文章编号:1000-5862(2014)01-0037-05

涉及分担值的 Lahiri 型正规定理

陈　雪[1],田宏根[1*],袁文俊[2],陈　玮[1]

(1. 新疆师范大学数学科学学院,新疆 乌鲁木齐　830054;
2. 广州大学数学与信息科学学院,广东 广州　510006)

摘要: 利用亚纯函数的值分布理论,对分担值的 Lahiri 型正规性进行了研究,得到了 2 个正规定理,推广了先前的一些结果.

关键词: 亚纯函数;正规族;分担值

中图分类号: O 174.52　　**文献标志码:** A

0　引言和主要结果

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为区域 $D\subseteq\mathbf{C}$ 内 2 个不为常数的亚纯函数,a 为一个有限复数. 如果 $f-a$ 和 $g-a$ 在 D 内有相同的零点并且所有零点重级也相同(或者不计重级),则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 D 内 CM(或 IM)分担 a. 当 $a=\infty$ 时,$f-a$ 中的零点意味着 f 的极点[1]. 假定读者熟悉一些基本概念和 Navanlinna 值分布理论[1-5].

设 D 为 $\mathbf{C}$ 中的一个区域,F 为区域 D 内的一族亚纯函数. 如果对任一函数序列 $\{f_n\}\subset F$ 包含一个子列 $\{f_{n_j}\}$ 按球面距离内闭一致收敛,则称 F 在 D 内正规.

令

$$p(f)=f^{n_1+n_2+\cdots+n_k},$$
$$M_1(f,f',\cdots,f^{(k)})=f^{n}(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k},$$
$$M_2(f,f',\cdots,f^{(k)})=f^{m}(f')^{m_1}\cdots(f^{(k)})^{m_k},$$
$$\gamma_{M_1}=n+n_1+\cdots+n_k,\gamma_{M_2}=m+m_1+\cdots+m_k,$$
$$\gamma_{M_1}^{*}=\sum_{j=1}^{k-1}n_j,\Gamma_{M_1}=\sum_{j=1}^{k}jn_j,\gamma_{M_2}^{*}=\sum_{j=1}^{k-1}m_j,\Gamma_{M_2}=\sum_{j=1}^{k}jm_j,$$

其中 $n,n_1,\cdots,n_k,m,m_1,\cdots,m_k$ 为非负整数. $M_i(f,f',\cdots,f^{(k)})$ 被称为 f 的微分单项式,Γ_{M_i} 被称为 $M_i(f,f',\cdots,f^{(k)})(i=1,2)$ 的权.

接下来介绍一个与正规族有关的著名 Hayman 猜想.

定理 A[6]　设 F 为区域 D 内一族亚纯函数,n 为正整数,a,b 为 2 个有限复数且满足 $a\neq0$. 如果 $n\geqslant3$,且对 F 中任意函数 f,$f'-af^{n}\neq b$,则 F 在 D 内正规.

定理 B[7]　设 F 为区域 D 内一族亚纯函数,n 为正整数,a,b 为 2 个有限复数且满足 $a\neq0$. 如果 $n\geqslant4$,且对 F 中的任意 2 个函数 f 和 g,$f'-af^{n}$ 和 $g'-ag^{n}$ IM 分担 b,则 F 在 D 内正规.

定理 C[8]　设 F 为区域 D 内一族亚纯函数,n 为正整数,a,b 为 2 个有限复数且满足 $a\neq0$. 定义

$$E_f=\{z\in D:f'(z)+a/f(z)=b\},$$

如果 $\forall z\in E_f$,存在 1 个正数 M,使得对于 F 内任意函数 f 有 $|f(z)|\geqslant M$,则 F 正规.

文献[9]推广了定理 C,得到了下列 2 个有关 Lahiri 型正规定理.

定理 D　设 F 为区域 D 内一族亚纯函数,n 为正整数,m_1,m_2,n_1,n_2 为正整数,且满足 $m_1n_2-m_2n_1>0$,$m_1+m_2\geqslant1$,$n_1+n_2\geqslant2$,令

$$E_f=\{z\in D:(f(z))^{n_1}(f'(z))^{m_1}+\frac{a}{(f(z))^{n_2}(f'(z))^{m_2}}=b\},$$

如果 $\forall z\in E_f$,存在 1 个正数 M,使得对 F 内任意函数 f 有 $|f(z)|\geqslant M$,则 F 正规.

