文章编号:1000-5862(2014)01-0034-03

关于半质环的几个交换性条件

赵　贤,刘敏捷*
(梧州学院数理系,广西 梧州　543002)

摘要:利用正则元、换位子等相关理论对半质环进行研究,给出半质环可换所满足的中心元条件,得到了当 R 是半质环,$\forall a\in R$,$2ma$ 为正则元时,R 为交换环的 2 个交换性条件,拓宽了有关文献的结论.

关键词:半质环;中心元;正则元;交换性
中图分类号:O 153.3　　**文献标志码**:A

0　引言

环理论是一门重要的代数学科,随着科学与技术的不断发展,环理论研究结果越来越完善,并且它的初步结果已在实践中得到了很多的应用.环的交换性是环的重要性质之一,交换性理论是代数几何、代数数论、交换代数等数学分支的基础.若证明一类环是交换的,则可以得到这类环的理论结果.因此,环的交换性研究具有一定的理论意义和应用价值.20 世纪 70 年代末,我国学者开始对环的交换性进行研究.近年来,郭元春、朱捷,于宪君等[1-4]在环的交换性方面取得了许多简洁独到的结论.

文献[6-7]证明了下面的定理 A 和定理 B,

定理 A　R 是半质环,$a\in R$,$2a$ 是正则元,若 $\forall x\in R$,R 满足下列条件之一:

(i) $(xa^2)^2+(xa)^2a^2\in Z(R)$;
(ii) $(xa^2)^2+a^2(xa)^2\in Z(R)$;
(iii) $(axa)^2+(xa)^2a^2\in Z(R)$;
(iv) $(axa)^2+a^2(xa)^2\in Z(R)$;
(v) $(xa^2)^2+xa^3xa\in Z(R)$;
(vi) $(xa^2)^2+a(xa)^2a\in Z(R)$;
(vii) $(axa)^2+xa^3xa\in Z(R)$;
(viii) $(axa)^2+a(xa)^2a\in Z(R)$,

则 R 是交换环.

定理 B　R 是半质环,$a\in R$,m 是自然数,$2ma$ 是正则元,若 $\forall x\in R$,R 满足下列条件之一:

(i) $(xa)^{2m}+x^{2m}a^{2m}\in Z(R)$;
(ii) $(xa)^{2m}+a^{2m}x^{2m}\in Z(R)$;
(iii) $(ax)^{2m}+x^{2m}a^{2m}\in Z(R)$;
(iv) $(ax)^{2m}+a^{2m}x^{2m}\in Z(R)$;
(v) $(xa)^{2m}+x^ma^{2m}x^m\in Z(R)$;
(vi) $(xa)^{2m}+a^mx^{2m}a^m\in Z(R)$;
(vii) $(ax)^{2m}+x^ma^{2m}x^m\in Z(R)$;
(viii) $(ax)^{2m}+a^mx^{2m}a^m\in Z(R)$,

则 R 是交换环.

本文对上述的定理 A 和定理 B 进行推广,得出较广泛的交换性条件(定理 1 和定理 2).

设 R 为结合环,1 表示单位元,$Z(R)$ 表示 R 的中心,Z^0 为非负整数集.记 $K=\{2^k\mid k\in Z^0\}$,$Z(X)$ 是关于未定元 X 的整系数多项式之集.设 X,Y 为不可换未定元,记

$$A[X,Y]=\{f(X,Y)=a_1(XY)^{2m}+a_2(X^mY^{2m}X^m)+a_3X^{2m}Y^{2m}+a_4Y^mX^{2m}Y^m+a_5Y^{2m}X^{2m}+a_6(YX)^{2m}\mid a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,6),|f|_c=\sum_{i=1}^{6}a_i=(2m)^k\in K\}.$$

定理 1　设 R 是半质环,$a\in R$,$2ma$ 是正则元,整数 $M>0$.如果 $\forall x,y\in R$ 有依赖于 x,y 的多项式 $f_{xy}(X,Y)\in A[X,Y]$,正整数 $n(1<n=n(x,y)\leqslant M)$,使得 $[f_{xy}(x,a),y^n]\in Z(R)$,则 R 是交换环.

