第 38 卷 第 2 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 2
2014 年 3 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Mar. 2014

文章编号:1000-5862(2014)02-0111-08

多级评分认知诊断测验蓝图的设计——根树型结构

丁树良,汪文义,罗 芬
(江西师范大学计算机信息工程学院,江西 南昌 330022)

摘要:在某种给定的评分方式下,假设属性之间没有补偿作用,讨论多级评分认知诊断测验蓝图设计问题. 根据图论,将 J. P. Leighton 等定义的线型、发散型、无结构型属性层级结构归结为根树型,构造出相应的完备测验 Q 阵,即是使知识状态与期望反应模式一一对应,且列数最少的测验 Q 阵. 完备 Q 矩阵均受到测验 Q 阵的秩的制约.

关键词:多级评分;认知诊断;测验蓝图设计;根树型;完备 Q 阵

中图分类号:B 841.7;TP 301.6 **文献标志码**:A

0 引言

认知诊断测验和传统测验不同,它关注的不是被试的总分或能力值,而是被试的知识状态(KS)即属性掌握情况,并且对未掌握的属性进行补救,因此它对促进发展的作用更大. 认知诊断通过认知诊断模型(CDM)估计被试的知识结构. CDM 是分析测验数据的工具,在认知模型确定条件下,它在认知诊断中的重要性是不言而喻的;而要充分发挥 CDM 的作用,项目开发的重要性也是毫无疑义的;但是为了探查所有被试的知识结构,仅仅有精心打造的项目还不够,还必须斟酌项目的搭配,即研究测验的编制. 事实上测验蓝图的编制,即测验的设计十分重要,因为测验蓝图直接关系到测验是否能够为每一个被试提供充分详细的信息. 如要诊断小学生对分数加减运算的掌握情况,可以编制一份测验,其中每个项目都涉及到异分母的带分数加减运算,采用 0-1 评分,答对给 1 分,否则给 0 分;这些试题(这份试卷)仅仅能区分完全掌握与不完全掌握所测知识两类被试,而无法知晓被试未完全掌握所有属性的具体原因. 事实上,这些未完全掌握所有属性的被试的原因可能千差万别,因人而异. 因此,对于诊断被试认知缺陷的目的而言,这不是一份好的试卷. 如果在试卷中,既有异分母的 2 个真分数相加减的项目,又有求 2 个正整数的最大公约数、最小公倍数的项目及化整数为分数的项目等,则对那些未完全掌握分数加减运算的被试,可以考查他们到底在哪些环节上没有掌握好,然后补救. 这好比体育训练中将复杂动作分解、放慢镜头,它比只看连贯动作的诊断信息更丰富. 然而评分方式也可以影响诊断信息的质量. 一般认为,同一个项目依照某一规则进行多级评分,或许可以提供比 0-1 评分更多的信息[1],因为多级评分可以指示部分掌握的情况,而不像 0-1 评分那样将被试粗糙地分成完全掌握和未完全掌握的两类.

如果认知诊断的范围包含 K 个属性,KS 一般由一个 K 维 0-1 向量表示,其中第 j 个分量等于 1,表示该被试掌握了第 j 个测查的属性;而如果采用 0-1 评分,观察反应模式(ORP)的维数由测验项目数(比如说,m)确定. 通常 K 和 m 不相等,且 $K < m$.

本文要在多级评分条件下讨论认知诊断测验蓝图的设计问题. 和 0-1 评分情形一样,希望找到一个测验蓝图,在给定的多级评分规则下,使期望反应模式(ERP)的集合和 KS 的集合一一对应. 之所以要求一一对应,是因为认知诊断的目的是根据被试在项目上和测验上的反应或者反应模式通过 CDM,将他们在知识状态空间定位. 抽象一点来说,CDM 的作用就是 ORP 集合到 KS 集合之间的映射(不妨记

收稿日期:2014-01-09
基金项目:国家自然科学基金(30860084,31160203,31100756,31360237,31300876),国家社会科学基金(12BYY055,13BYY087)和江西省教育厅科技计划(GJJ3207,GJJ13226,GJJ13227,GJJ13208,GJJ13209)资助项目.
作者简介:丁树良(1949-),男,江西樟树人,教授,博士生导师,主要从事计算机辅助教学及教育和心理测量方面的研究.