定理 E　设 F 为区域 D 内一族亚纯函数,n 为正整数,a,b 为 2 个有限复数且满足 $a\neq0$. 设 m_1,m_2,n_1,n_2 为正整数,且满足 $m_1n_2=m_2n_1$,令

$$E_f=\{z\in D:(f(z))^{n_1}(f'(z))^{m_1}+$$

收稿日期:2013-10-25

基金项目:国家自然科学基金(11271090),广东省自然科学基金(S2012010010121)和新疆师范大学学术科技创新基金资助项目.

通信作者:田宏根(1953-),男,江苏邗江人,教授,主要从事复分析研究.

$$\frac{a}{(f(z))^{n_2}(f'(z))^{m_2}} = b\},$$

如果 $\forall z \in E_f$,存在 1 个正数 M,使得对 F 内任意函数 f 有 $|f(z)| \geqslant M$,则 F 正规.

文献[10]将定理 D 和定理 E 中的 f' 推广到 $f^{(k)}$,文献[11]研究了一般微分单项或 $M(f,f',\cdots,f^{(k)})$,获得了如下结论.

定理 F 设 F 为区域 D 内一族亚纯函数,n 为正整数,对 F 中任意函数 f 零点重数至少为 k,a,b 为 2 个有限复数且满足 $a \neq 0$,设 $m,n,k(\geqslant 1)$,m_j,n_j $(j=1,2,\cdots,k)$ 为非负整数,且满足

$$\gamma_{M_2}\Gamma_{M_1} - \gamma_{M_1}\Gamma_{M_2} > 0, m_k + n_k > 0, m + n \geqslant 2.$$

令

$$E_f = \{z \in D: M_1(f,f',\cdots,f^{(k)}) + \frac{a}{M_2(f,f',\cdots,f^{(k)})} = b\},$$

如果 $\forall z \in E_f$,存在 1 个正数 M,使得对 F 内任意函数 f 有 $|f(z)| \geqslant M$,则 F 正规.

定理 G 设 F 为区域 D 内一族亚纯函数,n 为正整数,对于 F 中任意函数 f,f 零点重数至少为 k. 设 a,b 为 2 个有限复数且满足 $a \neq 0$,$m,n,k(\geqslant 1)$,m_j,$n_j(j=1,2,\cdots,k)$ 为非负整数,且对任意正整数 m_j,$n_j(j=1,2,\cdots,k)$ 满足 $mnm_kn_k\gamma^*_{M_1}\gamma^*_{M_2} > 0$(当 $n=1$ 或 $m=1$ 时 $k \neq 2$),$m/n = m_j/n_j$. 令

$$E_f = \{z \in D: M_1(f,f',\cdots,f^{(k)}) + \frac{a}{M_2(f,f',\cdots,f^{(k)})} = b\},$$

如果 $\forall z \in E_f$,存在 1 个正数 M,使得对 F 内任意函数 f 有 $|f(z)| \geqslant M$,则 F 正规.

利用分担值的思想,对 Lahiri 型分担值的正规性进行了研究,并得到了 2 个定理.

定理 1 设 F 为区域 D 内一族亚纯函数,n 为正整数,对 F 中任意函数 f,f 零点重数至少为 k. 设 a,b 为 2 个有限复数且 $a \neq 0$,$m,n,k(\geqslant 1)$,$m_j,n_j(j=1,2,\cdots,k)$ 为非负整数,且满足

$$\gamma_{M_2}\Gamma_{M_1} - \gamma_{M_1}\Gamma_{M_2} > 0, m_k + n_k > 0, m + n \geqslant 2.$$

令

$$F_f = M_1(f,f',\cdots,f^{(k)}) + \frac{a}{M_2(f,f',\cdots,f^{(k)})},$$

$$F_g = M_1(g,g',\cdots,g^{(k)}) + \frac{a}{M_2(g,g',\cdots,g^{(k)})},$$

如果 F 中任意 2 个函数 f,g,F_f 和 F_g IM 分担 b,则 F 在 D 内正规.

推论 1 设 F 为区域 D 内一族亚纯函数,n 为正整数,对于 F 中任意函数 f,f 零点重数至少为 k. 设 b 为有限复数 $n,k(\geqslant 1)$,$n_j(j=1,2,\cdots,k)$ 为非负整数且 $n \geqslant 2$. 如果对于 F 中任意 2 个函数 f,g,$f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k}$ 和 $g^n(g')^{n_1}\cdots(g^{(k)})^{n_k}$ IM 分担 b,则 F 在 D 内正规.