定理 2　设 R 是半质环,m 为自然数,$a\in R$,$2ma$ 为正则元,如果 $\forall x\in R$,R 满足下列条件之一:

(i) $(xa^2)^{2m}+(xa)^{2m}a^{2m}\in Z(R)$;
(ii) $(xa^2)^{2m}+a^{2m}(xa)^{2m}\in Z(R)$;
(iii) $(axa)^{2m}+(xa)^{2m}a^{2m}\in Z(R)$;
(iv) $(axa)^{2m}+a^{2m}(xa)^{2m}\in Z(R)$,

则 R 是交换环.

收稿日期:2013-09-05
基金项目:广西区教育厅广西高校科学技术研究(2013YB232)和梧州学院科研(2010B001,2012C002)资助项目.
通信作者:刘敏捷(1973-),女,广西梧州人,副教授,主要从事代数学方面的研究.

1　若干引理

引理 1　设 R 是环,$x,y \in R$,则

(ⅰ) 如果 $[x,y] \in Z(R)$,则 $\forall n \in \mathbf{Z}^+$, $[x,y^n] = ny^{n-1}[x,y]$;

(ⅱ) 如果 $[x,y] = 0$,则 $\forall n \in \mathbf{Z}^+$, $[x,y^n] = 0$.

引理 2　设 R 是半质环,$m \in \mathbf{Z}^+$,$a \in R$,如果 $\forall x \in R$,有 $[a,x^m] = 0$,则 $a \in Z(R)$.

引理 3　设 R 是环,$a,b \in Z(R)$,则 $a \pm b \in Z(R)$.

引理 4　设 R 是环,$m \in \mathbf{Z}$,$a \in R$,$2ma$ 是正则元,如果 $\forall b \in R$,$k \in Z^0$,有 $2m^k b \in Z(R)$,则 $b \in Z(R)$.

证　易知,$\forall x \in R$,有 $(2m)^k [b,x] = 0$,当 $k = 0$ 时,显然有 $[b,x] = 0$,即 $b \in Z(R)$;当 $k \geqslant 1$,由 $2ma$ 是正则元,$(2m)^k a^k [b,x] = 0$,从而 $[b,x] = 0$,即 $b \in Z(R)$.

引理 5[12]　设 R 是半质环,n 是自然数,$a \in R$,如果 $\forall x \in R$,有 $(xa)^n = 0$,则 $a = 0$.

引理 6　设 R 是半质环,m 为自然数,$2ma$ 为正则元,$a \in Z(R)$,$ab \in Z(R)$,则 $b \in Z(R)$.

证　$\forall x \in R$,$a \in Z(R)$,则有 $ax = xa$,又 $ab \in Z(R)$,所以有 $abx = xab = axb$,因为 $2ma$ 为正则元,所以有 $bx = xb$,故 $b \in Z(R)$.

2　定理的证明

定理 1 的证明　$\forall g(x) \in Z[X]$,记 $b = g(a)$,$\forall y \in R$,令 $x = b$,由定理 1 的条件 $f_{by}(X,Y) \in A[X,Y]$ 和 $n = n(b,y) \leqslant M$ 得 $[f_{by}(b,a),y^n] \in Z[R]$,且 $f_{by}(b,a) = |f_{by}|_c a^{2m} g^{2m}(a)$. 从而 $[|f_{by}|_c a^{2m} g^{2m}(a), y^n] \in Z[R]$,进而 $|f_{by}|_c [a^{2m} g^{2m}(a),y^n] \in Z[R]$. 又因为 $|f_{by}|_c^2 \in K$,所以 $\exists\ k \in Z^0$ 使得 $|f_{by}|_c = (2m)^k$,由引理 4 知,

$$[a^{2m} g^{2m}(a),y^n] \in Z[R], \tag{1}$$

且 $n = n(b,y) = n(g(a),y) \leqslant M$,$y \leqslant M$. 令 $y^n = c$,(1) 式化为 $[a^{2m} g^{2m}(a),c] \in Z[R]$,从而 $\exists n_1 = n(b,c) = n(g(a),y^n) \leqslant M$ 使得 $[a^{2m} g^{2m}(a),c^{n_1}] \in Z[R]$,由引理 1 得 $[a^{2m} g^{2m}(a),c^{n_1}] = n_1 c^{n_{11}-1}[a^{2m} \cdot g^{2m}(a),c] \in Z[R]$. 又 $[a^{2m} g^{2m}(a),c] \in Z[R]$,从而 $\forall x \in R$, $[n_1 c^{n_1-1}[a^{2m} g^{2m}(a),c],x] = n_1 [c^{n_{11}-1},x][a^{2m} g^{2m}(a),c] = 0$.

