文章编号:1000-5862(2014)01-0054-04

一类变系数微分代数方程的数值解

任 磊,王文武

(商丘师范学院数学系,河南 商丘 476000)

摘要:讨论了变系数微分代数方程的数值解.首先给出变系数微分代数方程的系数矩阵 Drazin 逆的求法,然后研究其差分格式上的数值解,最后利用 Drazin 逆的方法和隐式 RK 方法对一类变系数微分代数方程进行了研究,并给出了相应的数值试验,结果表明 Drazin 逆的求解效果较好,但求解过程比较复杂.

关键词:变系数微分代数方程;Drazin 逆;有限算法;Radau IIA

中图分类号:O 241.81 **文献标志码**:A

线性变系数微分代数方程的指数和可解性[1-10]与线性常系数微分代数方程有相似之处,所以本文的理论研究是可以在此基础上作出延伸,考虑变系数微分代数方程的性质是局部性的.

1 多项式矩阵 Drazin 逆的有限算法

定理1 设 $\boldsymbol{A}(t)\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\mathrm{Ind}(\boldsymbol{A}(t))=k$,$f(\mu,t)=\det(\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{k+1}(t))=f_0(t)\mu^n+f_1(t)\mu^{n-1}+\cdots+f_{n-1}(t)\mu+f_n(t)$ 是 $\boldsymbol{A}^{k+1}(t)$ 的特征多项式,其中 $f_0(t)=1$,则有 $f_{r+1}(t)=\cdots=f_n(t)=0$,$f_r(t)\neq 0$,并且 $\boldsymbol{A}_d(t)=-f_r^{-1}(t)\boldsymbol{A}^k(t)[(\boldsymbol{A}^{k+1}(t))^{r-1}+f_1(t)(\boldsymbol{A}^{k+1}(t))^{r-2}+\cdots+f_{r-2}(t)(\boldsymbol{A}^{k+1}(t))+f_{r-1}(t)\boldsymbol{I}_n]$,其中 $r=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}(t))$.

接下来,给出 1 个多项式矩阵 Drazin 逆的算法.

步骤 1 $\boldsymbol{G}_i(t)$ 和 $f_i(t)$ 的递归关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{G}_{i+1}(t)=\boldsymbol{A}^{k+1}(t)\boldsymbol{G}_i(t)+f_i(t)\boldsymbol{I},\\ f_{i+1}(t)=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{k+1}(t)\boldsymbol{G}_{i+1}(t))/(i+1),\end{cases}$$

初始条件为

$$\begin{cases}\boldsymbol{G}_1(t)=\boldsymbol{I}_n,\\ f_1(t)=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{k+1}(t)).\end{cases}$$

步骤 2 由 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^k(t))=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{k+1}(t))=r$ 得 $f_{r+1}(t)=\cdots=f_n(t)=0$,$f_r(t)\neq 0$,则有

$$\boldsymbol{A}_d(t)=-f_r^{-1}(t)\boldsymbol{A}^k(t)[(\boldsymbol{A}^{k+1}(t))^{r-1}+f_1(t)\cdot(\boldsymbol{A}^{k+1}(t))^{r-2}+\cdots+f_{r-2}(t)(\boldsymbol{A}^{k+1}(t))+f_{r-1}(t)\boldsymbol{I}_n]=-f_r^{-1}(t)\boldsymbol{A}^{k+1}(t)\boldsymbol{G}_r(t).\quad(1)$$

2 奇异差分方程的数值解

引理1 设 $\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t)\in\mathbf{C}^{n\times n}$,且 $\exists\mu\in\mathbf{C}$,使得 $(\mu\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))^{-1}$ 存在,并且

$$\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)=(\mu\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))^{-1}\boldsymbol{A}(t),$$
$$\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)=(\mu\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))^{-1}\boldsymbol{B}(t),\quad(2)$$

则 $\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)=\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)$.

证 如果 $\exists\mu\in\mathbf{C}$ 使得 $(\mu\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))^{-1}$ 存在,则

$$\mu\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)+\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)=\mu(\mu\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))^{-1}\boldsymbol{A}(t)+(\mu\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))^{-1}\boldsymbol{B}(t)=(\mu\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))^{-1}\cdot(\mu\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))=\boldsymbol{I}.$$

因此,$\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)=(\boldsymbol{I}-\mu\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t))\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)=\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)-(\mu\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t))^2=\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)(\boldsymbol{I}-\mu\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t))=\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)$.由此可得 $\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)=\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)$.

