第 38 卷 第 1 期
2014 年 1 月
江西师范大学学报(自然科学版)
Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)
Vol. 38 No. 1
Jan. 2014

文章编号:1000-5862(2014)01-0042-05

K-分式线性变换

张建元[1],张 昕[2]
(1. 昭通学院数学与统计学院,云南 昭通 657000;2. 昭通市第二人民医院财务处,云南 昭通 657000)

摘要: 在 K-导数、K-解析(函数)变换、K-共形映射的基础上,研究了 K-分式线性变换及其 K 保圆性、K 保对称性、K 保交比性等,所得结论是(共轭)解析函数的(共轭)分式线性变换在 K-解析函数中的继续和应用.

关键词: K-导数;K-解析函数(变换);K-共形映射;K-分式线性变换;K 保圆;K 保对称;K 保交比
中图分类号: O 174.55 **文献标志码:** A

文献[1-5]给出了 K-解析函数的概念,并研究了它的一些分析性质及其在几何变换方面的一般规律. 相反地,对一种特殊的几何变换——K-分式线性变换,它又有一些什么特殊的变换规律及其性质? 弄清楚这些问题,对 K-解析函数(变换)的几何理论及其应用都是很有必要的.

1 基本概念

定义 1 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内有定义,$z(k) \equiv x + iky$ $(0 \neq k \in \mathbf{R})$ 为 $z = x + iy$ 的 K-复数,若 $f(z)$ 在区域 D 内 K-可导,即极限 $f'_{(k)}(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z(k)}$ $(\forall z \in D)$ 存在,称 $f(z)$ 在 D 内 K-解析. 把在区域 D 内所有的 K-解析函数构成的集合记为 $F(D(k))$.

定义 2 若 $w = f(z)$ 在区域 D 内单叶且 K-保角,则称变换 $w = f(z)$ 在 D 内是 K-共形映射.

定义 3 称形如

$$w = f(z) = (az(k) + b)/(cz(k) + d), \tag{1}$$

其中 $a,b,c,d \in \mathbf{C}$ 且

$$\Delta \equiv ad - bc \neq 0$$

的变换为关于 z 的 K-分式线性变换.

因 $\Delta \neq 0$,故 $f'_{(k)}(z) = (ad - bc)/(cz(k) + d)^2 \neq 0$,$f(z)$ 为非常数变换.

(i) 当 $c = 0$ 时,称 $f(z) = (az(k)/d) + b/d \equiv a'z(k) + b'(a' \equiv a/d \neq 0)$ 为 K-整线性变换. 特别地,当 $c = b = 0$,$a = d \neq 0$ 时,称 $f(z) = z(k)$ 为关于实轴的 K-对称变换. 它们在 $\mathbf{C}$ 上单叶且同时把 ∞ 变为 ∞;

(ii) 当 $c \neq 0$,$w \neq a/c$ 时,$w = f(z)$ 有唯一解

$$z(k) = (dw - b)/(-cw + a),$$

即(1)式是 $\mathbf{C} \backslash \{-(d/c)(k^{-1})\}$ 上的单叶函数,又 $f(\infty) \to a/c$ $(z \to \infty)$,即 ∞ 对应 a/c,$-(d/c)(k^{-1})$ 对应 ∞. 故(1)式是 $\mathbf{C}_\infty$ 到 $\mathbf{C}_\infty$ 的一一变换.

2 K-分式线性变换的性质

2.1 K-分式线性变换的分解

K-分式线性变换(1)总可分解为如下基本类型的复合:

(Ⅰ) $w = (a\zeta + b)/(c\zeta + d)$;

(Ⅱ) $\zeta = z(k)$.

因(Ⅰ)为分式线性变换,而且其几何变换性质[3,6]已知,故只需弄清楚 K-对称变换(Ⅱ)的性质,变换(1)的性质就清楚了.

