $\theta_1(t), \theta_2(t)$ 相应的传染率 q 表示第 1 种传播途径所占的比例 γ 为染病者恢复健康且有免疫力的概率 α 为给易感者接种疫苗使其有免疫力的概率 δ 为免疫者丧失免疫力的概率. 则 SIRS 模型的动力学方程为

$$\begin{cases} \frac{dS_k(t)}{dt} = -q\beta_1 k S_k(t) \theta_1(t) - (1-q)\beta_2 k S_k(t) \theta_2(t) - \alpha S_k(t) + \delta R_k(t), \\ \frac{dI_k(t)}{dt} = q\beta_1 k S_k(t) \theta_1(t) + (1-q)\beta_2 k S_k(t) \theta_2(t) - \gamma I_k(t), \\ \frac{dR_k(t)}{dt} = \alpha S_k(t) + \gamma I_k(t) - \delta R_k(t). \end{cases} \quad (1)$$

根据 $S_k(t) + I_k(t) + R_k(t) = 1$ 将 $\theta_1(t), \theta_2(t)$ 代入方程(1) 系统可化为

$$\begin{cases} \frac{dS_k(t)}{dt} = -k S_k(t) \Theta(t) + \delta - (\alpha + \delta) S_k(t) - \delta I_k(t), \\ \frac{dI_k(t)}{dt} = k S_k(t) \Theta(t) - \gamma I_k(t), \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{其中 } \Theta(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k [q\beta_1 k + (1-q)\beta_2 U] P(k) I_k(t).$$

2 流行病阈值及全局分析

定理 1 当 $\delta q \beta_1 \langle k^2 \rangle / [(\alpha + \delta) \gamma \langle k \rangle] + \delta(1-q) U \beta_2 / [(\alpha + \delta) \gamma] > 1$ 时, 系统(2) 存在唯一的地方病平衡点. 疾病将在网络上蔓延.

证 令系统(2) 右边等于 0, 则

$$\begin{cases} \gamma I_k(t) = k \Theta(t) S_k(t), \\ S_k(t) = \frac{\delta}{\alpha + \delta} - \frac{\gamma + \delta}{\alpha + \delta} I_k(t), \end{cases} \quad (3)$$

进一步地化简可得

$$I_k(t) = \frac{\delta k \Theta(t)}{\delta k \Theta(t) + \gamma k \Theta(t) + (\alpha + \delta) \gamma}.$$

令 $F_1 = \delta k \Theta(t), F_2 = \delta k \Theta(t) + \gamma k \Theta(t) + (\alpha + \delta) \gamma$ 则 $I_k(t) = F_1 / F_2$. 于是得到自适应方程:

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k [q\beta_1 k + (1-q)\beta_2 U] P(k) I_k(t) = \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k [q\beta_1 k + (1-q)\beta_2 U] P(k) \frac{F_1}{F_2} = \end{aligned}$$

$$\frac{\langle [q\beta_1 k + (1-q)\beta_2 U] F_1 / F_2 \rangle}{\langle k \rangle} \equiv F(\Theta(t)). \quad (4)$$

显然 $\Theta(t) = 0$ 是方程(4) 的平凡解, 但是本文感兴趣的是疾病暴发的条件. 当 $\left. \frac{dF}{d\Theta} \right|_{\Theta=0} > 1$ 时, 方程(4) 一定存在另一个非平凡解 $\Theta(t) > 0$. 通过计算知,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\Theta} &= \frac{1}{\langle k \rangle} \langle [q\beta_1 k + (1-q)\beta_2 U] \left(\frac{dF_1}{d\Theta} F_2 - \frac{dF_2}{d\Theta} F_1 \right) / F_2^2 \rangle = \frac{1}{\langle k \rangle} \langle [q\beta_1 k + (1-q)\beta_2 U] [\delta k F_2 - (\delta k + \gamma k) F_1] / F_2^2 \rangle. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF}{d\Theta} \right|_{\Theta=0} &= \frac{1}{\langle k \rangle} \langle [q\beta_1 k + (1-q)\beta_2 U] \frac{\delta k_1}{(\alpha + \delta) \gamma} \rangle = \\ &= \frac{\delta q \beta_1 \langle k^2 \rangle}{(\alpha + \delta) \gamma \langle k \rangle} + \frac{\delta(1-q) U \beta_2}{(\alpha + \delta) \gamma}, \end{aligned}$$