定理 2 设 F 为区域 D 内一族亚纯函数,n 为正整数,对于 F 中任意函数 f,f 零点重数至少为 k. 设 a,b 为 2 个有限复数且满足 $a \neq 0$,$m,n,k(\geqslant 1)$,m_j,$n_j(j=1,2,\cdots,k)$ 为非负整数,且对于任意正整数 $m_j,n_j(j=1,2,\cdots,k)$ 满足 $mnm_kn_k\gamma^*_{M_1}\gamma^*_{M_2} > 0$,$n \geqslant 2$,$m/n = m_j/n_j$. 令

$$F_f = M_1(f,f',\cdots,f^{(k)}) + \frac{a}{M_2(f,f',\cdots,f^{(k)})},$$

$$F_g = M_1(g,g',\cdots,g^{(k)}) + \frac{a}{M_2(g,g',\cdots,g^{(k)})},$$

如果对 F 中任意 2 个函数 f,g,F_f 和 F_g IM 分担 b,则 F 在 D 内正规.

1　主要引理

引理 1[12] 设 F 为单位圆 Δ 上的一族亚纯函数. F 中任意函数零点重数至少为 k,如果 F 在区域 Δ 内不正规,则 $\forall \alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant k$,存在

(i) 实数 $r, 0 < r < 1$;

(ii) 点列 z_n, $|z_n| < r$;

(iii) 函数列 $f_n \in F$;

(iv) 正数列 $\rho_n \to 0^+$,

使得函数 $g_n(\xi) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \xi)$ 在 **C** 上按球面距离内闭一致收敛于 1 个亚纯函数 $g(\xi)$,$g(\xi)$ 零点重数至少为 k,并且 $g^{\#}(\xi) \leqslant g^{\#}(0)$. 此处,$g^{\#}(\xi) = |g'(\xi)|/(1+|g(\xi)|^2)$ 为球面导数. 特别地,$g(\xi)$ 的级至多为 2.

引理 2[13] 设 $n,n_1,\cdots,n_k,k$ 为非负整数,其中 $n \geqslant 2$,$d = n + n_1 + \cdots + n_k$. 设 f 为超越亚纯函数且满足 $\delta(0,f) > 3/(3d+1)$,则对任意非零常数 c,$f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} - c$ 有无穷多个零点. 若 f 为超越正函数,则 $\delta(0,f) > 3/(3d+1)$ 可以省去.

引理 3 设 $n,n_1,\cdots,n_k,k$ 为正整数,其中 $n \geqslant 2$,$k \geqslant 1$,$d = n + n_1 + \cdots + n_k$. 设 f 为非常数有理函数,且 $f \neq 0$,则对任意非零常数 c,$f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} - c$ 至少有 2 个不同零点.

证 令 $\psi = f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k}$,由文献[14]中的定理 1 知

$$dT(r,f) \leqslant \overline{N}(r,f) + N(r,1/f) + \overline{N}(r,1/(\psi - c)) - N_0(r,1/\psi') + S(r,f),$$

其中 $f \neq 0$,因 $n,n_1,\cdots,n_k,k$ 为正整数且 $n \geqslant 2$,所以

$d = n + n_1 + \cdots + n_k \geqslant 3$. 注意到

$3T(r,f) \leqslant dT(r,f) \leqslant \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,1/(\psi - c)) + S(r,f) \leqslant T(r,f) + \overline{N}(r,1/(\psi - c)) + S(r,f)$.

故 $\psi - c$ 至少有 2 个不同的零点. 否则, f 为 1 个常数, 这与题设矛盾. 引理 3 得证.

引理 4 设 $n, n_1, \cdots, n_k, k$ 为整数, 其中 $n \geqslant 2$, $k \geqslant 1$, $d = n + n_1 + \cdots + n_k$. 设 f 为非常数有理函数, 其零点重数至少为 k, 则对任一非零常数 c, $f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} - c$ 至少存在 2 个不同零点.

证 利用反证法, 假设 $f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} - c$ 至多存在 1 个零点.

