第 38 卷 第 1 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 1
2014 年 1 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jan. 2014

文章编号:1000-5862(2014)01-0065-05

算子非精确条件下确定正则化参数的一种方法

胡　彬,夏　赟,喻建华

(东华理工大学理学院,江西 南昌　330013)

摘要:基于非标准的广义偏差原则,在算子及观测数据都有扰动的条件下,对于求解不适定问题的 Tikhonov 正则化方法,给出了一种选取正则化参数的简单迭代算法,并阐明了该迭代算法是一种线性模型函数算法. 进一步地,利用线性模型函数方法,在一定条件下证明了所提出的选取正则化参数的简单迭代算法是收敛的,并通过数值算例验证了该方法的有效性.

关键词:不适定问题;正则化方法;正则化参数;模型函数;广义偏差原则

中图分类号:O 241.8;O 241.6　　**文献标志码**:A

0　引言

数学物理反问题主要是指由事物的观测数据来预测它的不可测数据或不可知信息. 但在实际测量时,测量数据不可避免的带有某些微小扰动,这些微小扰动可能造成解的急剧变化. 因此这类问题往往是不适定或者说是不稳定的. 常用正则化方法来克服这类问题求解中的不稳定性,求得稳定数值解,其中最具有代表的是 Tikhonov 正则化方法[1-4]. 在实际求解过程中,正则化方法是否有效关键在于正则化参数的选取. 选取正则化参数的策略有先验和后验两种,这些在实际计算和理论研究上都不是令人非常满意. 因此,找到更有效的选取正则化参数的方法,不仅可以节约计算代价,还可以进一步提升正则化方法的适用性.

Morozov 偏差原理的选取正则化参数是重要策略之一,但更多的是基于这一原理在算子精确的前提条件下展开研究的. 如文献[5-10]研究了正则化参数选取的模型函数方法,特别是文献[8-10]提出了线性模型、指数模型、双曲模型与对数模型的概念及其新的模型函数,并从单正则化参数的选取推广到多正则化参数的选取.

在许多实际应用领域,如大气气溶胶遥感反演、电磁场反演等领域,算子方程中的算子往往是不精确的,即算子带有扰动误差. 众所周知,算子非精确条件下正则化参数选取的研究未见广泛展开[10-11]. 本文针对在算子和观测数据都非精确的条件下,基于广义偏差原理研究正则化参数选取的模型函数方法与求解不适定算子方程的正则化解,并讨论了正则化解的一些性质.

1　Tikhonov 正则化与广义偏差原理

求解不适定的第 1 类算子方程

$$Kx = y, \tag{1}$$

K 是 Hilbert 空间 X 到 Y 上的有界线性算子. 设 K_h 为 K 的近似算子,也是 Hilbert 空间 X 到 Y 上的有界线性算子,且满足 $\|K_h - K\| \leqslant h$. 设 y^δ 为方程右端项 y 的观测值,这里记右端项的真值仍然为 y,且满足 $\|y^\delta - y\| \leqslant \delta$. 记 $\eta = (h,\delta)$,则不适定算子方程(1)的实际求解问题是:在 X 的某个闭凸集 D 上,由 $\{K_h, y^\delta, \eta\}$ 近似求出算子方程(1)的解,即在闭凸集 D 上求解近似方程

$$K_h x = y^\delta, y^\delta \in Y, \tag{2}$$

从而获得算子方程(1)的近似解,其中闭凸集 D 是由问题的先验信息决定的. 方程(2)的求解归结为极小化泛函 $\|K_h x - y^\delta\|^2$,当算子是紧线性算子和值域是无穷维时,方程(2)本质上是不适定的,从而极小化泛函 $\|K_h x - y^\delta\|^2$ 也是不适定的. 克服不适定的典型方法是 Tikhonov 正则化,即给极小化泛函加上一个惩罚项,再极小化新的目标泛函,即极小化正则化泛函

收稿日期:2013-10-25

基金项目:国家自然科学基金(11161002),江西省青年科学基金(20132BAB211014)和江西省教育厅科技课题(GJJ13460)资助项目.

