

文章编号: 1000-5862(2014)01-0070-04

正态和对数正态分布中参数的损失和 风险函数的 Bayes 推断

丁新月, 徐美萍

(北京工商大学理学院, 北京 100048)

摘要: 给出了共轭先验分布下正态模型中尺度参数和对数正态模型中形状参数的损失函数和风险函数的 Bayes 估计及其为保守估计的一般条件, 说明了该条件的合理性, 并利用沪深 300 中的中国石化和鄂尔多斯股票的周收盘价数据进行实证分析来阐明结论的有效性.

关键词: 共轭先验分布; Bayes 估计; 保守估计; 损失函数; 风险函数

中图分类号: O 212.8

文献标志码: A

0 引言

Bayes 统计的主要特点是利用未知参数 θ 的先验分布 $\pi(\theta)$, 在得到样本观测值 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 后, 由 x 与先验分布提供的信息, 得到后验分布 $h(\theta | x)$. 这一后验分布综合了样本与先验信息, 组成了较完整的后验信息, 是 Bayes 统计推断的基础, 在应用于小样本时一般推断效果较好. 由统计判决理论, 未知参数 θ 的估计 $d = \delta(x)$ 会有一些的损失, 其损失函数记为 $w(\theta, d)$. 而 $w(\theta, d)$ 是不可观测的, 所以对 $w(\theta, d)$ 应该作精度估计. 假设 γ 是损失函数 $w(\theta, d)$ 的一个精度估计, 根据文献[1]得到了新的损失函数

$$L(\theta; d, \gamma) = w(\theta, d) \gamma^{-1/2} + \gamma^{1/2},$$

这一新的损失函数把 $w(\theta, d)$ 与其精度估计 γ 结合起来, 得到 γ 关于 $L(\theta; d, \gamma)$ 的 Bayes 估计为 $\gamma_B(x)$, 其恰好是 θ 的 Bayes 估计 $\delta_B(x)$ 的后验损失, 即

$$\gamma_B(x) = E[w(\theta, \delta_B(x)) | x].$$

对于损失函数 $w(\theta, d)$ 的估计 $\gamma(x)$, 总希望其是保守估计, 从而不会低于平均损失, 即应当满足 $E_\theta[\gamma(x)] \geq R(\theta, \delta(x)) = E_\theta[w(\theta, \delta(x))]$. 因此给出未知参数 θ 所需要满足的一般条件是非常重要的.

众所周知, 正态和对数正态模型在经济、金融、管理、工程等学科都有着广泛应用. 如文献[2]指出

大多数统计分析和定量分析模型是以财务比率的正态分布为假设前提. 文献[3]基于集中投资策略的思想, 在股票价格服从正态分布的假定下, 凯利优化模型结合运用于股票投资实践中. 文献[4]则验证了一些金融资产的收益率近似服从正态分布或对数正态分布. 文献[5-8]分别讨论了一些常见分布在不同的损失函数下的 Bayes 统计推断问题, 得出了很多有效的结论. 最近笔者在文献[9]中看到关于正态分布的精度(方差参数的倒数)的共轭先验分布用的是伽马分布, 所以将这种观点应用于本文来讨论正态模型中尺度参数以及对数正态模型中形状参数的损失函数和风险函数的 Bayes 推断问题, 同时给出其损失函数和风险函数的 Bayes 估计为保守估计的一般条件, 并选取沪深 300 中的中国石化和鄂尔多斯股票的周收盘价数据作实证分析以支持本文的结论.

本文用到的伽马分布, 其概率密度为 $f(x; \alpha, \beta) = [\Gamma(\alpha)]^{-1} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$, $x > 0$, 其中参数 $\alpha > 0$, $\beta > 0$. 下文记为 $\Gamma(\alpha, \beta)$, 对应的逆伽马分布则记为 $\Pi(\alpha, \beta)$.

1 正态模型中尺度参数的 Bayes 估计

1.1 正态分布尺度参数的估计与后验分布

本文讨论的正态分布的密度表达式为

收稿日期: 2013-10-12

基金项目: 北京市属高等学校人才强教计划(201106206)资助项目.