当 f 为多项式时, 显然 $f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} - c$ 为多项式, 而且由假设可知 $f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} - c = A(z - z_0)^l$, 其中 A 为非零常数. 这意味着

$$f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} = A(z - z_0)^l + c.$$

注意到上述方程右边只存在单零点, 而方程左边的零点必然是多重的, 从而推出矛盾. 所以 $f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} - c$ 至少有 2 个不同零点.

当 f 为非多项式有理函数时, 由引理 3 可知, f 至少存在 1 个零点. 下面分 2 种情形考虑.

情形 1 如果 $f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} - c$ 只有 1 个重数为 l 的零点 z_0. 令

$$f(z) = \frac{A(z - a_1)^{m_1}(z - a_2)^{m_2}\cdots(z - a_s)^{m_s}}{(z - b_1)^{l_1}(z - b_2)^{l_2}\cdots(z - b_t)^{l_t}}, \tag{1}$$

其中 A 为非零常数, $m_i \geqslant k(i = 1,2,\cdots,s)$, $l_j \geqslant 1(j = 1,2,\cdots,t)$.

为简单起见, 令

$$m_1 + \cdots + m_s = M \geqslant ks, l_1 + l_2 + \cdots + l_t = N.$$

由(1)式可以得到

$$f^{(j)}(z) = \frac{A(z - a_1)^{m_1 - j}(z - a_2)^{m_2 - j}\cdots(z - a_s)^{m_s - j}g_j(z)}{(z - b_1)^{l_1 + j}(z - b_2)^{l_2 + j}\cdots(z - b_t)^{l_t + j}} \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{2}$$

其中 $g_j(z)$ 为多项式, 且 $\deg(g_j(z)) \leqslant (s + t - 1)j$.

从(1) ~ (2)式中得到

$$f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} = \frac{A^d(z - a_1)^{dm_1 - \sum_{j=1}^k jn_j}(z - a_2)^{dm_2 - \sum_{j=1}^k jn_j}\cdots(z - a_t)^{dm_t - \sum_{j=1}^k jn_j}g(z)}{(z - b_1)^{dl_1 + \sum_{j=1}^k jn_j}(z - b_2)^{dl_2 + \sum_{j=1}^k jn_j}\cdots(z - b_t)^{dl_t + \sum_{j=1}^k jn_j}} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{3}$$

其中 $P(z), Q(z), g(z) = \prod_{j=1}^k g_j^{n_j}(z)$ 为多项式, 且 $\deg(g(z)) \leqslant \sum_{j=1}^k jn_j(s + t - 1)$.

对(3)式求 1 阶导可得

$$(f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k})' = \frac{A^d(z - a_1)^{dm_1 - \sum_{j=1}^k jn_j - 1}(z - a_2)^{dm_2 - \sum_{j=1}^k jn_j - 1}\cdots(z - a_t)^{dm_t - \sum_{j=1}^k jn_j - 1}H(z)}{(z - b_1)^{dl_1 + \sum_{j=1}^k jn_j + 1}(z - b_2)^{dl_2 + \sum_{j=1}^k jn_j + 1}\cdots(z - b_t)^{dl_t + \sum_{j=1}^k jn_j + 1}}, \tag{4}$$

其中 $H(z)$ 为多项式, 且 $s + t - 1 \leqslant \deg(H(z)) \leqslant (\sum_{j=1}^k jn_j + 1)(s + t - 1)$.

由假设 $f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} - c$ 只有 1 个零点 z_0, 有

$$f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k} = c + \frac{B(z - z_0)^l}{(z - b_1)^{dl_1 + \sum_{j=1}^k jn_j}(z - b_2)^{dl_2 + \sum_{j=1}^k jn_j}\cdots(z - b_t)^{dl_t + \sum_{j=1}^k jn_j}} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{5}$$

其中 B 为非零常数, $z_0 \neq a_i(i = 1,2,\cdots,s)$. 由(5)式, 有

$$(f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k})' = \frac{(z - z_0)^{l-1}G(z)}{(z - b_1)^{dl_1 + \sum_{j=1}^k jn_j + 1}(z - b_2)^{dl_2 + \sum_{j=1}^k jn_j + 1}\cdots(z - b_t)^{dl_t + \sum_{j=1}^k jn_j + 1}}, \tag{6}$$

其中 $G(z) = B(l - dN - t\sum_{j=1}^k jn_j)z^t + B_{t-1}z^{t-1} + \cdots + B_0$ 为多项式, $B_0, B_1, \cdots, B_{t-1}$ 为常数.