2.2 K-共形性

设

$$w = f(z) = z(k) \ (z \in \mathbf{C}), \tag{2}$$

当 $z \in \mathbf{C}$ 时,$f'_{(k)}(z) \equiv 1$. 故 $w = f(z) = z(k)$ 在定义域内单叶 K-保角.

定义 4 两曲线在无穷远点(或原点)的 K-夹角,是指它们在倒 K-对称变换下的像曲线在原点(或无穷远点)的夹角.

收稿日期:2013-10-15
基金项目:国家自然科学基金(11061028),云南省教育厅科学研究基金(2010Y222,2012Y435,2013Y578)资助项目.
作者简介:张建元(1956-),男,云南昭通人,教授,主要从事复分析和边值问题的研究.

作倒 K-对称变换 $\lambda = 1/z(k)$ 与 $\mu = 1/w$. 由(2)式得 $\mu = \lambda$，它将 $\lambda = 0$ 变为 $\mu = 0$，此时变换(2)把 $z = \infty$ 变为 $w = \infty$. 由于 $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\lambda \equiv 1 \neq 0$，变换 $\mu = \lambda$ 在 $\lambda = 0$ 处是保角，即 $w = z(k)$ 在 $z = \infty$ 是 K-保角. 从而 $w = z(k)$ 在 $\mathbf{C}_\infty$ 上是 K-共形映射，又变换(Ⅰ)是共形的，从而可得如下结论.

定理 1　K-分式线性变换在 $\mathbf{C}_\infty$ 上是 K-共形的映射.

2.3　K 保圆(周)性

因 K-对称变换把 K 椭圆周变为圆周，再由变换(Ⅰ)的保圆周性，进而得如下结论.

定理 2(K 保圆(周)性)　K-分式线性变换将扩充 z 平面上的 K 椭圆周变换为扩充 w 平面上的圆周，同时 K 椭圆被 K-共形成圆.

2.4　K 保对称性

设方程

$$|(\zeta - p)/(\zeta - q)| = \lambda(0 < \lambda \neq 1, p \neq q) \tag{3}$$

表示的圆周为 $C(\zeta_0, r)$，其中 $\zeta_0 = (p - \lambda^2 q)/(1 - \lambda^2)$，$r = \lambda|p - q|/|1 - \lambda^2|$. 易证[8-9]，$p, q$ 关于圆周对称.

若把直线看成是过无穷远点的圆周，在(3)式中令 $\zeta \to \infty$，有 $\lambda = 1$. 从而圆周和直线可合并为

$$|(\zeta - p)/(\zeta - q)| = \lambda(\lambda > 0, p \neq q). \tag{4}$$

作变换 $\zeta = z(k)$，由定理 2 可知圆周(4)的原像曲线为 K 椭圆周或直线：

$|(z(k) - p)/(z(k) - q)| = |(z - p(k^{-1}))(k)/(z - q(k^{-1}))(k)| = \lambda(\lambda > 0, p \neq q)$.

定义 5　设 $z = \zeta(k^{-1})$ 为 K-对称变换之逆，把关于圆周或直线的对称点偶 p, q 的像点偶 $p(k^{-1})$，$q(k^{-1})$ 称为其对应的像曲线 K 椭圆周或直线的对称点；反之亦然，即 $\zeta = z(k)$ 变换后，K 椭圆周或直线的对称点偶 $p(k^{-1})$，$q(k^{-1})$ 的 K-复数 p, q 是关于圆周或直线对称. 此性质简称为 K-对称变换的 K 保对称性.

定理 3(K 保对称性)　设扩充 z 平面上两点 z_1，z_2 关于 K 椭圆周对称，$w = f(z)$ 为 K-分式线性变换，则 $w_1 = f(z_1)$ 与 $w_2 = f(z_2)$ 两点关于圆周对称.

2.5　K-保交比性

定义 6　设扩充复平面上有 4 个相异点 z_1, z_2, z_3, z_4. 称量

$$(z_1(k), z_2(k), z_3(k), z_4(k)) \equiv \frac{z_4(k) - z_1(k)}{z_4(k) - z_2(k)} : \frac{z_3(k) - z_1(k)}{z_3(k) - z_2(k)}$$

为这 4 个点依序的 K-交比.