故当 $\delta q \beta_1 \langle k^2 \rangle / [(\alpha + \delta) \gamma \langle k \rangle] + \delta(1-q) U \beta_2 / [(\alpha + \delta) \gamma] > 1$ 时, 系统存在非平凡解, 即存在地方病平衡点. 疾病将在网络上扩散.

下面证明地方病平衡点的唯一性. 不失一般性, 证明染病节点浓度的唯一性. 设 $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)$ 和 $I^* = (I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*)$ 是方程(3) 的 2 个不同根.

令 $\eta = \max\{I_1/I_1^*, I_2/I_2^*, \dots, I_n/I_n^*\}$ 且 $\eta > 1$.

若 $\exists k_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得 $\eta = I_{k_0}/I_{k_0}^*$ 则令 $\gamma = 1$, 由方程(3) 得

$$I_{k_0} = k_0 \Theta(I) \left[\frac{\delta}{\alpha + \delta} - \frac{1 + \delta}{\alpha + \delta} I_{k_0} \right], \quad (5)$$

$$I_{k_0}^* = k_0 \Theta(I^*) \left[\frac{\delta}{\alpha + \delta} - \frac{1 + \delta}{\alpha + \delta} I_{k_0}^* \right], \quad (6)$$

$$\text{其中 } \Theta(I) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k [q\beta_1 k + (1-q)\beta_2 U] P(k) I_k.$$

由(5) 式和(6) 式知,

$$\begin{aligned} k_0 \Theta(I) \left[\frac{\delta}{\alpha + \delta} - \frac{1 + \delta}{\alpha + \delta} I_{k_0} \right] &= \\ \eta k_0 \Theta(I^*) \left[\frac{\delta}{\alpha + \delta} - \frac{1 + \delta}{\alpha + \delta} I_{k_0}^* \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

又由 η 的定义可得

$$\eta k_0 \Theta(I^*) > k_0 \Theta(I),$$

$$\left[\frac{\delta}{\alpha + \delta} - \frac{1 + \delta}{\alpha + \delta} I_{k_0}^* \right] > \left[\frac{\delta}{\alpha + \delta} - \frac{1 + \delta}{\alpha + \delta} I_{k_0} \right],$$

这与(7) 式矛盾! 所以地方病平衡点是唯一的.

定理 2 对于系统(2), 当 $\delta q \beta_1 \langle k^2 \rangle / [(\alpha + \delta) \gamma \langle k \rangle] + \delta(1-q) U \beta_2 / [(\alpha + \delta) \gamma] < 1$ 时, 系统在无病平衡点处全局渐进稳定; 否则, 系统存在唯一

的地方病平衡点.

证 令系统(2)右边等于0,得无病平衡点处:

$I_k(t) = 0, S_k(t) = \delta/(\alpha + \delta), k = 1, 2, \dots, n$, 记 $\tau = \delta/(\alpha + \delta)$, 易得无病平衡点处的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix},$$