定理2 设 $\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t)\in\mathbf{C}^{n\times n}$,齐次差分方程

$$\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}_n\quad(3)$$

是可解的当且仅当 $\exists\mu\in\mathbf{C}$ 使得 $(\mu\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))^{-1}$ 存在.

证 充分性 设 $\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)$ 定义于(2)式的形式.易知,$\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}_n$ 是可解的当且仅当 $\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)\boldsymbol{x}_{n+1}=\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)\boldsymbol{x}_n$.

因为 $\mu\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)+\hat{\boldsymbol{B}}_\mu(t)=\boldsymbol{I}$,所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}(t)\in\mathbf{C}(t)^{n\times n}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}(t)\hat{\boldsymbol{A}}_\mu(t)\boldsymbol{P}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}(t)&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{N}(t)\end{pmatrix},$$

收稿日期:2013-07-22

基金项目:河南省科技厅(132300410391)资助项目.

作者简介:任 磊(1978-),男,河南信阳人,讲师,主要从事微分方程数值解的研究.

$$P^{-1}(t)\hat{B}_{\mu}(t)P(t)=\begin{pmatrix} I-\mu C(t) & 0 \\ 0 & I-\mu N(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{B}_1(t) & 0 \\ 0 & \hat{B}_2(t)\end{pmatrix},$$

其中 $C(t)$ 是可逆的而且 $N(t)$ 是 k 阶幂零阵. 设 $x_n=P(t)y_n(t)$，则微分方程可化为

$$\begin{pmatrix} C(t) & 0 \\ 0 & N(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{n+1}^{(1)}(t) \\ y_{n+1}^{(2)}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I-\mu C(t) & 0 \\ 0 & I-\mu N(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_n^{(1)}(t) \\ y_n^{(2)}(t)\end{pmatrix},$$

或者

$$\begin{cases} C(t)y_{n+1}^{(1)}(t)=(I-\mu C(t))y_n^{(1)}(t), & (4)\\ N(t)y_{n+1}^{(2)}(t)=(I-\mu N(t))y_n^{(2)}(t). & (5)\end{cases}$$

因为 $C(t)$ 是可逆的，所以 $C(t)y_{n+1}^{(1)}(t)=(I-\mu C(t))y_n^{(1)}(t)$ 是可逆的，这说明方程(4) 是可解的. 设 $k=\mathrm{Ind}(N(t))$，并且用 $N^{k-1}(t)$ 左乘方程(5)，则 $(I-\mu N(t))N^{k-1}(t)y_n^{(2)}(t)=0$，因此 $N^{k-1}(t)y_n^{(2)}(t)=0$，所以 $N^{k-1}(t)y_{n+1}^{(2)}(t)=0$. 再用 $N^{k-2}(t)$ 左乘方程(5)，则有 $N^{k-1}(t)y_{n+1}^{(2)}(t)=(I-\mu N(t))N^{k-2}(t)y_n^{(2)}(t)$，因此 $N^{k-2}(t)y_n^{(2)}(t)=0$. 重复以上过程，得到 $y_n^{(2)}(t)=0$，并且 $N(t)y_{n+1}^{(2)}(t)+(I-\mu N(t))y_n^{(2)}(t)=0$ 是平凡可解的.

必要性　假设 $A(t)x_{n+1}=B(t)x_n$ 是可解的，需要证明 $\exists\mu\in\mathbf{C}$ 使得 $\mu A(t)+B(t)$ 是可逆的，如若不然，则对所有的 $\mu\in\mathbf{C}$，$\mu A(t)+B(t)$ 是奇异的. 这意味着对每个 $\mu\in\mathbf{C}$，存在向量 $v_{\mu}(t)\in\mathbf{C}^n$ 使得 $(\mu A(t)+B(t))v_{\mu}(t)=\mathbf{0}$ 且 $v_{\mu}(t)\neq\mathbf{0}$.

设 $\{v_{\mu_1}(t),v_{\mu_2}(t),\cdots,v_{\mu_\alpha}(t)\}$ 是 1 个线性无关的向量组，所以存在不全为 0 的 α_i，使得 $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i v_{\mu_i}(t)=\mathbf{0}$. 故 $z_n=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i x_n^{(\mu_i)}$ 不为 $\mathbf{0}$ 而且易知它是方程(3) 的 1 个解. 由于 $z_n=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i v_{\mu_i}(t)=\mathbf{0}$. 因此，方程(3) 在初始条件 $x_0=\mathbf{0}$ 下有 2 个不同的零解 z_n 和 $\mathbf{0}$. 所以，当 $n=0$ 时方程(3) 是不可解的，这与假设矛盾. 因此，$\exists\mu\in\mathbf{C}$ 使得 $(\mu A(t)+B(t))^{-1}$ 存在.