作者简介:胡　彬(1982-),女,江西南丰人,讲师,主要从事数学物理方程反问题理论及计算的研究.

$$J_\alpha(x) = \|K_h x - y^\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2, \quad (3)$$

其中$\alpha > 0$为正则化参数. 记上述正则化泛函的极小元为$x(\alpha,\eta)$. 由文献[11]可知,当$x(\alpha,\eta)$为D的内点或者$D = X$时,则求解$G(\alpha)$等价于求解下述欧拉方程

$$K_h^* K_h x(\alpha,\eta) + \alpha x(\alpha,\eta) = K_h^* y^\delta. \quad (4)$$

方程(4)的求解关键取决于正则化参数α有效选取. 选取的原则: 选取$\alpha(\eta)$,当$\eta \to 0$时,$x(\alpha,\eta) \to x$,其中$x(\alpha,\eta)$为正则化解(方程(4)的解),x为方程(1)的精确解.

定义1 $\mu_\eta(K_h,y^\delta) = \inf\limits_{x \in D}\|K_h x - y^\delta\|$,称$\mu_\eta(K_h,y^\delta)$为近似算子$K_h$与$y^\delta$在闭凸集$D \subseteq X$上的不相容度.

显然,当$y^\delta \in \overline{K_h D}$时,$\mu_\eta(K_h,y^\delta) = 0$.

引理1 设$\|y - y^\delta\| \leqslant \delta$,$\|K - K_h\| \leqslant h$,$y = Kx$,$x \in D$,则当$\eta \to 0$时,有$\mu_\eta(K_h,y^\delta) = 0$.

事实上,$\mu_\eta(K_h,y^\delta) \leqslant \|K_h x - y^\delta\| \leqslant \|K_h x - Kx\| + \|Kx - y^\delta\| \leqslant h\|x\| + \delta$. 定义3个正则化参数$\alpha$的函数为

$$F(\alpha) = \|K_h x(\alpha,\eta) - y^\delta\|^2 + \alpha\|x(\alpha,\eta)\|^2,$$
$$D(\alpha) = \|K_h x(\alpha,\eta) - y^\delta\|^2,$$
$$\varphi(\alpha) = \|x(\alpha,\eta)\|^2,$$

其中$\alpha \in (0,+\infty)$.

引理2[11-12] (i) 函数$F(\alpha)$,$D(\alpha)$,$\varphi(\alpha)$在区间$(0,+\infty)$内都连续;

(ii) 函数$F(\alpha)$是凸的可微函数,且

$$F'(\alpha) = \varphi(\alpha);$$

(iii) 函数$F(\alpha)$与$D(\alpha)$是单调非减的,$\varphi(\alpha)$是单调非增的;

(iv) 满足下列等式:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\varphi(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}\alpha\varphi(\alpha) = 0, \lim_{\alpha\to0+}\alpha\varphi(\alpha) = 0,$$
$$\lim_{\alpha\to+\infty}F(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}D(\alpha) = \|y^\delta\|^2,$$
$$\lim_{\alpha\to0+}F(\alpha) = \lim_{\alpha\to0+}D(\alpha) = (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2.$$

这里引进如下非标准广义偏差函数

$$d(\alpha) = \|K_h x(\alpha,\eta) - y^\delta\|^2 + \alpha\|x(\alpha,\eta)\|^2 - (\delta + h\|x(\alpha,\eta)\|)^2 - (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2, \quad (5)$$

显然,当去掉(5)式右端第2项时,即文献[11-12]中所给出的广义偏差函数. 确定正则化参数的非标准广义偏差原理是: 当$\|y^\delta\|^2 \leqslant \delta^2 + (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2$时,取$x(\alpha,\eta) = 0$作为算子方程(1)的近似解; 否则,选取非标准广义偏差函数$d(\alpha)$的正零点α^*作为正则化参数,从而获得方程(1)的近似解$x(\alpha^*,\eta)$.

定理1 $d(\alpha)$具有如下性质:

(i) $d(\alpha)$是区间$(0,+\infty)$内的连续函数,且单调非减的;

(ii) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}d(\alpha) = \|y^\delta\|^2 - \delta^2 - (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2$;

(iii) $\lim\limits_{\alpha\to0+}d(\alpha) \leqslant -\delta^2$;

(iv) 设$y^\delta \notin K_h^*$,若$\|y^\delta\|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2$,则存在唯一的$\alpha^* > 0$,使得$d(\alpha^*) = 0$,对应的正则化解也是唯一确定的,且此时$d(\alpha)$是严格单调递增的.