下面分 2 种子情形.

情形 1.1 $l \neq dN + t\sum_{j=1}^k jn_j$. 由(5)式得到 $\deg(P(z)) \geqslant \deg(Q(z))$, 因此(3)式意味着

$$dM - s\sum_{j=1}^k jn_j + \deg(g) \geqslant dN + t\sum_{j=1}^k jn_j.$$

所以 $dM + t\sum_{j=1}^k jn_j + s\sum_{j=1}^k jn_j - \sum_{j=1}^k jn_j \geqslant dN + t\sum_{j=1}^k jn_j + s\sum_{j=1}^k jn_j$, 故 $M > N$. 由(4)式和(6)式得 $z_0 \neq a_i(i = 1,2,\cdots,s)$, 有

$$dM - s(\sum_{j=1}^k jn_j + 1) \leqslant \deg(G) \leqslant t,$$

$$dM \leqslant s(\sum_{j=1}^k jn_j + 1) + t \leqslant (d - n + 1)M + N,$$

则可得 $N \geqslant (n - 1)M \geqslant M$. 这与 $M > N$ 矛盾.

情形 1.2 $l = dN + t\sum_{j=1}^k jn_j$. 下面再分 2 种情况: $M > N$ 和 $M \leqslant N$.

当 $M > N$ 时, 与情形 1.1 相似, 也将得到一个矛

盾.

当 $M \leqslant N$ 时,由(4)式和(6)式得

$$l-1 \leqslant \deg(H(z)) \leqslant \sum_{j=1}^{k}(jn_j+1)(s+t-1).$$

因此

$$dN+t\sum_{j=1}^{k}jn_j-1=l-1\leqslant\deg(H(z))\leqslant(\sum_{j=1}^{k}jn_j+1)(s+t-1)\leqslant(d-n+1)M+t\sum_{j=1}^{k}jn_j+t-\sum_{j=1}^{k}jn_j-1.$$

这意味着 $dN<(d-n+1)M+N\leqslant(d-1)M+N$,结合 $n\geqslant 2$,这是一个矛盾.

情形2 如果$f^n(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k}-c\neq 0$,则有 $l=0$. 同情形1的证明,仍然会得到一个矛盾. 引理4得证.

引理5 设 a,b 为2个有限复数,且 $a\neq 0$. 设 $m,n,k(\geqslant 1),m_j,n_j(j=1,2,\cdots,k)$ 为非负整数,且满足 $mnm_kn_k\gamma_{M_1}^{*}\gamma_{M_2}^{*}>0,n\geqslant 2,m/n=m_j/n_j$. 设$f$为一个亚纯函数,且 f 的零点重数至少为 k. 定义

$$\Phi(z)=M_1(f,f',\cdots,f^{(k)})+\frac{a}{M_2(f,f',\cdots,f^{(k)})}-b,$$

则 $\Phi(z)$ 至少有2个不同的零点.

证 由于代数方程

$$x+a/x^{m/n}=b$$

至少有1个非零解 $x_0\in\mathbf{C}$. 由引理2~引理4可知,至少存在2个复数 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ 且满足 $M_1(f(z_i),f'(z_i),\cdots,f^{(k)}(z_i))=x_0(i=1,2)$.

由已知条件,对所有的正整数 m,n,m_j,n_j 有

$$m=n\frac{m}{n},\quad m_j=n_j\frac{m_j}{n_j}.$$

因此

$$\Phi(z_i)=M_1(f(z_i),f'(z_i),\cdots,f^{(k)}(z_i))+\frac{a}{M_1^{m/n}(f(z_i),f'(z_i),\cdots,f^{(k)}(z_i))}-b=0(i=1,2).$$

引理5证毕.

2 定理的证明

定理1的证明 不失一般性,假定 $D=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\}$. 假设 F 在 D 内不正规. 那么至少存在1点 z_0,使得 F 在该点不正规. 不失一般性,假定 $z_0=0$,由引理1可知,存在点列 $z_j\to 0$,正数列 $\rho_j\to 0^+$ 和函数列 $f_j\in F$,使得

$$g_j(\xi)=\rho_j^{-\alpha}f_j(z_j+\rho_j\xi)\to g(\xi)\tag{7}$$

按球面距离内闭一致收敛,其中 $g(\xi)$ 为非常数亚纯函数,且零点重数至少为 k. 另外,g 的级至多为2.