通信作者: 徐美萍(1971-), 女, 山西太原人, 副教授, 博士, 主要从事统计推断方面的研究.

丁新月(1991-), 女, 山东淄博人, 硕士研究生, 主要从事统计推断方面的研究.

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

$$x \in \mathbf{R} \quad \mu \in \mathbf{R} \quad \sigma > 0. \quad (1)$$

假设其中的 μ 已知, 为简单计, 不妨设 $\mu = 0$. 令 $\theta = \sigma^2$, 并设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是来自 (1) 式的一组样本观测值, 则有似然函数

$$L(\theta | x) \propto \left(\frac{1}{\theta}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{t}{2\theta}\right\} \quad \theta > 0, \quad (2)$$

其中 $t = \sum_{i=1}^n x_i^2$. 由此可得 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = t/n$. 易知 t 为 θ 的充分完备统计量, 且有 $t/\theta \sim \chi^2(n)$, 因而 $E(t) = n\theta$, $\text{Var}(t) = 2n\theta^2$, $E(\hat{\theta}) = \theta$, $\text{Var}(\hat{\theta}) = 2\theta^2/n$. 可见 $\hat{\theta}$ 是 θ 的 1 个一致有效无偏估计.

依据文献 [9], 让 θ 取 (2) 式的共轭先验分布 $\Pi(\alpha, \lambda)$, 即

$$\pi(\theta) \propto (1/\theta)^{\alpha+1} \exp\{-\lambda/\theta\} \quad \theta > 0,$$

其中 $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, 则 θ 的后验分布为

$$h(\theta | x) \propto (1/\theta)^{n/2+\alpha+1} \exp\{-(t/2 + \lambda)/\theta\}, \quad \theta > 0,$$

即 $\Pi(n/2 + \alpha, t/2 + \lambda)$ [10].

1.2 损失函数的 Bayes 估计

将损出函数 $w(\theta, d)$ 取为 $(\theta - d)^2$, 其中 $d = \delta(x)$ 是未知参数 θ 的估计, 则 θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(x) = E(\theta | x) = \frac{t/2 + \lambda}{n/2 + \alpha - 1} = \frac{t}{n} \left(\frac{1 + 2\lambda/t}{1 + 2(\alpha - 1)/n} \right), \quad (3)$$

其中 $n/2 + \alpha > 1$. 从 (3) 式可以看出 $\delta_B(x)$ 是其最大似然估计 $\hat{\theta} = t/n$ 的一个修正, 这是因为它增加了未知参数 θ 的先验信息.

设 $w(\theta, d)$ 的精度估计为 γ , 则它关于损失函数 $L(\theta; d, \gamma) = w(\theta, d) \gamma^{-1/2} + \gamma^{1/2}$ 的 Bayes 估计为

$$\gamma_B(x) = E[w(\theta, \delta_B(x)) | x] = \text{Var}(\theta | x) = \frac{2(t + 2\lambda)^2}{[n + 2(\alpha - 1)]^2 [n + 2(\alpha - 2)]}, \quad (4)$$

其中 $n/2 + \alpha > 2$, 下文均假设满足这一条件.

1.3 风险函数的 Bayes 估计

由 (3) 式及 $E(t) = n\theta$, $\text{Var}(t) = 2n\theta^2$ 可以得到 θ 的 Bayes 估计 $\delta_B(x)$ 的风险函数为

$$R(\theta, \delta_B) = E_\theta[w(\theta, \delta_B(x))] = E_\theta\left(\frac{t + 2\lambda}{n + 2(\alpha - 1)} - \theta\right)^2 = \frac{2n\theta^2 + 4[\lambda - (\alpha - 1)\theta]^2}{[n + 2(\alpha - 1)]^2}, \quad (5)$$