引理 2　设 $A(t),B(t)\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\exists\mu\in\mathbf{C}$ 使得 $(\mu A(t)\pm B(t))^{-1}$ 存在. 令 $\hat{A}_{\mu}(t)=(\mu A(t)\pm B(t))^{-1}A(t)$，$\hat{B}_{\mu}(t)=(\mu A(t)\pm B(t))^{-1}B(t)$，且对所有的 $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$，$(\alpha A(t)\pm B(t))^{-1}$ 和 $(\beta A(t)\pm B(t))^{-1}$ 存在，则

$\hat{A}_{\alpha}^{d}(t)\hat{A}_{\alpha}(t)=\hat{A}_{\beta}^{d}(t)\hat{A}_{\beta}(t)$，$\hat{A}_{\alpha}^{d}(t)\hat{B}_{\alpha}(t)=\hat{A}_{\beta}^{d}(t)\cdot\hat{B}_{\beta}(t)$，$\hat{A}_{\alpha}(t)\hat{B}_{\alpha}^{d}(t)=\hat{A}_{\beta}(t)\hat{B}_{\beta}^{d}(t)$，$\mathrm{Ind}(\hat{A}_{\alpha}(t))=\mathrm{Ind}(\hat{A}_{\beta}(t))$，$R(\hat{A}_{\alpha}(t))=R(\hat{A}_{\beta}(t))$.

引理 2 说明，在证明奇异差分方程解的过程中，表达式 $(\mu A(t)+B(t))^{-1}$ 和 $(\mu A(t)-B(t))^{-1}$ 与其中的参数 μ 是无关的.

下面给出奇异差分方程的一般解.

定理 3　如果差分方程 $A(t)x_{n+1}=B(t)x_n$ 是可解的，则其一般解有如下形式:

$$x_n=\begin{cases}\hat{A}(t)\hat{A}^{d}(t)q, & n=0,\\ (\hat{A}^{d}(t)B(t))^{n}q, & n=1,2,\cdots,\end{cases}\tag{6}$$

其中 $q\in\mathbf{C}^n$，$\hat{A}(t)=(\mu A(t)-B(t))^{-1}A(t)$，$\hat{B}(t)=(\mu A(t)-B(t))^{-1}B(t)$，$\exists\mu\in\mathbf{C}$ 使得 $(\mu A(t)-B(t))^{-1}$ 存在. 同时，$c\in\mathbf{C}^n$ 是方程(6) 的 1 个相容初始向量当且仅当 $c\in R(\hat{A}^{k}(t))=R(\hat{A}_{d}(t)A(t))$，其中 $k=\mathrm{Ind}(\hat{A}(t))$. 此时，$x_n=(\hat{A}_{d}(t)\hat{B}(t))^{n}c$ (其中 $n=0,1,2,3,\cdots$) 是在初值 $x_0=c$ 下的唯一解.

证　因为方程 $A(t)x_{n+1}=B(t)x_n$ 是可解的，在方程的两边乘以 $(\mu A(t)-B(t))^{-1}$ 得到等价的方程 $\hat{A}(t)x_{n+1}=\hat{B}(t)x_n$，在一个等价的相似变化后，得到如下形式:

$$\begin{pmatrix} C(t) & 0 \\ 0 & N(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{n+1}^{(1)}(t) \\ y_{n+1}^{(2)}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I+\mu C(t) & 0 \\ 0 & I+\mu N(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_n^{(1)}(t) \\ y_n^{(2)}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{B}_1(t) & 0 \\ 0 & \hat{B}_2(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_n^{(1)}(t) \\ y_n^{(2)}(t)\end{pmatrix}.$$

上述差分方程与下面程组等价

$$\begin{cases} C(t)y_{n+1}^{(1)}(t)=\hat{B}_1(t)y_n^{(1)}(t),\\ N(t)y_{n+1}^{(2)}(t)=\hat{B}_2(t)y_n^{(2)}(t).\end{cases}$$

因为 $\hat{B}_2(t)$ 是可逆的，而且上述方程组第 1 个方程的唯一解是 $y_{n+1}^{(2)}(t)=\hat{B}_2^{-k}N^{K}y_{n+k}^{(2)}(t)=\mathbf{0}$，但是第 2 个方程对任何 $y_0(t)$ 是相容的，并且其唯一解为 $y_n^{(1)}(t)=C^{-n}(t)(\hat{B}_1(t))y_0^{(1)}(t)$. 就初始变量而言，

$$x_n(t)=T(t)y_n(t)=T(t)\begin{pmatrix} C^{-n}(t)(\hat{B}_1(t))^{n} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}T^{-1}(t)T(t)\cdot\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}T^{-1}(t)T(t)\begin{pmatrix} y_0^{(1)}(t) \\ y_0^{(2)}(t)\end{pmatrix}=(\hat{A}_{d}(t)\hat{B}(t))^{n}q,$$

其中 $q=(y_0^{(1)}(t),y_0^{(2)}(t))^{\mathrm{T}}$ 是任意的.