由(7)式,令 $\alpha=(\Gamma_{M_1}+\Gamma_{M_2})/(\gamma_{M_1}+\gamma_{M_2})<k$,由 $\gamma_{M_2}\Gamma_{M_1}-\gamma_{M_1}\Gamma_{M_2}>0$ 有

$$g_j^n(\xi)(g'_j(\xi))^{n_1}\cdots(g_j^{(k)}(\xi))^{n_k}+\frac{a}{g_j^m(\xi)(g'_j(\xi))^{m_1}\cdots(g_j^{(k)}(\xi))^{m_k}}-\rho_j^{\alpha\gamma_{M_2}-\Gamma_{M_2}}b=$$
$$\rho_j^{-\alpha\gamma_{M_1}+\Gamma_{M_1}}f_j^n(f'_j)^{n_1}\cdots(f_j^{(k)})^{n_k}+\frac{a}{\rho_j^{-\alpha\gamma_{M_2}+\Gamma_{M_2}}f_j^m(f'_j)^{m_1}\cdots(f_j^{(k)})^{m_k}}-\rho_j^{\alpha\gamma_{M_2}-\Gamma_{M_2}}b=$$
$$\rho_j^{\alpha\gamma_{M_2}-\Gamma_{M_2}}\left[\rho_j^{-\alpha(\gamma_{M_1}+\gamma_{M_2})+\Gamma_{M_1}+\Gamma_{M_2}}f_j^n(f'_j)^{n_1}\cdots(f_j^{(k)})^{n_k}+\frac{a}{f_j^m(f'_j)^{m_1}\cdots(f_j^{(k)})^{m_k}}-b\right]=$$
$$\rho_j^{(\gamma_{M_2}\Gamma_{M_1}-\gamma_{M_1}\Gamma_{M_2})/(\gamma_{M_1}+\gamma_{M_2})}\left[f_j^n(f'_j)^{n_1}\cdots(f_j^{(k)})^{n_k}+\frac{a}{f_j^m(f'_j)^{m_1}\cdots(f_j^{(k)})^{m_k}}-b\right]\to$$
$$g^n(g')^{n_1}\cdots(g^{(k)})^{n_k}+\frac{a}{g^m(g')^{m_1}\cdots(g^{(k)})^{m_k}}\tag{8}$$

在不含 g 的极点的单位圆内任意紧子集按球面距离内闭一致成立.

如果

$$g^n(g')^{n_1}\cdots(g^{(k)})^{n_k}+\frac{a}{g^m(g')^{m_1}\cdots(g^{(k)})^{m_k}}\equiv 0,$$

那么

$$g^{n+m}(g')^{n_1+m_1}\cdots(g^{(k)})^{n_k+m_k}\equiv -a,$$

则 g 不含零点和极点,故存在常数 c_i 使得

$$(c_1,c_2)\neq(0,0),g(\xi)=\mathrm{e}^{c+c_1\xi+c_2\xi^2}.$$

因为 g 为非常数亚纯函数,且级至多为2. 显然,这与 $g^{n+m}(g')^{n_1+m_1}\cdots(g^{(k)})^{n_k+m_k}\equiv -a$ 矛盾.

由引理2和引理4得,函数

$$g^n(g')^{n_1}\cdots(g^{(k)})^{n_k}+\frac{a}{g^m(g')^{m_1}\cdots(g^{(k)})^{m_k}}$$

有2个不同的零点 ξ_0 和 ξ_0^*,取1个足够小的正数 δ 使得 $D_1\cap D_2=\varnothing$,且 $g^n(g')^{n_1}\cdots(g^{(k)})^{n_k}+\frac{a}{g^m(g')^{m_1}\cdots(g^{(k)})^{m_k}}$ 在 $D_1\cup D_2$ 中除了 ξ_0 和 ξ_0^*,不含其它的零点,其中

$$D_1=\{\xi\in\mathbf{C}\mid |\xi-\xi_0|<\delta\},$$
$$D_2=\{\xi\in\mathbf{C}\mid |\xi-\xi_0^*|<\delta\}.$$

由(8)式和Hurwitz's定理得,对于足够大的 j 来说,$\exists\xi_j\in D_1$ 和 $\xi_j^*\in D_2$,有

$$F_{f_j}(z_j+\rho_j\xi_j)-b=0,F_{f_j}(z_j+\rho_j\xi_j^*)-b=0.$$

因为,由定理1中的假设,对每一个 l,$F_{f_l}(z_j+\rho_j\xi_j)$ 和 $F_{f_j}(z_j+\rho_j\xi_j)$ IM 分担 b,所以

$$F_{f_l}(z_j+\rho_j\xi_j)-b=0,F_{f_l}(z_j+\rho_j\xi_j^*)-b=0.$$

令 $j\to\infty$,注意到 $z_j+\rho_j\xi_j\to 0$,$z_j+\rho_j\xi_j^*\to 0$,得 $F_{f_l}(0)-b=0$.