之为 F),然而 ORP 这个向量的维数一般超过 KS 的维数,映射 F 必须降维;而降维会损失一些信息.一般地,解决这个问题有如下一个途径:大部分认知诊断中都涉及属性和项目关联矩阵,即 Q 矩阵;而 KS 和测验 Q 矩阵作用,可以计算非补偿条件下的 ERP[2-3],即测验 Q 矩阵是 KS 到 ERP 的映射.所谓 ERP 即在所有测验项目上的作答反应既不猜测,也不失误所获得的反应模式.ERP 和 ORP 的维数相同,所以建立 ORP 到 ERP 的映射有利于防止因为降维而导致的信息损失.但是仅仅建立 ORP 到 ERP 的映射还不能完成认知诊断的任务,还必须建立 ERP 到 KS 的映射.因此,如果能够设计测验 Q 矩阵使之成为 KS 到 ERP 之间的双射,那么从 ORP 到 ERP 的映射和从 ERP 到 KS 的双射的复合映射(F),就是 ORP 到 KS 的映射.所以构造测验 Q 矩阵使之成为 ERP 和 KS 之间的双射是提高认知诊断分类准确性的有效途径.

许多的认知诊断模型通过 ERP 建立 ORP 和 KS 之间的映射.有人认为,ERP 是认知诊断的分类中心[4].特别地,孙佳楠等[5]的认知诊断模型—GDD 和 Sun Jianan 等[6]的 GDD-P,明确分解成 2 步:(i)给定 ORP,寻找与之最匹配的 ERP;(ii)通过 Q 矩阵的设计,建立 ERP 和 KS 的一一对应.能够使 ERP 和 KS 一一对应的测验 Q 矩阵称为充分必要 Q 矩阵[7],当这个充分必要 Q 矩阵包含的不同的列数最少时,称之为完备 Q 矩阵(perfect Q matrix),并且使用潜在 Q 矩阵(Q_p)、学生 Q 矩阵(Q_s)、测验 Q 矩阵(Q_t)等术语以区分不同的 Q 矩阵[8-9],这里将 K. K. Tatsuoka[10-11] 关于 Q 矩阵是属性和项目的关联矩阵的定义,扩展到包含学生 Q 阵(Q_s)的情形.事实上,Q_s 是属性和被试的关联矩阵而不是属性与项目的关联矩阵.

以下先罗列一点在属性之间的作用是非补偿并且给定属性及其层级的条件下,关于 0-1 评分和多级评分的认知诊断测验蓝图的设计已有的结论.

定理 1 在 0-1 评分条件下,测验蓝图中包含可达矩阵当且仅当知识状态与理想反应模式一一对应[7,9,12].

定理 2 给定测验 Q 阵 Q_t,学生 Q 矩阵 Q_s 中任取一列 α,若期望反应的评分方式是 $\alpha^{\mathrm{T}}Q_t$,则只要 Q_t 满行秩行满秩,KS 集合与 ERP 集合之间就建立了入射[13].

定理 2 的评分方式是掌握项目中一个属性,期望得分便多一分的记分方式[10,14-15].下面给出比定理 2 更强的定理 3.

定理 3 在定理 2 的记分方式之下,如果矩阵 Q_t 的秩(rank)等于属性的个数,则 KS 与 ERP 是一一对应的[8].

这个重要的结论的特殊情况是 Q_t 等于可达矩阵.这时定理 3 的证明并不复杂:不失一般性,可设可达矩阵是对角线元素等于 1 的上三角矩阵,即可达矩阵是满秩矩阵.用反证法,如果存在 2 个不同的知识状态 x,y 的转置乘以 Q_t(乘积矩阵的秩等于 2),使得得到 2 个相同的分数向量(它们的秩等于 1),这是不可能的.

但是定理 2 和定理 3 只是在多级评分方式下对于非补偿的认知过程给出了 ERP 与 KS 一一对应的一个充分条件,存在反例,说明定理 3 不是必要条件[8].另外,下面证明的结论中就有这样的例子,如若属性满足线性层级结构[16],在定理 2 的评分方式下,使 ERP 与 KS 一一对应的充分必要条件是测验 Q 阵为 $Q=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,即只需要一个项目且这个项目包含欲测领域中的所有属性即可.