3　数值实例

例 1　考虑如下变系数微分代数方程

$$A(t)\dot{x}(t)+B(t)x(t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\tag{7}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&t&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}-1&0&-t&0\\-1&1&-t^2&t\\-t^3&t^2&-1&0\\t&-1&t&-1\end{pmatrix},$$

取步长 $h=0.01$，方程(7)的解析解为 $x(t)=(e^{-t},te^{-t},e^{-t},te^{-t})^{T}$.

(ⅰ) Drazin 逆.

应用经典的龙格库塔方法于方程(7)，可得

$$A(t)x_{n+1}=A(t)x_n+h[k_1+2k_2+2k_3+k_4]/6,$$

其中 $k_1=-B(t)x_n$，$k_2=-B(t)+hk_1/2$，$k_3=-B(t)+hk_2/2$，$k_4=-B(t)+hk_3$. 故 $A(t)x_{n+1}=[A(t)-(h+h^2/2+h^3/6+h^4/24)B(t)]x_n$.

现在用差分方法来解方程(7)，设

$$C(t)=[A(t)-(h+h^2/2+h^3/6+h^4/24)B(t)]=\begin{pmatrix}0.8948&0&0.1052t&-0.1052\\0.1052&0.8948&0.1052t^2&-0.1052t\\0.1052t^3&-0.1052t^2&1.1052&0\\-0.1052t&0.1052&-0.1052t&0.1052\end{pmatrix},$$

取 $\mu=-1$，则 $\det(-A(t)-C(t))=0.7925\neq 0$，因此，有 1 个常数 $\mu=-1$ 使得逆矩阵 $(\mu A(t)-C(t))^{-1}$ 存在. 因此，

$$\hat{A}(t)=(-A(t)-C(t))A(t)=$$

$$\begin{pmatrix}-0.5294-0.0294t&0.0294&0&0\\0.0294-0.0294t^2&-0.5294+0.0294t&0&0\\0.0015t^2+0.0264t^3&-0.0264t^2&-0.475&0\\-0.0294-0.5294t+0.0015t^3+0/0264t^4&0.5294-0.0264t^3&-0.475t&0\end{pmatrix},$$

$$\hat{C}(t)=(-A(t)-C(t))C(t)=$$

$$\begin{pmatrix}-0.4975+0.0025t&-0.0025&0&0\\-0.0025+0.0025t^2&-0.4975-0.0025t&0&0\\-0.0025t^3&0.0025t^2&-0.5025&0\\0.0025+0.5025t-0.0025t^4&-0.5025+0.0025t^3&0.4975t&-1\end{pmatrix},$$

因此 $\hat{A}_d(t)$ 可以用有限算法(1)来计算得到，即

$$\hat{A}_d(t)=\begin{pmatrix}-1.8948+0.1052t&-0.1052&0&0\\-0.1052+0.1052t^2&-1.8948-0.1052t&0&0\\-0.1052t^3&0.1052t^2&-2.1052&0\\0.1052-1.8948t-0.1052t^4&1.8948+0.1052&-2.1052t&0\end{pmatrix}.$$

由定理 3 得，方程的一般解为

$$x_n=\begin{cases}\begin{pmatrix}1-2.8544t&2.8544&0&0\\2.8544-2.8544t^2&1+2.8544t&0&0\\1.426t^2+2.5692t^3&-2.5692t^2&1&0\\-2.8544+t+1.426t^3+2.5692t^4&-1-2.5692t^3&t&0\end{pmatrix}q, & n=0,\\ \begin{pmatrix}0.8948-0.1052t&0.1052&0&0\\0.1052-0.1052t^2&0.1052t&0&0\\-1.8334t+0.1052t^3&-0.1052t^2&1.1052&0\\-0.1052+0.8948t-1.8334t^3+0.1052t^4&-0.8948-0.1052t^3&1.1052t&0\end{pmatrix}q, & n=1,2,\cdots,\end{cases}$$

其中 $q\in \mathbf{C}^n$.

设 $q\in R(\hat{A}(t))^k$，可以通过上式来计算方程(7)的一般解.