因为 $F_{f_j}(z)-b=0$ 的零点没有聚点,所以对充分大的 j,有 $z_j+\rho_j\xi_j=0$,$z_j+\rho_j\xi_j^*=0$. 这表明

$\xi_j=-z_j/\rho_j$, $\xi_j^*=-z_j/\rho_j$.

这与 $\xi_j\in D_1$,$\xi_j^*\in D_2$ 和 $D_1\cap D_2=\varnothing$ 矛盾. 故假设不成立,定理 1 证毕.

定理 2 的证明　不失一般性,假定 $D=\{z\in \mathbf{C}\mid |z|<1\}$. 假设 F 在 D 内不正规,那么至少存在 1 个点 z_0 使得 F 在该点不正规. 不失一般性,假定 $z_0=0$. 由引理 1 可知,存在点列 $z_j\to 0$,正数列 $\rho_j\to 0$ 和函数列 $f_j\in F$,使得 $g_j(\xi)=\rho_j^{-\alpha}f_j(z_j+\rho_j\xi)\to g(\xi)$ 按球面距离内闭一致收敛,其中 $g(\xi)$ 为非常数亚纯函数,且零点重数至多为 k,并且 g 的级至多为 2.

由引理 5,仿照定理 1 的证明过程,可以得出一个矛盾.

定理 2 证毕.

3　参考文献

[1] Yang Chungchun,Yi Hongxun. Uniqueness theory of meromorphic functions [M]. Beijing: Science Press,2003.

[2] 顾永兴,庞学诚,方明亮. 正规族理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社,2007.

[3] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[4] Yang Le. Value distribution theory [M]. Berlin: Springer-Verlag,1993.

[5] 左秀会,刘孝书. 关于亚纯函数的唯一性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2006,30(5): 478-480.

[6] Hayman W K. Research problems in function theory [M]. London: Athlone Press ,1967.

[7] Zhang Qingcai. Normal families of meromorphic functions concerning shared values [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2008,338(1): 545-551.

[8] Lahiri I. A simple normality criterion leading to a counterexample to the converse of the Bloch principle [J]. New Zealand Journal of Mathematics,2005,34(1): 61-65.

[9] Charak K S,Rieppo J. Two normality criteria and the converse of the Bloch principle [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2009,353(1): 43-48.

[10] Xu Junfeng,Cao Wensheng. Some normality criteria of meromorphic functions [J]. Journal of Inequalities and Applications,2010(1): 926302.

[11] Zhang Xiaobin,Xu Junfeng,Yi Hongxun. Normality criteria of Lahiri's type and their applications [J]. Journal of Inequalities and Applications,2011(1): 873184.

[12] Pang Xuecheng,Zalcman L. Normal families and shared values [J]. Bulletin of the London Mathematical Society,2000,32(3): 325-331.

[13] Yang Chungchun,Hu Peichu. On the value distribution of $ff^{(k)}$ [J]. Kodai Mathematical Journal,1996,19(2): 157-167.

[14] 扈培础. Hayman 不等式的推广 [J]. 数学杂志,1990,10(4): 405-412.

Normality Criteria of Lahiri's Type Concerning Shared Values

CHEN Xue[1],TIAN Hong-gen[1*],YUAN Wen-jun[2],CHEN Wei[1]

(1. School of Mathematical Sciences,Xinjiang Normal University,Wulumuqi Xinjiang 830054,China;
2. School of Mathematics and Information Sciences,Guangzhou University,Guangzhou Guangdong 510006,China)

Abstract: By using the value of distribution of meromorphic functions,the normal families related normality criteria of Lahiri's type concerning shared values has been studied,and two normal criteria have been obtained,which generalize some previous results.

Key words: meromorphic function; normal family; shared value

(责任编辑: 王金莲)