其中 $A = -(\alpha + \delta)E_n$ 是 n 阶方阵, O 是 n 阶零矩阵, B, C 都是 n 阶方阵, 它们分别为

$$B = \begin{pmatrix} -\delta - \frac{\tau}{\langle k \rangle} [q\beta_1 + \omega]P(1) & -\frac{\tau}{\langle k \rangle} [2q\beta_1 + \omega]P(2) & \cdots & -\frac{\tau}{\langle k \rangle} [nq\beta_1 + \omega]P(n) \\ -\frac{2\tau}{\langle k \rangle} [q\beta_1 + \omega]P(1) & -\delta - \frac{2\tau}{\langle k \rangle} [2q\beta_1 + \omega]P(2) & \cdots & -\frac{2\tau}{\langle k \rangle} [nq\beta_1 + \omega]P(n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{n\tau}{\langle k \rangle} [q\beta_1 + \omega]P(1) & -\frac{n\tau}{\langle k \rangle} [2q\beta_1 + \omega]P(2) & \cdots & -\delta - \frac{n\tau}{\langle k \rangle} [nq\beta_1 + \omega]P(n) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\gamma + \frac{\tau}{\langle k \rangle} [q\beta_1 + \omega]P(1) & \frac{\tau}{\langle k \rangle} [2q\beta_1 + \omega]P(2) & \cdots & \frac{\tau}{\langle k \rangle} [nq\beta_1 + \omega]P(n) \\ \frac{2\tau}{\langle k \rangle} [q\beta_1 + \omega]P(1) & -\gamma + \frac{2\tau}{\langle k \rangle} [2q\beta_1 + \omega]P(2) & \cdots & \frac{2\tau}{\langle k \rangle} [nq\beta_1 + \omega]P(n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n\tau}{\langle k \rangle} [q\beta_1 + \omega]P(1) & \frac{n\tau}{\langle k \rangle} [2q\beta_1 + \omega]P(2) & \cdots & -\gamma + \frac{n\tau}{\langle k \rangle} [nq\beta_1 + \omega]P(n) \end{pmatrix},$$

其中 $\omega = (1 - q)\beta_2 U$.

为了分析无病平衡点的稳定性, 计算矩阵 J 的特征值. 其特征多项式为

$$|J - \mu E| = |A - \mu E_n| |C - \mu E_n| = (-1)^n (\mu + \alpha + \delta)^n |C - \mu E_n|,$$

其中 μ 为特征值. 记 $D = C - \mu E_n$, 则

$$|D| = \begin{vmatrix} -\gamma + \frac{\tau}{\langle k \rangle} [q\beta_1 + \omega]P(1) - \mu & \frac{\tau}{\langle k \rangle} [2q\beta_1 + \omega]P(2) & \cdots & \frac{\tau}{\langle k \rangle} [nq\beta_1 + \omega]P(n) \\ \frac{2\tau}{\langle k \rangle} [q\beta_1 + \omega]P(1) & -\gamma + \frac{2\tau}{\langle k \rangle} [2q\beta_1 + \omega]P(2) - \mu & \cdots & \frac{2\tau}{\langle k \rangle} [nq\beta_1 + \omega]P(n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n\tau}{\langle k \rangle} [q\beta_1 + \omega]P(1) & \frac{n\tau}{\langle k \rangle} [2q\beta_1 + \omega]P(2) & \cdots & -\gamma + \frac{n\tau}{\langle k \rangle} [nq\beta_1 + \omega]P(n) - \mu \end{vmatrix},$$

经过行列式的基本运算可得

$$|D| = \begin{vmatrix} H(\mu) & \frac{\tau}{\langle k \rangle} [2q\beta_1 + \omega]P(2) & \cdots & \frac{\tau}{\langle k \rangle} [nq\beta_1 + \omega]P(n) \\ 0 & -\gamma - \mu & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma - \mu \end{vmatrix},$$

其中 $H(\mu) = -\gamma - \mu + \tau q \beta_1 \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle + \tau \omega$.

显然 J 有特征值 $\mu_1 = -(\alpha + \delta)$ (其为 n 重特征根) $\mu_2 = -\gamma$ (其为 $n - 1$ 重特征根) $\mu_3 = -\gamma + \tau q \beta_1 \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle + \tau \omega$, 其中 μ_1, μ_2 均为负实根, 所以系统在无病平衡点处渐进稳定的充要条件为 $\mu_3 \leq 0$, 即 $-\gamma + \tau q \beta_1 \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle + \tau \omega \leq 0$. 由此推出 $\delta q \beta_1 \langle k^2 \rangle / [(\alpha + \delta) \gamma \langle k \rangle] + \delta(1 - q) U \beta_2 / [(\alpha + \delta) \gamma] \leq 1$, 定理2得证.