从 (5) 式可看出 $R(\theta, \delta_B)$ 是未知参数 θ 的函数, 所以

可对它进行估计. 又由于 $R(\theta, \delta_B)$ 是 $w(\theta, \delta_B(x))$ 的均值, 故还可以把 $R(\theta, \delta_B(x))$ 的估计作为 $w(\theta, \delta_B(x))$ 的估计. 利用 (3) 式和 (4) 式, 容易得到在平方损失下 $R(\theta, \delta_B(x))$ 的 Bayes 估计为

$$\varphi(\delta_B) = E(R(\theta, \delta_B) | x) = \frac{1}{[n + 2(\alpha - 1)]^3} \cdot \left\{ \frac{(t + 2\lambda)^2 [2n + 4(\alpha - 1)^2]}{n + 2(\alpha - 2)} + 4(n - 2\alpha + 2)\lambda^2 - 8\lambda t(\alpha - 1) \right\}. \quad (6)$$

2 对数正态模型中形状参数的 Bayes 估计

讨论的对数正态分布的密度表达式为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x) - \mu]^2}{2\sigma^2}\right\},$$

$$x > 0 \quad \sigma > 0, \quad (7)$$

类似于 1.1, 假设 $\mu = 0$ 并令 $\theta = \sigma^2$. 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是来自 (7) 式的一组样本观测值, 则有似然函数

$$L(\theta | x) \propto \left(\frac{1}{\theta}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{t}{2\theta}\right\} \quad \theta > 0, \quad (8)$$

其中 $t = \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2$. 由此可得 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = t/n$.

类似于正态分布尺度参数的情形, 让 θ 取 (8) 式的共轭先验分布 $\Pi(\alpha, \lambda)$, 则 θ 的后验分布为 $\Pi(n/2 + \alpha, t/2 + \lambda)$. 接下来关于 θ 的损失函数和风险函数的 Bayes 估计分别同 1.2 和 1.3, 此处不再赘述.

3 $\gamma_B(x)$ 与 $\varphi(\delta_B)$ 为保守估计的条件

定理 1 对给定的 $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\gamma_B(x)$ 为保守估计的充要条件是 θ 满足不等式

$$\frac{(n\theta + 2\lambda)^2}{n + 2(\alpha - 2)} \geq n\theta^2 \left(1 - \frac{2}{n + 2(\alpha - 2)}\right) + 2[\lambda - (\alpha - 1)\theta]^2. \quad (9)$$

证 由 (4) 式得

$$E_\theta[\gamma_B(x)] = \frac{2[2n\theta^2 + (n\theta + 2\lambda)^2]}{[n + 2(\alpha - 1)]^2 [n + 2(\alpha - 2)]}$$

注意到保守估计的定义及 (5) 式, 要使 $E_\theta[\gamma_B(x)] \geq R(\theta, \delta_B)$, 当且仅当

$$\frac{2n\theta^2 + (n\theta + 2\lambda)^2}{n + 2(\alpha - 2)} \geq [2(\alpha - 1)^2 + n]\theta^2 -$$

$$4\lambda(\alpha - 1)\theta + 2\lambda^2,$$

移项整理得(9) 式.

定理 2 对给定的 $\alpha > 0 \lambda > 0 \varphi(\delta_B)$ 为保守估计的充要条件是 θ 满足

$$\frac{[n + 2(\alpha - 1)]^2 [2n\theta^2 + (n\theta + 2\lambda)^2]}{[n + 2(\alpha - 1)][n + 2(\alpha - 2)]} \geq \frac{4\lambda(\alpha - 1)n\theta - 2(n - 2\alpha + 2)\lambda^2}{n + 2(\alpha - 1)} + n\theta^2 + 2[\lambda - (\alpha - 1)\theta]^2. \quad (10)$$

证 由(6) 式得

$$E_\theta(\varphi(\delta_B)) = \frac{1}{[n + 2(\alpha - 1)]^3} \cdot \left\{ \frac{2n + 4(\alpha - 1)^2}{n + 2(\alpha - 2)} [2n\theta^2 + (n\theta + 2\lambda)^2] + 4(n - 2\alpha + 2)\lambda^2 - 8\lambda(\alpha - 1)n\theta \right\}.$$

要使 $E_\theta(\varphi(\delta_B)) \geq R(\theta, \delta_B)$, 当且仅当

$$\frac{1}{n + 2(\alpha - 1)} \left\{ \frac{2n + 4(\alpha - 1)^2}{n + 2(\alpha - 2)} [2n\theta^2 + (n\theta + 2\lambda)^2] + 4(n - 2\alpha + 2)\lambda^2 - 8\lambda(\alpha - 1)n\theta \right\} \geq 2n\theta^2 + 4[\lambda - (\alpha - 1)\theta]^2,$$

移项整理即得(10) 式.