注 1　若当 4 个点中有 1 个为 ∞ 时，包含此点的项用 1 代替. 如 $z_1 = \infty$ 时，$(\infty, z_2(k), z_3(k), z_4(k)) = (z_3 - z_2)(k)/(z_4 - z_2)(k)$.

定理 4(K 保交比性)　设 $w = f(z)$ 为 K-分式线性变换，且 $w = f(z): z_j \leftrightarrow w_j (j = 1, 2, 3, 4)$，则 w 与 z 是 K 保交比，即 $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1(k), z_2(k), z_3(k), z_4(k))$.

证　设变换 $w = (az(k) + b)/(cz(k) + d)$ 使 $z_j \leftrightarrow w_j = (az_j(k) + b)/(cz_j(k) + d)$，则

$$w_i - w_j = \frac{(ad - bc)(z_i(k) - z_j(k))}{(cz_i(k) + d)(cz_j(k) + d)}$$

$(i, j = 1, 2, 3, 4)$，因此 $(w_1, w_2, w_3, w_4) = \dfrac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} : \dfrac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \dfrac{z_4(k) - z_1(k)}{z_4(k) - z_2(k)} : \dfrac{z_3(k) - z_1(k)}{z_3(k) - z_2(k)} = (z_1(k), z_2(k), z_3(k), z_4(k))$.

更一般地，用 z, w 分别代替 z_4, w_4 有 $(w_1, w_2, w_3, w) = (z_1(k), z_2(k), z_3(k), z(k))$，化简就可确定 1 个(含参数 k 的)K-分式线性变换 $w = f(z)$，即有如下结论.

定理 5　设 K-分式线性变换将扩充 z 平面上 3 个互异点 z_1, z_2, z_3 变为 w_1, w_2, w_3，则此 K-分式线性变换唯一确定，且有如下 K-交比表达式：

$(w_1, w_2, w_3, w) = (z_1(k), z_2(k), z_3(k), z(k))$.

3　3 个特殊的 K-分式线性变换

除了常用到的平移、旋转、相似、K-对称变换、倒(K-对称)变换等基本 K-分式线性变换外，如下介绍的 3 种 K-分式线性变换，它们在应用上也很普遍[4,5,7,10].

3.1　把 K-半平面变为上半平面

定义 7　称 $\mathbf{C}$ 上的点集$\{z: \mathrm{Im}z(k) > 0$(或 $< 0)\}$为第 1 类(或第 2 类)K-半平面，简记为 $\mathrm{Im}z(k) > 0$(或 < 0). 当类别清楚时，也简称 K-半平面.

性质 1　(i) $\mathrm{Im}z(k) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{sgn}(k) = \mathrm{sgn}(y)$，且表达式

$$z(k) = x + \mathrm{sgn}(k)k|y|\mathrm{i}$$

或

$$z = x + \mathrm{sgn}(k)|y|\mathrm{i}(\text{其中 } y \neq 0)$$ 成立；

(ii) 设 K-半平面$\{z: \mathrm{Im}z(k) > 0\}$的边界 K 直线为 $l(k) = \{z: \mathrm{Im}z(k) = 0\}$，则其(相对于区域的)正方向的方程是

$$l^+(k): z(t) = \mathrm{sgn}(k)t(-\infty < t < +\infty).$$

证　设 $z(k) = x + ky\mathrm{i}$，由 $\mathrm{Im}z(k) = ky > 0 \Leftrightarrow$

$\mathrm{sgn}(k)=\mathrm{sgn}(y)$.(i)的结论显然成立.