由定理2知, (i) 当 $q = 1$ 时, 有 $\delta q \beta_1 \langle k^2 \rangle / [(\alpha + \delta) \gamma \langle k \rangle] \leq 1$, 记 $\lambda = \beta_1 / \gamma$ 为有效传染率, 则 $\lambda = \beta_1 / \gamma < (1 + \alpha / \delta) \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$, 从而传

染阈值 $\lambda_c = (1 + \alpha / \delta) \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$, 该结果与文献[12]一致. 此时, 传染阈值与网络的拓扑结构、免疫率 α 和免疫丧失率 δ 有关.

(ii) 当 $q = 0$ 时, 有 $\delta(1 - q) U \beta_2 / [(\alpha + \delta) \gamma] \leq 1$, 则有效传染率 $\lambda = \beta_2 / \gamma < (1 + \alpha / \delta) / U$. 从而传染阈值 $\lambda_c = (1 + \alpha / \delta) / U$, 它与节点的度和网络拓扑结构无关, 只受染病节点的传染能力 U 、免疫率 α 和免疫丧失率 δ 影响.

(iii) 当 $0 < q < 1$ 时, 疾病在复杂网络上存在2种传播途径. 此时, 疾病暴发的阈值不仅与网络拓扑结构、免疫率 α 、免疫丧失率 δ 和染病节点的传染能

力 U 有关,而且会受到 2 种传播途径在网络中所占比例的影响.

3 参考文献

- [1] Newman M E J. The structure and function of complex networks [J]. SIAM Review 2003 45(2): 167-256.
- [2] Boccaletti S, Latorab V, Moreno Y, et al. Complex networks: structure and dynamics [J]. Physics Reports, 2006 424(4/5): 175-308.
- [3] Funk S, Jansen V A A. Interacting epidemics on overlay networks [J]. Phys Rev E 2010 81(3): 118-128.
- [4] Karrer B, Newman M E J. Competing epidemics on complex networks [J]. Phys Rev E 2011 84(3): 106-118.
- [5] Xia Chengyi, Wang Zhen, Sanz J, et al. Effects of delayed recovery and nonuniform transmission on the spreading of diseases in complex networks [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2013, 392(7): 1577-1585.
- [6] Xia Chengyi, Wang Li, Sun Shiwen, et al. An SIR model with infection delay and propagation vector in complex networks [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 69(3): 927-934.
- [7] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks [J]. Phys Rev E, 2001 63(6): 117-123.
- [8] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks [J]. Phys Rev Lett, 2001, 86(14): 3200-3208.
- [9] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic dynamics in finite size scale-free networks [J]. Phys Rev 2002 65(3): 108-125.
- [10] Zhou Tao, Liu Jianguo, Bai Wenjie, et al. Behaviors of susceptible-infected epidemics on scale-free networks with identical infectivity [J]. Phys Rev E, 2006, 74(5): 109-117.
- [11] Zhang Haifeng, Small M, Fu Xinchu. Global behavior of epidemic transmission on heterogeneous networks via two distinct routes [J]. Nonlinear Biomedical Physics 2008 2(2): 1-7.
- [12] 夏承遗, 刘忠信, 陈增强, 等. 复杂网络上带有直接免疫的 SIRS 类传染模型研究 [J]. 控制与决策, 2008, 23(4): 468-472.

The Dynamical Analysis for Epidemic Transmission on an SIRS Model with Direct Immunization via Two Distinct Routes

SHI Ding-qin, KE Lin, ZHOU Jin-gui*, YU Rong-zhong
(College of Science, Jiujiang University, Jiujiang Jiangxi 332005, China)

Abstract: Epidemic transmission on complex networks via two distinct routes is considered based on an SIRS model with direct immunization. By theoretical analysis, the epidemic threshold is not only concerned with the topology of networks, direct immunization rate, loss rate of immunity and infective capability of infected individual, but also impacted by the ratio of two routes of spreading epidemic.

Key words: epidemic threshold; direct immunization; two distinct routes

(责任编辑: 曾剑锋)