讨论使 ERP 与 KS 一一对应的充分必要条件比仅仅得到充分条件显然更有意义,这不仅仅是数学上的一种美,而且在应用中会带来很多方便.因为充分条件或许有一些多余,故充分条件有时显得不简洁.如上述的关于线性层级结构下的测验蓝图的设计的合理性一旦得到证明,只要采用这种记分方式则测验的项目数可以很少而获得的诊断信息却很丰富.这便是既寻找充分性条件又要追寻必要性条件的一个理由,也是为什么找到使 KS 和 ERP 一一对应的映射(充分必要 Q 矩阵)以后,还要继续寻找完备 Q 矩阵的原因.

1 基本属性层级的重新分类和期望得分的约定

为证明方便起见,从图论出发,对 J. P. Leighton 等[16]给出的属性的层级关系的类型重新划分,并且对记分方式给出一些基本的约定.熟知,属性层级关系是自反、反对称、传递的,即偏序关系.

J. P. Leighton 等[16]对基本的属性层级作了一个

划分，认为有 4 类层级：线性型（Linear），发散型（Divergent），收敛型（convergent）以及无结构型（unstructured）. 然而，国外文献常常讨论一种属性之间互不为先决属性的层级结构，即独立型结构（independent），其他更复杂的层级关系可以由这上面 5 种基本层级结构进行组合. 但是由图论观点[16]知，J. P. Leighton 等所说的树型、发散型和无结构型均是树型. 若一个有向图在不考虑边的方向时是一棵树，则这个有向图称为有向树. 一棵有向树若恰有 1 个结点的入度为 0，其他所有结点的入度都为 1，则称为根树. 入度为 0 的结点称为根，出度为 0 的结点称为叶，出度不为 0 的结点称为分支点或内点. 线性型、发散型与无结构型都可以看成是根树（rooted tree）结构. 对于根树型层级结构，本文讨论在特定评分方式下，包含列数最少且保证期望反应模式和知识状态一一对应的测验 Q 阵（称之为完备 Q 矩）的构造问题.

对于期望得分的计分方式，给出一个基本约定（下文中称为记分方式的约定）：设进行认知诊断的领域中包含 K 个属性. 以下均是对非补偿连接的认知加工过程进行讨论. 除非另有声明，否则约定期望得分的计分方式为：每掌握测验项目中一个属性，则期望得分增加 1 分，即假设被试 KS 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在测验 Q 阵（Q_t）下的 ERP 为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t$，亦即对 Q_t 中第 j 个项目（即 Q_t 中第 j 列 $\boldsymbol{Q}_j$），KS 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的被试的期望得分为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j$.

2　根树型层级对应的完备 Q 矩阵

对于根树结构 T，设 T 有 h 片树叶（入度为 1 而出度为 0 的结点）. 注意到至少有 2 个结点的根树，其根结点到任一片树叶的路长至少为 1，所以 T 至少有 $h+1$ 个结点，结点对应着认知诊断中的属性. 若 T 对应的潜在 Q 阵 Q_p 为 $K\times N$ 阶矩阵，Q_s 为 $K\times(N+1)$ 阶矩阵. 又设测验 Q 阵（Q_t）为 $K\times m$ 阵，下文要证明 m 可以不超过 h（$m\leqslant h$），使期望反应模式与知识状态一一对应.

（Ⅰ）线性型

定理 4　若属性层级为线性结构，完备 Q 矩阵为 $K\times 1$ 矩阵，且所有元素均为 1. 显然 $rk(Q)=1$.

证　记 $\boldsymbol{d}_0^{\mathrm{T}}=(0,0,\cdots,0)$ 为零向量，$\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}=(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$，它的前 i 个分量为 1，后 $K-i$ 个分量为 0，$i=1,2,\cdots,K$，则对于线性结构，包含且仅包含 $\boldsymbol{d}_0$，$\boldsymbol{d}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{d}_K$ 这 $K+1$ 个不同的 KS. 记 $\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}=(1,\cdots,1)=\boldsymbol{d}_K^{\mathrm{T}}$，则显然有 $\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{t=i}$，$i=0,1,\cdots,K$. 故不同的 KS 其 ERP 不同；由于所测领域内的 KS 的个数为 $K+1$，而不同的 ERP 也恰为 $K+1$ 个，这是一个一一对应.