(ii)由(i)得,当 $k>0$ 时,$\mathrm{Im}z=y>0$,$\mathrm{Im}z(k)>0$ 的边界 K 直线 $l(k)$:$\mathrm{Im}z(k)=0$ 相对于上半平面应取实轴的正方向,即 $z(t)=\mathrm{sgn}(k)t$ $(-\infty<t<+\infty)$;同理,当 $k<0$ 时,$\mathrm{Im}z=y<0$ 的边界 K 直线 $l(k)$ 应取实轴的负方向,即 $z(t)=\mathrm{sgn}(k)t$ $(-\infty<t<+\infty)$.从而 $\mathrm{Im}z(k)>0$ 的边界 K 直线正方向的方程是

$$l^{+}(k):z(t)=\mathrm{sgn}(k)t\ (-\infty<t<+\infty).$$

求将 K-半平面 $\mathrm{Im}z(k)>0$ 作 K-共形映射成上半 w 平面的变换.由 K-分式线性变换的 K-共形性,可设所求变换为 $w=f(z)=(az(k)+b)/(cz(k)+d)$,其中 $\mathrm{Im}z(k)>0$,$a,b,c,d\in\mathbf{C}$ 且 $\Delta\equiv ad-bc\neq0$,它将实轴变为实轴.在实轴上取 3 个互异点 x_j,$y_j\in\mathbf{R}$,使 $w=f(z)$:$x_j\leftrightarrow y_j(j=1,2,3)$.又 $w=f(z)$ 的 K 保交比性得 $(y_1,y_2,y_3,w)=(x_1,x_2,x_3,z(k))$,即 $\frac{w-y_1}{w-y_2}:\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=\frac{z(k)-x_1}{z(k)-x_2}:\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}$.因此 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$.因

$$\mathrm{Im}w=\frac{w-w(-1)}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{az(k)+b}{cz(k)+d}-\frac{az(-k)+b}{cz(-k)+d}\right)=\frac{\Delta(z(k)-z(-k))}{2\mathrm{i}\,|cz(k)+d|^{2}}=\frac{\Delta\mathrm{Im}z(k)}{|cz(k)+d|^{2}}=\frac{\Delta\mathrm{sgn}(k)\,\mathrm{sgn}(y)}{|cz(k)+d|^{2}}|ky|,$$

即 $\mathrm{Im}w$ 的符号同时依赖于参数 k 与 y 的符号.由条件 $\mathrm{Im}z(k)>0\leftrightarrow\mathrm{Im}w>0$,可得 $\Delta>0$.反之,满足 $\Delta>0$ 的实系数 K-分式线性变换将实轴变为实轴,且当 $k>0$(或 <0)时,$\mathrm{Im}z>0$(或 <0)$\leftrightarrow\mathrm{Im}w>0$.故所求变换为

$$w=f(z)=(az(k)+b)/(cz(k)+d),\tag{5}$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ 且 $\Delta=ad-bc>0$.

关于 K-(或上、下)半平面的边界实轴的变化情况,在 $\Delta>0$ 的条件下,虽然变换(5)能把 K-半平面变为上半平面,实轴变为实轴.因 $\mathrm{Im}z(k)>0$ 的边界正方向的 K 直线方程 $l^{+}(k)$:$z=\mathrm{sgn}(k)x(x\in\mathbf{R})$,

$$w(x)\equiv(\mathrm{sgn}(k)ax+b)/(\mathrm{sgn}(k)cx+d),$$

$$w'(x)=\mathrm{sgn}(k)(ad-bc)/(\mathrm{sgn}(k)cx+d)^{2}.$$

故当 $k>0$,$y>0$ 时,$w'(x)>0$,上半平面变为上半平面的边界实轴正向分别关于区域是保方向的;而当 $k<0$,$y<0$ 时,$w'(x)<0$,下半平面变为上半平面的边界实轴负向(或正向)与实轴负向(或正向)分别关于区域是反保方向的,即当 $k>0$ $(k<0)$ 时,边界分别关于相应的区域是 K-保(转)方向.