证 由$F(\alpha)$和$\varphi(\alpha)$的定义知$d(\alpha)$为

$$d(\alpha) = F(\alpha) - (\delta + h\varphi(\alpha))^2 - (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2.$$

(i) 连续性直接由引理2可得,下证单调性.

取$0 < \alpha_1 < \alpha_2$,则

$$d(\alpha_2) - d(\alpha_1) = F(\alpha_2) - F(\alpha_1) + h^2(\varphi^2(\alpha_1) - \varphi^2(\alpha_2)) + 2h\delta(\varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_2)).$$

由$F(\alpha)$与$\varphi(\alpha)$的单调性,得$\varphi(\alpha_1) \geqslant \varphi(\alpha_2)$,$F(\alpha_1) \leqslant F(\alpha_2)$. 所以$d(\alpha_2) - d(\alpha_1) \geqslant 0$.

(ii) 由引理2可得

$$\lim_{\alpha\to+\infty}d(\alpha) = \|y^\delta\|^2 - \delta^2 - (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2.$$

(iii) 由$\lim\limits_{\alpha\to0+}F(\alpha) = (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2$得证.

(iv) 因为$y^\delta \notin K_h^*$,所以由(4)式知$x_\eta(\alpha,\eta) \neq 0$,则$F(\alpha)$严格单调递增,从而得$d(\alpha)$也严格递增. 因为

$$\lim_{\alpha\to+\infty}d(\alpha) = \|y^\delta\|^2 - \delta^2 - (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2,$$
$$\|y^\delta\|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2,$$

所以$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}d(\alpha) > 0$. 又$\lim\limits_{\alpha\to0+}d(\alpha) \leqslant -\delta^2$. 由$d(\alpha)$是区间$(0,+\infty)$内的连续函数,所以存在唯一的$\alpha^* > 0$,使得$d(\alpha^*) = 0$.

2 确定正则化参数的迭代算法

根据(5)式,将偏差函数方程$d(\alpha) = 0$改写成

$$\alpha = [(\delta + h\|x(\alpha,\eta)\|)^2 + (\mu_\eta(K_h,y^\delta))^2 - \|K_h x(\alpha,\eta) - y^\delta\|^2] / \|x(\alpha,\eta)\|^2.$$

由此,得到下述确定正则化参数的简单迭代算法.

算法1 正则化参数选取的迭代算法.

给定初始α_0,且$\varepsilon > 0$,置$k = 0$,

Step 1 把初始正则化参数α_0代入(4)式,解(4)式得$x(\alpha_0,\eta)$,计算$d(\alpha_0)$,若$d(\alpha_0) = 0$输出α_0,计算停止;

Step 2 否则计算

$$\alpha_{k+1} = [(\delta + h\|x(\alpha_k,\eta)\|)^2 + (\mu_\eta(K_h,\eta))^2 - \|K_h x(\alpha_k,\eta) - y_\delta\|^2] / \|x(\alpha_k,\eta)\|^2;$$

Step 3 把α_{k+1}代入(4)式求得$x(\alpha_{k+1},\eta)$,并计算$d(\alpha_{k+1})$.

Step 4 如果$d(\alpha_k)d(\alpha_{k+1}) \leqslant 0$或$|\alpha_{k+1} - \alpha_k| / \alpha_k \leqslant \varepsilon$,则输出$\alpha_{k+1}$. 否则置$k = k + 1$并转到

Step 2.

定理 2　设 $y^{\delta} \notin K_h^*$，$\|y_\delta\|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta(K_h, y_\delta))^2$，$d(\alpha^*) = 0$，假设 α_0 从 0 开始迭代，算法 1 不因 $d(\alpha_k)d(\alpha_{k+1}) < 0$ 而停止，则由算法 1 所得的正则化参数序列 $\{\alpha_k\}$ 或者只有有限个或者是无限且当 $y^{\delta} \in \overline{K_h D}$ 时，有 $\alpha_k \to \alpha^*$，$k \to +\infty$