因此,$\forall x,y \in R$,

$$n_1 [y^{n(n_{11}-1)},x][a^{2m} g^{2m}(a),y^n] = 0, n_1 = n(g(a),y^n) \leqslant M, n = n(g(a),y) \leqslant M. \tag{2}$$

设 P 是 R 的任意一个质理想,记 $\bar{R} = R/P$,可得 $\bar{R}$ 为质环. 设 p 是质数,下面分 2 种情况讨论.

(ⅰ) $\mathrm{Char}\bar{R} \neq p$,则 $\mathrm{Char}\bar{R} = 0$. 令 $x = a^{2m} g^{2m}(a)$,由(2) 式得 $n_1 [y^{n(n_{11}-1)},a^4 g^2(a)][a^4 g^2(a),y^n] = 0$,所以 $n_1 [(\bar{y})^{n(n_{11}-1)},(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a})][(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}),(\bar{y})^n] = 0$,从而 $[(\bar{y})^{n(n_{11}-1)},(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a})][(\bar{a})^{2m} \cdot g^{2m}(\bar{a}),(\bar{y})^n] = 0$. 又因为 $[a^{2m} g^{2m}(a),y^n] \in Z[R]$,即 $[(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}),(\bar{y})^n] \in Z[\bar{R}]$,质环的中心元不含非零的零因子,所以由上式可得 $[(\bar{y})^{n(n_{11}-1)},(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a})] = \bar{0}$ 或 $[(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}),(\bar{y})^n] = \bar{0}$,由引理 1 知,总有 $[(\bar{y})^{n(n_{11}-1)},(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a})] = \bar{0}$. 又 $n,n_1 \leqslant M$,$M!^2/[n(n_1-1)] \in \mathbf{Z}^+$,由引理 1 有 $\forall y \in R$, $[(\bar{y})^{M!},(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a})] = \bar{0}$,故由引理 2 得 $(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}) \in Z[\bar{R}]$.

(ⅱ) $\mathrm{Char}\bar{R} = p > 0$,由 $[(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}),(\bar{y})^n] \in Z[\bar{R}]$ 及引理 1 有

$$[(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}),(\bar{y})^{pM!}] = [(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}),(\bar{y})^{n \cdot \frac{pM!}{n}}] = p \cdot \frac{M!}{n}\{(\bar{y})^n\}^{(\frac{pM!}{n}-1)}[(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}),(\bar{y})^n] = \bar{0},$$

故由引理 2 得 $(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}) \in Z[\bar{R}]$.

由(ⅰ)和(ⅱ)知 $(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}) \in Z[\bar{R}]$,即 $\forall x \in R$, $[(\bar{a})^{2m} g^{2m}(\bar{a}),\bar{x}] = \bar{0}$,从而 $\forall x \in R$, $[(a)^{2m} g^{2m}(a),x] \in P$. 又 R 是半质环,所以 $\forall x \in R$, $[(a)^{2m} g^{2m}(a),x] \in \bigcap P = \{0\}$. P 是 R 中任取的一个质理想,从而有 $(a)^{2m} g^{2m}(a) \in Z[R]$, $g(X) \in Z[X]$. 令 $g(X) = X$,有 $a^{4m} \in Z[R]$;令 $g(X) = X^2$,有 $a^{6m} \in Z[R]$,故有 $\lfloor a^{6m},x \rfloor = 0$,即 $a^{4m} \lfloor a^{2m},x \rfloor = 0$. 因为 $2ma$ 是正则元,所以 $\lfloor a^{2m},x \rfloor = 0$,即 $a^{2m} \in Z(R)$,从而有 $g^{2m}(a) \in Z(R)$;令 $g(X) = 1 + X$,即 $g^{2m}(a) = C_{2m}^0 a^{2m} + C_{2m}^1 a^{2m-1} + \cdots + C_{2m}^{2m-1} a + 1 \in Z(R)$,从而

$$g^{2m}(a) = C_{2m}^0 a^{2m} + C_{2m}^1 a^{2m-1} + \cdots + C_{2m}^{2m-1} a \in Z(R). \tag{3}$$

下面用数学归纳法证明 $a \in Z(R)$.