3.2 把 K-半平面 $\mathrm{Im}z(k)>0$ 变为单位圆

求从 K-半平面 $\mathrm{Im}z(k)>0$ 作 K-共形映射成单位圆的变换.由 K-分式线性变换的 K 保圆(周)性,可设所求变换为 K-分式线性变换 $w=f(z)$.由 K 保对称性,它把 $p=z_0(k^{-1})$(其中 $\mathrm{Im}z_0=\mathrm{Im}p(k)>0$)变为 $w=0$,对称点 $p(-1)=z_0(-k^{-1})$ 变为 $w=\infty$.于是 $w=\lambda(z(k)-z_0)/(z(k)-z_0(-1))$.取 $z=x\in\mathbf{R}$,$w=f(z)\in|w|=1$,有 $1=|w|=|\lambda|\cdot$ $\left|\frac{(x-z_0(k^{-1}))(k)}{(x-z_0(-k^{-1}))(k)}\right|=|\lambda|\left|\frac{(x-z_0(k^{-1}))(k)}{(x-z_0(k^{-1}))(-k)}\right|=|\lambda|$,即 $\lambda=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.于是

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z(k)-z_0)/(z(k)-z_0(-1)),$$

其中 $\mathrm{Im}z_0>0$,$\theta\in\mathbf{R}$

或

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-p)(k)/(z-p(-1))(k),\tag{6}$$

其中 $\mathrm{Im}p(k)>0$,$\theta\in\mathbf{R}$.

反之,变换(6)将 $z=x\in\mathbf{R}$ 变为 $|w|=1$ 且 $p=z_0(k^{-1})$ 变为 $w=0$.又当 $k>0$ 时,$\mathrm{Im}p>0$;当 $k<0$ 时,$\mathrm{Im}p<0$,即变换(6)把实轴变为单位圆周的同时且把上半平面($k>0$)或下半平面($k<0$)变为单位圆,故(6)式为所求变换.

关于边界的情况,设 $w=f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}f_1(z)$,其中 $f_1(z)\equiv(z(k)-z_0)/(z(k)-z_0(-1))$.取适当的连续幅角函数 $\varphi(z)\equiv\arg f(z)=\theta+\alpha(z)$,其中 $\alpha(z)\equiv\arg f_1(z)$.设在 K-解析变换 $f_1(z)$ 下,$l^{+}(k)$:$z=\mathrm{sgn}(k)x(x\in\mathbf{R})$ 的像曲线 L:$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x)}=f_1(x)\equiv(\mathrm{sgn}(k)x-z_0)/(\mathrm{sgn}(k)x-z_0(-1))$,$\alpha(x)=\mathrm{i}^{-1}\ln f_1(x)=\arg[(\mathrm{sgn}(k)x-z_0)/(\mathrm{sgn}(k)x-z_0(-1))]=2\alpha_1(x)$,即

$$\alpha_1(x)\equiv\arg(z_0-\mathrm{sgn}(k)x)=(2\mathrm{i})^{-1}\ln f_1(x).$$

上式两边关于 x 求导得

$$\alpha_1'(x)=\mathrm{sgn}(k)\,\mathrm{Im}z_0/|\mathrm{sgn}(k)x-z_0|^{2}.$$

因 $\mathrm{Im}z_0>0$,当 $k>0$ 时,$\alpha_1'(x)>0$.又由 $\alpha_1(x)=\arctan[\mathrm{Im}z_0/(\mathrm{Re}z_0-\mathrm{sgn}(k)x)]+C$($C\in\mathbf{R}$ 为某常数)易得 $\alpha_1(-\infty)=0$,$\alpha_1(+\infty)=\pi$.故 $\alpha(x)=2\alpha_1(x):0\to2\pi$,即

$$f_1(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)\alpha(x)},$$

其中 $0\leqslant\alpha(x)\equiv\arg[(z_0-x)/(z_0(-1)-x)]\leqslant2\pi$,$x\in\mathbf{R}$.