为了证明该定理，先引进线性模型函数的思想方法[8-9]．由引理 2 可知 $F'(\alpha) = \varphi(\alpha)$，则确定正则化参数的迭代算法 1 实际上是线性模型函数的算法，即设第 k 步的线性模型函数为 $m_k(\alpha) = C_k\alpha + T_k$，其中 C_k，T_k 为待定参数．显然，由文献[8,10]中的方法得 $C_k = \varphi(\alpha_k)$，$T_k = D(\alpha_k)$．当算子是精确时，文献[10]首次从 Hermite 插值出发得到确定正则化参数的线性模型函数．而 $d(\alpha)$ 可改写为 $F(\alpha)$ 的形式，即

$$d(\alpha) = F(\alpha) - (\delta + h\sqrt{F'(\alpha)})^2 - (\mu_\eta(K_h, y_\delta))^2.$$

在迭代计算中，用 $m_k(\alpha)$ 替代了 $F(\alpha)$，得到的线性模型函数算法即为算法 1．记

$$d_k(\alpha) = m_k(\alpha) - (\delta + h\sqrt{m'_k(\alpha)})^2 - (\mu_\eta(K_h, y_\delta))^2,$$

显然，$d_k(\alpha)$ 是单调递增的，且当 $y^{\delta} \notin K_h^*$ 时严格单调递增．

定理 2 的证明　当 $d_0(\alpha_0) = 0$ 时，算法 1 停止，α_0 是所要求的正则化参数．以下只要证明 $d_0(\alpha_0) > 0$ 与 $d_0(\alpha_0) < 0$ 这 2 种情况下结论是成立的．

(i) 当 $d_0(\alpha_0) > 0$ 时，因为

$$d_0(\alpha) = C_0\alpha + T_0 - (\delta + h\sqrt{C_0})^2 - \mu_\eta^2,$$

则由引理 2 的(iii)知 $T_0 = \mu_\eta^2$，所以得 $d_0(0) < 0$．又由 $d_0(\alpha)$ 的单调性，可得存在唯一的 $\alpha_1 \in (0, \alpha_0)$ 使得 $d_0(\alpha_1) = 0$．显然当 $d_0(\alpha_0)d_k(\alpha_k) \leqslant 0$ 时，序列 $\{\alpha_k\}$ 是有限的且严格单调．因此，只需证明当 $d_0(\alpha_0)d_k(\alpha_k) \leqslant 0$ 不成立时，α_k 收敛于 α^*．此时，序列 $\{\alpha_k\}$ 满足 $d_k(\alpha_k) > 0 (k = 1, 2, \cdots)$．由 $d_k(\alpha_{k+1}) = 0$ 和 $d_k(\alpha)$ 的单调性得 $\alpha_k > \alpha_{k+1}$．再由 $d(\alpha)$ 的单调性和 $d_k(\alpha_k) = d(\alpha_k)$，$d(\alpha^*) = 0$ 得 $\alpha_k > \alpha^*$．然后，根据单调有界序列必收敛得 $\{\alpha_k\}$ 是收敛的．

记 $\hat{\alpha} = \lim\limits_{k\to+\infty}\alpha_k$．当 $y^{\delta} \in \overline{K_h D}$ 时，$\mu_\eta(K_h, y^{\delta}) = 0$．下证 $d(\hat{\alpha}) = 0$．此时，

$$d_k(\alpha_k) = m_k(\alpha_k) - (\delta + h\sqrt{m'_k(\alpha_k)})^2 = F(\alpha_k) - (\delta + h\sqrt{F'(\alpha_k)})^2.$$

又因为 $F(\alpha)$ 和 $x(\alpha)$ 都是连续的，所以

$$\lim_{k\to+\infty} d_k(\alpha_k) = \lim_{k\to+\infty} d_k(\alpha_{k+1}).$$

又 $d_k(\alpha_{k+1}) = 0$ 和 $d_k(\alpha_k) = d(\alpha_k)$ 得

$$d(\hat{\alpha}) = \lim_{k\to+\infty} d(\alpha_k) = \lim_{k\to+\infty} d_k(\alpha_k) = 0.$$

(ii) 当 $d_0(\alpha_0) < 0$ 时只需证明算法 1 能够产生序列 $\{\alpha_k\}$．因为

$$\lim_{\alpha\to+\infty} d_0(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} [C_0\alpha + T_0 - (\delta + h\sqrt{C_0})^2 - \mu_\eta^2(K_h x, y^{\delta})] = +\infty,$$