通过分析先验分布取特殊值(如 $\alpha = 1, \lambda > 0$) 时的情形,发现 $\gamma_B(x)$ 与 $\varphi(\delta_B)$ 作为平方损失函数 $w(\theta, d)$ 的精度估计各有优势. 在实际分析中,可以根

据需要及具体的运算结果,同时给合 θ 的先验信息,选取其中之一作为 $w(\theta, d)$ 的精度估计. 如当 θ 的可能取值较大时,可以取 $\gamma_B(x)$ 作为 $w(\theta, d)$ 的精度估计; 而样本容量较大,先验信息显示 θ 的可能取值较小,则选取 $\varphi(\delta_B)$ 会效果更好. 下面将进行实证分析来说明本文的结论及先验分布假设的合理性.

4 实证分析

本文数据来源于锐思金融研究数据库. 分别选取沪深 300 中的中国石化和鄂尔多斯股票的周收盘价数据,截取了 2008 年 1 月至 2012 年 12 月各 257 个数据,用收益率公式 $r_t = (p_t - p_{t-1}) / p_{t-1}$ 计算后分别得到 256 个收益率数据,其中 p_t 表示第 t 周的收盘价, r_t 表示第 t 周的收益率. 通过比对中国石化股票收益率的经验分布函数与正态分布的函数图发现它们的拟合度较高(见图 1),进一步做 KS 检验,结果显示它们之间的最大距离为 0.081 4,相伴概率为 0.067,可以认为其服从正态分布. 对于鄂尔多斯股票数据截取了正的收益率,最终得到 123 个数据,其经验分布函数与对数正态分布函数的拟合度很高(见图 2),KS 检验结果显示它们之间的最大距离为 0.067 4,相伴概率为 0.630 7,可以认为其服从对数正态分布.