同理,当 $k<0$ 时,$f_1(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)\alpha(x)}$,从而 K-解析函数 $f_1(z)$ 把实轴变为单位圆周(K 椭圆周),$f_1(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)\alpha(x)}$.故

$$f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)\alpha(x)},$$

其中 $0\leqslant\alpha(x)\equiv\arg[(z_0-x)/(z_0(-1)-x)]\leqslant2\pi$,$x\in\mathbf{R}$.

从而当 x 沿实轴正(或负)方向变化时,$f(x)$ 沿

单位圆周的正（或负）方向变化. 但变换（6）把以实轴为边界的半平面区域变为单位圆且当 $k>0$ 时，作为实轴与单位圆周正向的边界分别关于区域上半平面与单位圆是保方向的；当 $k<0$ 时，作为实轴负向（或正向）与单位圆周负向（或正向）的边界分别关于区域下半平面与单位圆是反保方向的，即当 $k>0(k<0)$ 时，边界分别关于相应的区域是K−保（转）方向.

3.3　把K椭圆变为单位圆

求将椭圆 $|z(k)|<1$ 作K−共性映射成单位圆 $|w|<1$ 的变换. 由K−分式线性变换的K保圆性及K保对称性，若所求变换存在，它应为K−分式线性变换 $w=f(z)$，它把点 $z_0(k^{-1})$ $(0\neq z_0\in|z|<1)$ 变为 $w=0$，对称点偶 $[z_0(-1)]^{-1}(k^{-1})$ 变为 $w=\infty$.

于是

$$w=\lambda(z(k)-z_0)/\{z(k)-[z_0(-1)]^{-1}\}=\lambda_1(z(k)-z_0)/(1-z_0(-1)z(k)),$$

其中 $\lambda_1\equiv-\lambda z_0(-1)$. 又 $w=f(z)$ 把 $|z(k)|=1$ 变换为 $|w|=1$. 再注意到 $z(k)z(-k)=1$ 有

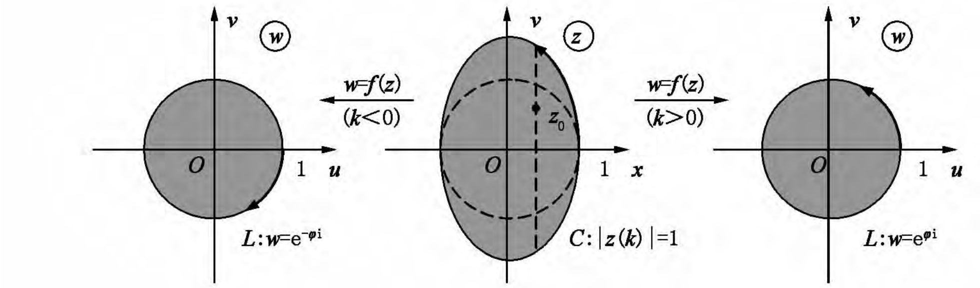

图 1　椭圆周与圆周的关系及K−保转向的示意图

$$1=|w|=\frac{|\lambda_1||z(k)-z_0|}{|(1-z_0(-1)z(k)|}=\frac{|\lambda_1||z(k)-z_0|}{|z(k)z(-k)-z_0(-1)z(k)|}=\frac{|\lambda_1||z(k)-z_0|}{|(z(k)||(z(k)-z_0)(-1)|}=|\lambda_1|,\lambda_1=e^{i\theta}.$$

故

$$w=e^{i\theta}(z(k)-z_0)/(1-z_0(-1)z(k)),\tag{7}$$

其中 $|z_0|<1$，$\theta\in\mathbf{R}$.