由 $d_0(\alpha)$ 的单调性可知 $\{\alpha_k\}$ 存在．后面的证明与(i)类似．

3　数值实例及误差估计

为说明本文所给方法的有效性，给出 2 个数值实算例．

例 1　求解第 1 类 Fredholm 积分方程[13]

$$Kx = \int_0^1 K(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t), \quad -2 \leqslant t \leqslant 2,$$

其中

$$K(s,t) = \frac{1}{1 + 100(t - s)^2},$$

$$x(s) = \frac{\exp\left(-\frac{(s-0.3)^2}{0.03}\right) + \exp\left(-\frac{(s-0.7)^2}{0.03}\right)}{0.955\,040\,8} - 0.052\,130\,913.$$

用梯形公式来离散以上第 1 类 Fredholm 积分方程，得线性方程组

$$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{y}}, \tag{6}$$

其中积分核 $K(s,t)$ 离散成矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{x}(s)$ 离散成 n 维列向量 $\bar{x}$．对(6)式两端同时加入随机扰动，即

$$\boldsymbol{A}_h = \boldsymbol{A} + h \cdot \mathrm{randn}(m \times n) \cdot \boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{y}^{\delta} = \bar{\boldsymbol{y}} + \delta \cdot \mathrm{randn}(n) \cdot \bar{\boldsymbol{y}}.$$

注 1　randn 为 Matlab 软件中的随机函数．初始值 $\alpha_0 = 0$，取不同的误差值 δ，h．求出相应的正则化参数，并求出由此参数求解的正则化解与真解之间的相对误差，同时也给出正则化解与真解的拟合图像．如图 1 所示，线形线为无扰动下方程的数值解，星形线为在不同扰动水平下方程的正则化解．记

$$h = \|\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{A}\|, \quad \delta = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{\delta}\|,$$

$$\rho = \|\boldsymbol{x}(\alpha, \eta) - \hat{\boldsymbol{x}}\| / \|\hat{\boldsymbol{x}}\|.$$

情形 1　当 $h = 9.358\,8\mathrm{e}-007$，$\delta = 9.358\,8\mathrm{e}-007$ 时，正则化参数 $\alpha = 3.790\,8\mathrm{e}-009$，正则化解的相对误差 $\rho = 1.274\,1\mathrm{e}-002$．正则化解与真解的对比图(见图 1 和图 2)，其中图 1 是该情形下未作正则化处理的计算结果(即当 $\alpha = 0$ 时的最小二乘解)，图 2 为算法 1 所得结果．

情形 2　当 $h = 4.385\,0\mathrm{e}-005$，$\delta = 3.022\,4\mathrm{e}-004$ 时，正则化参数 $\alpha = 1.325\,0\mathrm{e}-008$，正则化解的

相对误差 $\rho = 1.5365\mathrm{e}-002$，如图3所示.