反之，如果不包含全 1 列，即 $\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\neq(1,1,\cdots,1)$，则 $\boldsymbol{d}_K$ 和 $\boldsymbol{d}_{K-1}$ 在 Q_t 下的 ERP 相同，即存在不同的 KS 对应同一个 ERP.

（Ⅱ）更复杂的根树型例子

为了讨论更复杂的根树型结构对应的完备 Q 矩阵的结构，先看一个例子，以加强对下述定理证明部分的直观认识.

例 1　如图 1 ~ 图 3，它们相当于 J. P. Leighton 等[16]无结构型和发散型.

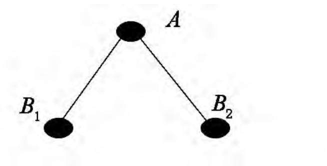

图 1　无结构型 1

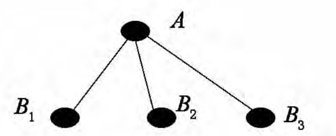

图 2　无结构型 2

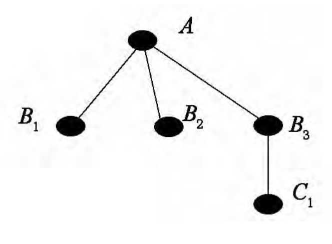

图 3　发散型

对于上述 3 个图形，构造从根结点到各个叶结点的路径，构成基本完备 Q 矩阵，用 $Q_t^{(*)}$ 表示，其他完备 Q 矩阵可以通过特殊线性变换得到.

对图 1，可达阵为 $\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}_p^{(1)}=$

$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$,令 $Q_t^{(*)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$,这个测验 Q 矩阵是充分必要 Q 矩阵并且包含的列数最少(因为显然只包含 1 列的矩阵不可能是图 1 对应的充分必要 Q 矩阵). 易知,$Q_t^{(1)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}$或 $Q_t^{(2)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$就可以使 ERP 与 KS 一一对应;这时这 2 个测验 Q 矩阵都可以由 $Q_t^{(*)}$ "生成",如由 $Q_t^{(*)}$ 的第 1、2 列相加作为 Q 矩阵第 1 列,可以得到 $Q_t^{(2)}$. 可见 $Q_t^{(*)}$ 是"基本完备 Q 矩阵",即其他完备 Q 矩阵可以通过特殊的线性变换导出. 基本完备 Q 矩阵的列一定来自可达阵,只需要选出相应列并重新编排序号就可组成基本完备 Q 矩阵. 当然可以认为由 $Q_t^{(1)}$,$Q_t^{(2)}$ 作为子矩阵合并成为"大"矩阵以后通过"缩减算法"(或再通过列的交换后)便可导出"基本完备 Q 矩阵".

图 2 是图 1 的基础上增加一片树叶 B_3,且 A 到 B_3的路上仅有 A 和 B_3,这时,可达阵为

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_p^{(2)}=$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&1&1&1\end{bmatrix},令\ Q_t^{(*)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

可成为完备 Q 阵,而且是"基本完备 Q 矩阵".

可取测验蓝图为 $Q_t^{(3)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$,或 $Q_t^{(4)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$或 $Q_t^{(5)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$均可使期望反应模式与知识状态一一对应,并且如果从 $Q_t^{(3)}$,$Q_t^{(4)}$,$Q_t^{(5)}$ 中删除任一列,均可以使几个知识状态对应同一个期望反应模式. $\boldsymbol{R}_1$是 $\boldsymbol{R}_2$的子矩阵,$Q_t^{(j)}$ ($j=3,4,5$) 以某个 $Q_t^{(3)}$ ($i=1,2$) 为子矩阵,而 $Q_p^{(1)}$ 是 $Q_p^{(2)}$ 的子矩阵. 图 3 可以看成是在图 2 的基础上增加一个结点 C_1,这时 $\boldsymbol{R}_2$是 $\boldsymbol{R}_3$的子矩阵,而 $Q_p^{(2)}$ 是 $Q_p^{(a)}$ 的子矩阵,$\boldsymbol{R}_2$比 $\boldsymbol{R}_3$少 1 行 1 列,但是由 $\boldsymbol{R}_3$扩张出来的列比由 $\boldsymbol{R}_2$扩张出来的多 4 列. 这 4 列与 $\boldsymbol{R}_2$的列数相关. 另一方面,图 3 还可以看成是在图 1 基础上增加一片叶 C_1,但 A 到叶片 C_1的路上不止 2 个结点,这时