反之不难验证变换（7）满足所需条件，故变换（7）是所求变换. 关于边界正向的情况，因椭圆周正方向的曲线[4,5,10] $C^+(k)$：

$$z(k)=e^{\mathrm{sgn}(k)ti},z(t)\equiv e^{ti}(|k^{-1}|)(0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

在变换（7）下，其像曲线单位圆周的参数方程 L：$e^{\varphi(t)i}\equiv f(z(t))=e^{i\theta}f_1(z(t))$，其中

$$f_1(z(t))\equiv(e^{\mathrm{sgn}(k)ti}-z_0)/(1-z_0(-1)e^{\mathrm{sgn}(k)ti}),$$

$$\varphi(t)=\theta+\arg f_1(z(t))=\theta+i^{-1}\ln f_1(z(t))\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

单值连续，

$$0\leqslant|\varphi(2\pi)-\varphi(0)|=|\arg f_1(z(2\pi))-\arg f_1(z(0))|\leqslant 2\pi,$$

$$\varphi'(t)=\frac{\mathrm{sgn}(k)(1-|z_0|^2)}{|1-z_0(-1)e^{\mathrm{sgn}(k)ti}|^2}\ (|z_0|<1).$$

由此得当 $k>0$ 时，$\varphi'(t)>0$，C 与 L 是保转向的；当 $k<0$ 时，$\varphi'(t)<0$，C 与 L 是反保转向的，如图 1 所示. 即在变换（7）下，当 $k>0\ (k<0)$ 时，C 与 L 分别关于相应的区域是K−保（转）方向.

4　举例

求 1 个K−分式线性变换，将椭圆 $|z(k)|<1$ 作K−共性映射成圆 $|w-1|<1$，且分别把 $z_1(k)=-1$，$z_2(k)=-i$，$z_3(k)=i$ 变为 $w_1=0$，$w_2=2$，$w_3=1+i$，并讨论边界随参数 k 的对应变换情况.

解　由K−分式线性变换 $w=f(z)$ 的K保交比性得 $(0,2,1+i,w)=(-1,-i,i,z(k))$，即

$$w=\frac{2(1+i)(z(k)+1)}{z(k)+2+i}=2(1+i)-\frac{4i}{z(k)+2+i},w-1=1+2i-\frac{4i}{z(k)+2+i}=\frac{(1+2i)z(k)+i}{z(k)+2+i}.$$

关于区域与边界对应的变化情况讨论如下.

因 $|w(0)-1|=|i/(2+i)|=|(1+2i)/5|=5^{-1/2}<1$，故 $w=f(z)$ 把椭圆域 $|z(k)|<1$ 的内部K−共性映射成圆域 $|w-1|<1$ 的内部. 因正方向的椭圆周 $C^+(k)$：$z(k)=e^{\mathrm{sgn}(k)ti}$，$z(t)\equiv e^{ti}(|k^{-1}|)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，$w=f(z)$ 变换下像曲线的参数方程 L：$w(t)-1\equiv f(z(t))-1=[(1+2i)e^{\mathrm{sgn}(k)ti}+i]/[e^{\mathrm{sgn}(k)ti}+2+i]$. 经计算得 $|w(t)-1|^2=[(w-1)(1)]\cdot[(w-1)(-1)]=1$.

$\arg(w(t)-1)=i^{-1}\ln(w(t)-1)=i^{-1}\ln\{[(1+$

$2\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{sgn}(k)ti}+\mathrm{i}]/[\mathrm{e}^{\mathrm{sgn}(k)ti}+2+\mathrm{i}]\}$,$\arg\{w(t)-1)=8\mathrm{sgn}(k)\cdot(3+\mathrm{Im}((1+2\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{sgn}(k)ti}))/|(1+2\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{sgn}(k)ti}+2\mathrm{i}-1+6\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{sgn}(k)ti}|^2$,因 $3+\mathrm{Im}((1+2\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{sgn}(k)ti})\geqslant 3-|(1+2\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{sgn}(k)ti}|\geqslant 3-|(1+2\mathrm{i})|=3-5^{1/2}>0$.