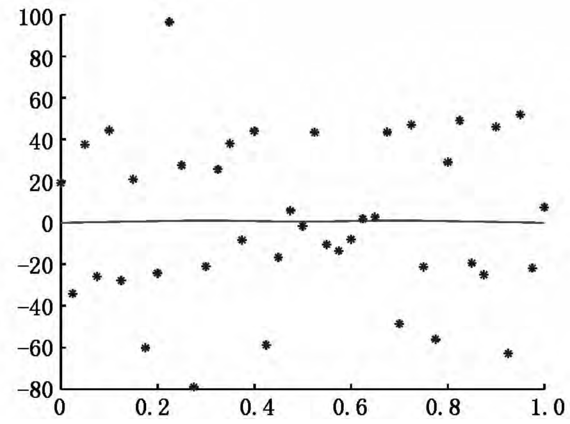

图1 $\alpha = 0$

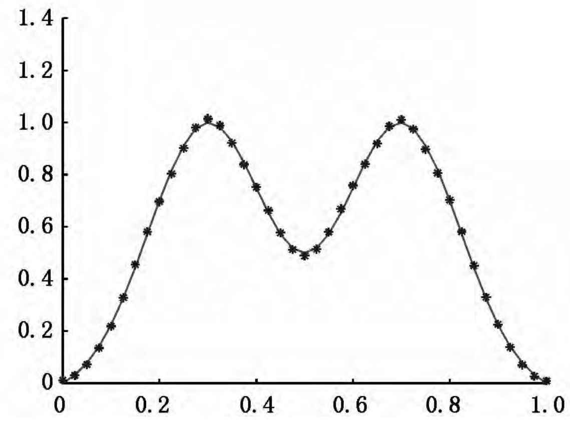

图2 $\alpha = 3.7908\mathrm{e}-009$

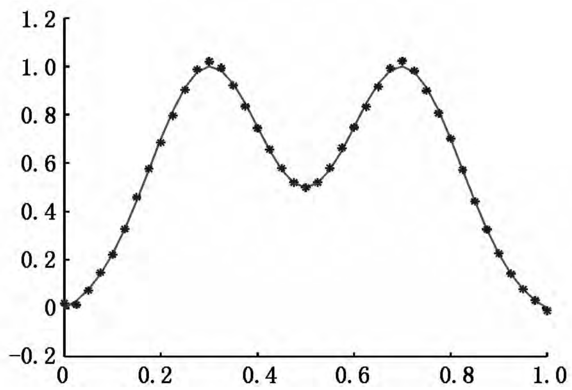

图3 $\alpha = 1.3250\mathrm{e}-008$

例2 考虑求解第1类 Fredholm 积分方程

$$Kx = \int_0^1 K(s,t)\,x(s)\,\mathrm{d}s = y(t),$$

其中

$$K(s,t) = \sqrt{2g(t-s)},\ g = 9.80,$$
$$x(s) = \mathrm{e}^{-s}\left(2\pi\cos(\pi s) + (\pi^2 - 1)\sin(\pi s)\right).$$

同理，把积分方程离散成线性方程组 $A\bar{x} = \bar{y}$，方程两端的算子及测量数据都加入随机扰动. 正则化解与真解的对比图如下，线形线、星形线分别为无扰动下与不同扰动水平下方程的正则化解.

情形1 当 $h = 9.4749\mathrm{e}-007$，$\delta = 1.6\mathrm{e}-003$ 时，正则化参数 $\alpha = 1.0192\mathrm{e}-009$，正则化解的相对误差 $\rho = 0.0537$. 正则化解如图4与图5所示，其中图4是该情形下未作正则化处理的计算结果，图5为算法1所得结果.

情形2 当 $h = 7.7650\mathrm{e}-008$，$\delta = 1.3967\mathrm{e}-005$ 时，正则化参数 $\alpha = 9.2217\mathrm{e}-014$，正则化解的相对误差 $\rho = 0.0435$，正则化解如图6所示.