(a) 当 $m = 1$ 时,(3) 式可化为 $g^2(a) = C_2^1 a = 2a \in Z(R)$,因为 $2a$ 是正则元,所以有 $a \in Z(R)$.

(b) 假设当 $1 < m \leqslant k$ 时,结论成立,即 $g^{2i}(a) = C_{2i}^1 a^{2i-1} + \cdots + C_{2i}^{2i-1} a \in Z(R)$,其中 $i = k,k-1,\cdots,2$,且 $a \in Z(R)$.

当 $m = k + 1$ 时,有 $g^{2k+2}(\mathrm{a}) = C_{2(k+1)}^1 a^{2(k+1)-1} + \cdots + C_{2(k+1)}^{2(k+1)-1} a = C_{2k+2}^1 a^{2k+1} + \cdots + C_{2k+2}^{2k+1} a \in Z(R)$.

令 $\mathrm{I}_i = g^{2i}(a)$,$\mathrm{II}_i^* = q_i \mathrm{II}_i - t_i a \mathrm{I}_i$,$\mathrm{II}_i = q_i \cdot \mathrm{II}_{i+1}^* - c_i a^2 \mathrm{I}_i$,$\mathrm{II}_{k+1}^* = g^{2k+2}(a)$,则 $\exists q_i,c_i,t_i \in Z^0$,使得 $\mathrm{II}_i,\mathrm{II}_i^* \in Z(R)$,其中 $i = k,k-1,\cdots,2$. 容易知道 q_i 可取 I_i 的最高项系数,c_i 可取 II_{i+1}^* 的最高项系数,而 t_i 可取 II_i 的最高项系数,所以

$$\Pi_1^* = \prod_{i=k}^{1} q_i^2 C_{2k+2}^{2k+1} a = (2k+2)\prod_{i=k}^{1} q_i^2 a \in Z(R).$$

又因为 $\prod_{i=k}^{1} q_i^2 \in Z^0$，则令 $\prod_{i=k}^{1} q_i^2 = s$，从而有 $(s+1)(k+1)\ I_1 - \Pi_2^* = 2(k+1)a \in Z(R)$，由 $2(k+1)a$ 是正则元得 $a \in Z(R)$.

$\forall x,y \in R$，由定理 1 的条件，$\exists n = n(x,y) \leqslant M$，$f_{xy}(X,Y) \in A[X,Y]$ 使得 $[f_{xy}(x,a),y^n] \in Z(R)$. 又由于 $a \in Z(R)$，从而 $f_{xy}(x,a) = |f_{xy}|_c a^{2m}x^{2m}$，所以

$$[f_{xy}(x,a),y^n] = \lfloor |f_{xy}|_c a^{2m}x^{2m}, y^n \rfloor = |f_{xy}|_c a^{2m}[x^{2m},y^n] \in Z(R).$$

因为 $|f_{xy}|_c \in K$，由引理 4 得 $a^{2m}[x^{2m},y^n] \in Z(R)$. 又因为 $a \in Z(R)$，$2ma$ 是正则元，所以 $[x^{2m},y^n] \in Z(R)$，由文献[1]知 R 是交换环.

定理 2 的证明 (i) 当 $m \geqslant 1$ 时，a 不是幂零元，且 $a^{2m} \in Z(R)$.

下面先证当 $m \geqslant 1$ 时，a 不是幂零元.

若 $a^2 = 0$，则有 $2ma^2 = 0$，由定理 2 的条件 $2ma$ 是正则元得 $a = 0$.