故当 $k>0$ 时,$\arg\{w(t)-1)>0$,边界对应点 $z(t)$ 与 $w(t)$ 分别关于边界椭圆周 $|z(k)|=1$ 与圆周 $|w-1|=1$ 是保正(或负)方向的;当 $k<0$ 时,$\arg\{w(t)-1)<0$,$z(t)$ 与 $w(t)$ 分别关于 $|z(k)|=1$ 与 $|w-1|=1$ 是反保(转)方向的.如当 $k>0$ 时,$z_1=-1(k^{-1})$,$z_2=-\mathrm{i}(k^{-1})$,$z_3=\mathrm{i}(k^{-1})$ 与像点 $w_1=0$,$w_2=2$,$w_3=1+\mathrm{i}$ 分别关于 $|z(k)|=1$ 与 $|w-1|=1$ 是保正向的;当 $k<0$ 时,$z_1=-1(k^{-1})$,$z_2=-\mathrm{i}(k^{-1})$,$z_3=\mathrm{i}(k^{-1})$ 与像点 $w_1=0$,$w_2=2$,$w_3=1+\mathrm{i}$ 分别关于 $|z(k)|=1$ 与 $|w-1|=1$ 是负向对应正向而反保转向,即在 $w=f(z)$ 的变换下,边界椭圆周 $|z(k)|=1$ 与圆周 $|w-1|=1$ 分别关于相应的区域是 K-保(转)方向.

5 结束语

在 K-导数、K-解析(函数)变换、K-保角、K-共形映射的基础上,对 K-分式线性变换及其 K 保圆、K 保对称,K 保交比等性质进行了研究.当 $k=\pm 1$ 时,K-解析函数[1-2,4-5]为解析或共轭解析函数,K-分式线性变换为分式或共轭分式线性变换[3,6,9-11],即解析与共轭解析函数都是 K-解析函数的特殊情况.因此本文所得结论包含了解析函数(变换)与共轭解析函数(变换)中的相应结论.

6 参考文献

[1] 张建元.K-解析函数及其存在的条件[J].云南民族大学学报:自然科学版,2007,16(4):298-302.

[2] 张建元.K-共形映射[J].西南大学学报:自然科学版,2010,32(10):119-125.

[3] 马库雪维奇.解析函数论教程[M].3 版.阎昌龄,吴望一,译.北京:高等教育出版社,1992:33-400.

[4] 张建元.K-解析变换下曲线的转向[J].江西师范大学学报:自然科学版,2011,35(3):292-296.

[5] 张建元,刘秀,吴科.K-对称变换及其 K 保圆(周)性[J].西南民族大学学报:自然科学版,2011,37(2):167-171.

[6] 路见可,钟寿国,刘士强.复变函数论[M].2 版.武汉:武汉大学出版社,2007:12-176.

[7] 伐西列也夫 N B,古捷马赫 V L.直线与曲线[M].王崇寿,唐敬年,译.北京:北京出版社,1983:114-124.

[8] 朱德祥,朱维宗.初等几何研究[M].2 版.北京:高等教育出版社,2003:64-166.

[9] 张锦豪,邱维元.复变函数论[M].北京:高等教育出版社,2002:3-213.

[10] 张建元.K-复调和函数的 Schwarz 边值问题[J].东北师大学报:自然科学版,2012,44(3):20-26.

[11] 王见定.半解析函数,共轭解析函数[M].北京:北京工业大学出版社,1988:17-71.

The K-Fractional Linear Transformation

ZHANG Jian-yuan[1],ZHANG Xin[2]

(1. School of Mathematics and Statistics,Zhaotong University,Zhaotong Yunnan 657000,China;
2. Department of Finance,Zhao Tongsecond People's Hospital,Zhaotong Yunnan 657000,China)

Abstract: Based on the definition of K-derivative,K-conformal transformation and the boundary corresponding theorem,K fractional lineal transformation and its K keeping circumference,K keeping symmetry,K keeping anharmonic ratio and so on are studied. The conclusion is that K fractional lineal transformation is the continuation and application of fractional lineal transformation in analytic function and conjugate analytic function.

Key words: K-derivative; K-analytic function(transformation); K-conformal transformation; K-fractional linear transformation; K keeping circumference; K keeping symmetry; K keeping anharmonic ratio

(责任编辑:王金莲)