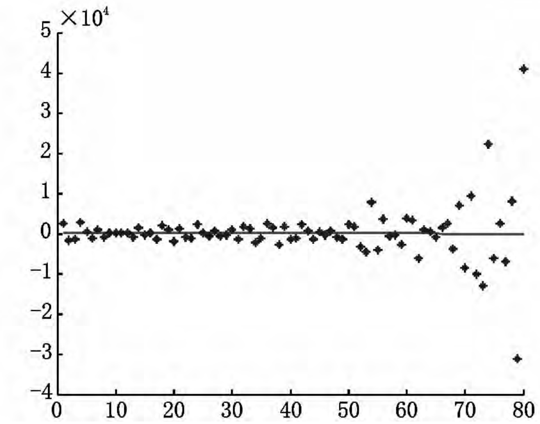

图4 $\alpha = 0$

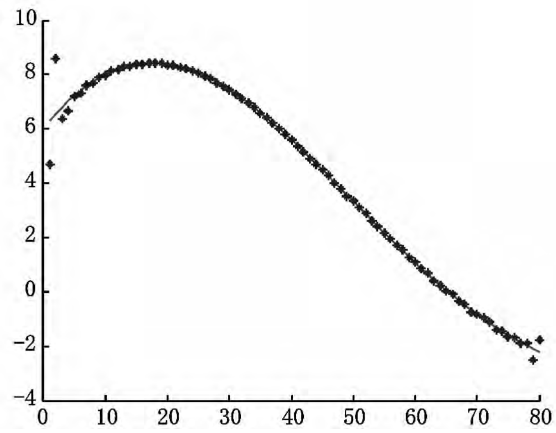

图5 $\alpha = 1.0192\mathrm{e}-009$

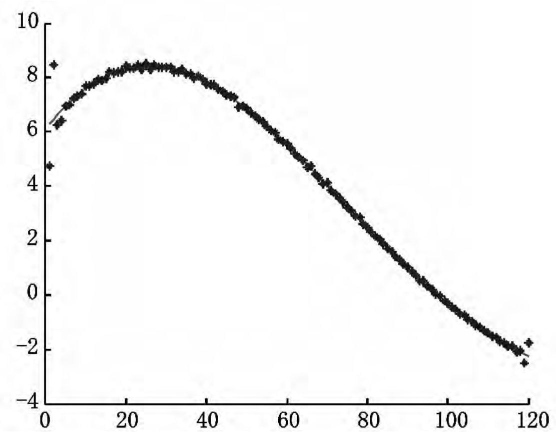

图6 $\alpha = 9.2217\mathrm{e}-014$

比较算例的数值模拟结果知，方程未做正则化

直接得到的解与方程的真解偏离甚远，拟合效果也较差. 而基于非标准广义偏差函数原理的线性模型函数算法（即算法 1），在不同的扰动水平下确定的正则化参数所求得的正则化解都与真解的相对误差很小，拟合效果都较好. 这就说明了本文所提出的方法能够有效选取正则化参数，并且用这种方法更新得到的正则化参数 α 是全局收敛的.

本文提出的方法仅针对单正则化参数的选取进行了研究，对于如何把这种线性模型函数，在方程两端都有扰动的条件下，应用到多个正则化参数的选取中去有待进一步研究.

4　参考文献

[1] Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2011.

[2] Engl H W, Hanke M, Neubamer A. Regularization of inverse problems [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[3] 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用 [M]. 北京：科学出版社，2005.

[4] Cheng Jin, Yamamoto M. One new strategy for a priori choice of regularizing parameters in Tikhonov's regularization [J]. Inverse Problems, 2000, 16(4): 31-38.

[5] Kunisch K, Zou Jun. Iterative choices of regularization parameters in linear inverse problems [J]. Inverse Problems, 1998, 14(5): 1247-1264.

[6] Xie Jianli, Zou Jun. An improved model function method for choosing regularization parameters in linear inverse problems [J]. Inverse Problems, 2002, 18(3): 631-643.

[7] Liu Jijun, Ni Ming. A model function method for determining the regularizing parameter in potential approach for the recovery of scattered wave [J]. Applied Numerical Mathematics, 2008, 58(8): 1113-1128.

[8] Wang Zewen, Liu Jijun. New model function methods for determining regularization parameters in linear inverse problems [J]. Applied Numerical Mathematics, 2009, 59(10): 2489-2506.

[9] Wang Zewen. Multi-parameter Tiknonov regularization and model function approach to the damped Morozov principle for choosing regularization parameters [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012, 236(7): 1815-1832.

[10] Wang Zewen, Xu Dinghua. On the linear model function method for choosing Tikonov regularization parameters in linear ill-posed problems [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2013, 30(3): 451-466.

[11] Tikhonov A N, Goncharsky A V, Stepanov V V, et al. Numerical methods for the solution of ill-posed problems [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[12] 樊树芳，马青华，王彦飞. 算子及观测数据都非精确情况下一种新的正则化参数选择方法 [J]. 北京师范大学学报：自然科学版，2006, 42(1): 25-31.

[13] 王彦飞. 反演问题的计算方法及其应用 [M]. 北京：高等教育出版社，2007.

The Method for Determining Regularization Parameters with Perturbed Operators

HU Bin, XIA Yun, YU Jian-hua

(School of Science, East China Institute of Technology, Nanchang Jiangxi 330013, China)

Abstract: Based on the non-standard generalized discrepancy principle, a simple iteration method is given for choosing regularization parameters with perturbed operator and noise data for the Tikhonov regularization method, which is a classical method for solving ill-posed problems. And it is clarified that the proposed iteration method is a linear model function algorithm. Furthermore, the simple iteration method for choosing regularization parameters is proved to be converging under some conditions by using the linear model function method. Numerical experiments show that the method is efficient.

Key words: ill-posed problem; regularization method; regularization parameter; model function; generalized discrepancy principle

（责任编辑：曾剑锋）