若 $a^k = 0(k \geqslant 3)$，令 $x = ra^{k-3}(\forall r \in R)$，由条件(i)知，$(ra^{k-3}\cdot a^2)^{2m} + (ra^{k-3}\cdot a)^{2m}\cdot a^{2m} = (ra^{k-1})^{2m} + (ra^{k-2})^{2m}\cdot a^{2m} = (ra^{k-1})^{2m} \in Z(R)$，从而有 $(ra^{k-1})^{2m+1} = (ra^{k-1})^{2m}\cdot ra^{k-1} = r\cdot(ra^{k-1})^{2m}\cdot a^{k-1} = r(ra^{k-1})^{2m-1}\cdot ra^{2k-2} = 0$. 由文献[10]知 $a^{k-1} = 0$.

再证 $a^{2m} \in Z(R)$.

令 $x = a$，由条件(i)知 $(a^3)^{2m} + (a^2)^{2m}\cdot a^{2m} \in Z(R)$，即 $2a^{6m} \in Z(R)$. 又 $2ma$ 是正则元，所以有 $a^{6m} \in Z(R)$. 同理令 $x = a^2$，有 $a^{8m} \in Z(R)$，考虑 $a^{6m}[a^{2m},x] = a^{8m}x - a^{6m}xa^{2m} = a^{8m}x - xa^{8m} = 0$，即 $(2m)^{6m}a^{6m}[a^{2m},x] = 0$，从而 $[a^{2m},x] = 0$，所以有 $a^{2m} \in Z(R)$.

(ii) 由条件(i)知 $(xa^2)^{2m} + (xa)^{2m}\cdot a^{2m} = x^{2m}\cdot a^{2m}\cdot a^{2m} + (xa)^{2m}\cdot a^{2m} \in Z(R)$，由引理 2 得

$$x^{2m}\cdot a^{2m} + (xa)^{2m} \in Z(R),$$

再由文献[7]知 R 是交换环.

同理可证，当 R 满足条件(ii) ~ (iv)之一时，R 也是交换环.

注 1 文献[1,6-8]的有关结论为定理 2 的推论.

3 参考文献

[1] 于宪君，朱捷. 关于半质环的交换性条件[J]. 哈尔滨商业大学学报：自然科学版，2003，19(6)：621-622，625.

[2] 朱杰，于宪君，国春光. 关于半质环的中心元与交换性[J]. 黑龙江大学自然科学学报，1998，15(4)：28-30.

[3] 郭元春. 半质环的中心元[J]. 吉林大学自然科学学报，1991(4)：33-36.

[4] 朱孝璋. Bear 半单纯环的几个交换性条件[J]. 吉林大学自然科学学报，1984(3)：27-34.

[5] 邱琦章. 半单纯环交换性的充分条件[J]. 数学杂志，1982，2(3)：291-302.

[6] 杜君花，堵秀凤，白华，等. 环的一个交换性条件[J]. 高师理科学刊，2009，29(1)：13-15.

[7] 王延鹏，陈光海. 关于半质环的几个交换性条件[J]. 哈尔滨理工大学学报：自然科学版，2007，12(6)：77-79.

[8] 朱捷，于宪君. 关于半质环的几个交换性条件[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2008，25(4)：449-451.

[9] 郭元春. 环的交换性条件[J]. 吉林大学自然科学学报，1983(2)：19-25.

[10] 谢邦杰. 抽象代数学[M]. 上海：上海科学技术出版社，1982：205-209.

[11] 郭华光. 半质环的几个交换性定理[J]. 数学研究与评论，1997，17(3)：423-426.

[12] 曹发生，王驹，蒋运承. 有单位元的环的主同余[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2010，34(2)：192-194.

On the Few Commutativity Condition of Semi-Prime Rings

ZHAO Xian，LIU Min-jie*

(Department of Mathematics and Physics，Wu Zhou University，Wu Zhou Guangxi 543002，China)

Abstract: Semi-prime rings are studied and center elements of the commutative semi-prime rings by using normal element，commutator and other related knowledge. Two results are given on commutativity of semi-prime rings are proved when R is a semi-prime ring，$a \in R$，$2ma$ is a normal element，which extends some known conclusions.

Key words: semi-prime rings; center elements; normal element; commutativity

(责任编辑：曾剑锋)