(ⅱ) Radau IIA.

考虑 Radau IIA 形式如图 1 所示.

$$\begin{array}{c|cc}\frac{1}{3}&\frac{5}{12}&-\frac{1}{12}\\1&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\hline &\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{array}$$

图 1　分块矩阵

把 Radau IIA 应用到方程(7)得

$$\begin{cases}AK_{n,1}+B[x_n+h(\frac{5}{12}K_{n,1}-\frac{1}{12}K_{n,2})]=\mathbf{0},\\ AK_{n,2}+B[x_n+h(\frac{3}{4}K_{n,1}-\frac{1}{4}K_{n,2})]=\mathbf{0}.\end{cases}$$

上式可化为

$$\begin{pmatrix}A+\frac{5}{12}hB&-\frac{1}{12}hB\\\frac{3}{4}hB&A+\frac{1}{4}hB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{n,1}\\K_{n,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-Bx_n\\-Bx_n\end{pmatrix},$$

其中上述方程组的系数矩阵是奇异的. 所以，可以通过方程式

$$x_{n+1} = x_n + h(3K_{n,1} + K_{n,2})/4$$

来计算(7)式的数值解.

表 1 列出了数值解和解析解在各个结点的数值,误差 $E_n = \| x(n) - x_n \|_2$. 通过数据结果可以得出,对于此类变系数微分代数方程而言,虽然 Drazin 逆和 Radau IIA 方法都没有达到较好的逼近效果,但是 Drazin 逆的计算结果相对较好.

表 1　Drazin 逆和 Radau IIA 的误差

$t(h = 0.01)$	E_n(Drazin 逆)	E_n(Radau IIA)
0.01	1.122 824 816 2e − 004	1.008 826 062 8e − 003
0.02	6.303 562 243 7e − 004	8.614 597 658 9e − 003
0.03	5.524 909 953 1e − 004	1.203 690 999 3e − 003
0.04	3.926 552 106 1e − 004	1.303 598 848 8e − 003
0.05	1.755 856 275 3e − 004	5.549 803 192 3e − 003
0.06	1.731 305 980 1e − 004	6.769 968 807 8e − 003
0.07	1.220 379 605 6e − 004	7.128 153 356 0e − 003
0.08	5.055 136 847 7e − 004	9.680 673 656 1e − 003
0.09	6.646 831 228 1e − 004	9.906 160 280 9e − 003
0.10	6.114 568 928 5e − 004	1.389 235 661 6e − 003

4　参考文献

[1] Brenan K E,Campbell S L,Petzold L R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations [M]. New York: North-Holland,1989.

[2] Campbell S L. Singular system of differential equations [M]. San Francisco: Pitman Publishing Ltd,1980.

[3] Campbell S L. Singular system of differential equations II [M]. San Francisco: Pitman Publishing Ltd,1982.

[4] Campbell S L. One canonical form for higher index linear time-varying singular systems [J]. Circuits Syst Signal Process,1983,2(3):311-326.

[5] Campbell S L,Meyer C D,Rose J R. Generalized inverse of linear transformations [M]. Great Britain: Pitman,1979.

[6] Gao Jing,Wang Guorong. Two algorithms of Drazin inverse of a polynomial matrix [J]. Journal of Shanghai Normal University: Science Edition,2002,31(2):31-38.

[7] Ascher U M,Petzold L R. Projected implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations [J]. SIAM J Numer Anal,1991,28(4):1097-1120.

[8] Brenan K E,Compbell S L,Petzold L R. Numerical solution of initial-value problem in differential-algebraic equations [M]. New York: Elsevier,1989.

[9] 任磊,孙乐平. 一类奇异微分代数系统的数值解 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(5):491-494.

[10] Celik E. On the numerical solution of differential-algebraic equation with index-2 [J]. Appl Math Comput,2004,156(2):541-550.

The Numerical Treatment of Time Varying Differential Algebraic Equations

REN Lei,WANG Wen-wu

(Department of Mathematics,Shangqiu Normal University,Shangqiu Henan 476000,China)

Abstract: The numerical treatment of time varying differential algebraic equations is dicussed. Drazin inverse is given to solve the time varying differential algebraic equations. This method is tested on a index-1 differential algebraic system. According to the obtained solutions,it is inferred that Drazin inverse is a powerful tool for solving this kind of problems. It is shown that the precision of the Drazin inverse method is higher than the Radau IIA method,but the Drazin inverse method is implemented more complex than the Radau IIA method.

Key words: time varying differential algebraic equations; Drazin inverse; infinite algorithm; Radau IIA

(责任编辑:曾剑锋)