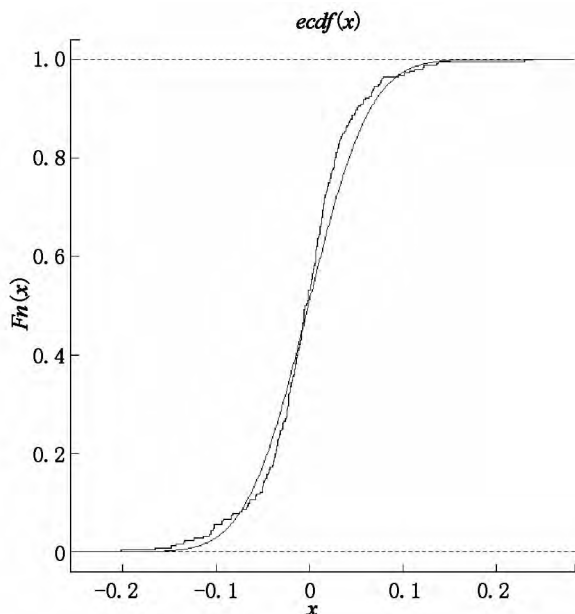


图 1 中国石化数据的经验分布与正态分布比较

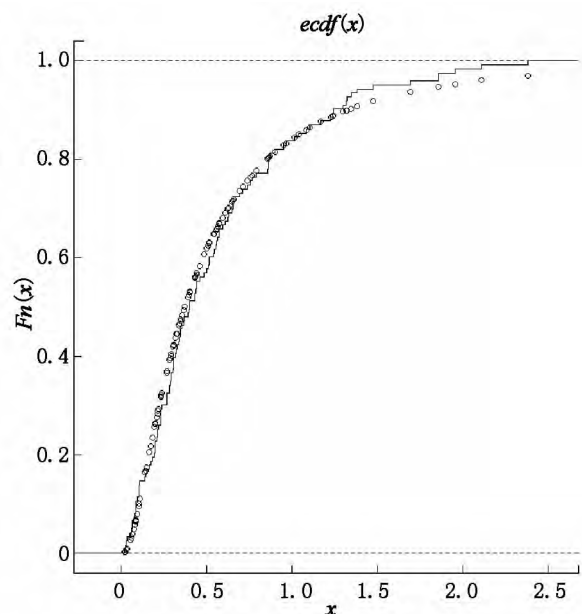


图 2 鄂尔多斯数据的经验分布与对数正态分布比较

然后,分别对上述 2 组数据有重复地自助抽样 1 000 次,每次抽取容量分别为 256 和 123 的样本,计

算 θ 的最大似然估计,并把它作为 θ 的一组样本观测值. 以中国石化股票数据为例,得到 θ 的样本均值

及样本方差分别为 0.002 7 和 1.302×10^{-7} , 由于假定 θ 取先验分布 $\Pi(\alpha, \lambda)$, 所以 $E(\theta) = \lambda/(\alpha - 1)$, $\text{Var}(\theta) = \lambda^2/[(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)]$, 由矩估计法可解得 $\alpha = 57.129$, $\lambda = 0.1504$, 再做 KS 检验, 结果表明 θ 的样本观测值与先验分布 $\Pi(\alpha, \lambda)$ 之间的最大距离为 0.03, 相伴概率为 0.6914, 不能拒绝 θ 服从 $\Pi(\alpha, \lambda)$ 分布. 对于鄂尔多斯股票数据也有相同结论. 由此验证了本文假设的合理性. 易算得此时 $\gamma_B(x)$ 与 $\varphi(\delta_B)$ 均为平方损失函数的保守估计.

5 参考文献

- [1] Rukhin A L. Estimated loss and admissible loss estimators [J]. Proceedings of Forth Purdue Symposium on Decision Theory, 1987(1): 365-375.
- [2] 薛跃, 韩之俊, 温素彬. 上市公司财务比率正态分布特性的实证分析 [J]. 管理工程学报, 2005, 19(2): 143-145.
- [3] 陆士杰, 杨朝军. 基于股价服从对数正态分布的凯利投资策略 [J]. 经济数学, 2013, 30(3): 40-45.
- [4] 王艳彩, 高岳林. 贝叶斯推断下的条件风险价值研究 [J]. 河南科技大学学报: 自然科学版, 2012, 33(6): 91-94.
- [5] 徐美萍, 丁新月, 于健. Rayleigh 分布参数估计的损失函数和风险函数的 Bayes 推断 [J]. 数学的实践与认识, 2013, 42(21): 151-156.
- [6] 徐美萍, 段景辉. Laplace 分布参数估计的损失函数和风险函数的 Bayes 推断 [J]. 统计与决策, 2010(1): 13-14.
- [7] 王琪, 李玮. 一类新的损失函数下负二项分布模型的 Bayes 可靠性分析 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(4): 384-387.
- [8] 韦程东, 胡莎莎, 韦师, 等. Pareto 分布参数估计的损失函数和风险函数的 Bayes 推断 [J]. 统计与决策, 2011(14): 158-159.
- [9] Ruppert D. Statistics and data analysis for financial engineering [M]. New York: Springer, 2011.
- [10] 范金城, 吴可法. 统计推断导引 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.

The Bayes Inference for the Loss and Risk Functions of Parameters in Normal and Lognormal Distribution

DING Xin-yue, XU Mei-ping

(School of Science, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China)

Abstract: Under the conjugate prior distribution, Bayes estimates and conservative conditions of the loss and risk functions of scale parameter in normal model and shape parameter in lognormal model are given, and the rationalities of these conditions are discussed in the paper. Then the data respectively on weekly closed prices of China Petrochemical and Ordos stocks in CSI 300 are analyzed to support the conclusion.

Key words: conjugate prior distribution; Bayes estimation; conservative estimates; loss function; risk function

(责任编辑: 曾剑锋)