$$\boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{Q}_t^{(*)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_p^{(3)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}=$$

$$(\boldsymbol{R}_3 \mid \boldsymbol{Q}_0^{(3)}),$$

注意 $Q_p^{(3)}$ 和 $Q_p^{(1)}$ 相比,不仅行数增多,列数也增多. $Q_p^{(3)}$ 是由 $\boldsymbol{R}_3$及 $\boldsymbol{R}_3$扩张出来的部分 $Q_0^{(3)}$,请注意,图 1 中并没有图 3 中由 A 到 C_1这 1 条路. 由 R_3扩张导出的 $Q_p^{(3)}$ 的最下面 2 行(和图 1 相比,对应着增加的属性 B_3和 C_1)的构成和由 $\boldsymbol{R}_1$导出的 $Q_p^{(1)}$ 的构成之间的异同,对以下的证明起重要作用. 下面定理的证明思路是对叶结点数做数学归纳. 数学归纳时要根据可达矩阵使用扩张算法导出 Q_p和 Q_s.

定理 5 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是知识状态,Q_t 为测验 Q 阵,属性之间无补偿作用,又设期望反应模式(ERP)等于 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t$,则(i) 根树型结构对应的基本完备 Q 阵(记为 Q_B)的列对应于根结点到各个叶结点的路径;(ii) 由基本 Q 阵的某些列加到另外 1 列以后所得的仍然是完备 Q 阵,这里的"加"是指布尔加,并要求导出的布尔矩阵的秩等于叶结点数.

证 先证(i),即 Q_B 是完备 Q 阵. 先证明 Q_B 可以使得 KS 和 ERP 一一对应,即是充分必要 Q 矩阵. 对叶结点数作数学归纳. 设根结点为 u,叶结点为 $v_1,v_2,\cdots,v_m$.

当 $m=1$ 时,根树对应于 J. P. Leighton 等[16] 所说的线性型. 这时 $Q_B^{\mathrm{T}}=(1,1,\cdots,1)$,它是完备 Q 阵,当然是充分必要 Q 矩阵.

设 $m=k$ 时结论成立,这时对应的可达阵记为 $\boldsymbol{R}_1$,由 $\boldsymbol{R}_1$ 通过扩张算法得到潜在 Q 阵,记为 Q_1. 这时,$Q_1^{\mathrm{T}}Q_B$ 各行互异,且 Q_1 第 1 行元素均为 1,即 Q_1^{T} 第 1 列元素全为 1. 当 $m=k+1$ 时,设新增加的叶结

点为 v，如果 u、v 之间路长 l 等于 1，则相应的可达阵（记为 $\boldsymbol{R}_2$）为

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{e}_1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}=(1,0,0,\cdots,0).$$

对 R_2 施用扩张算法，得到潜在 Q 阵记为 Q_2，Q_2 构造如下：按列剖分 $\boldsymbol{R}_1=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n)$，注意到 $\boldsymbol{R}_1$ 的第 1 行元素均为 1 及 $\boldsymbol{e}_1$ 的定义，知 $\forall j,\boldsymbol{r}_j\vee\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{r}_j$，这里"$\vee$"为布尔加运算. 按列剖分 $\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_s)$，也有 $\forall j,\boldsymbol{q}_j\vee\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{q}_j$，又有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_j\\0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_j\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_j\\0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_j\\1\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{Q}_2=\left(\begin{matrix}\boldsymbol{Q}_1\\0\end{matrix}\middle|\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_n\\1\end{pmatrix}\right)\middle|\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_{i_1}\\1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_{i_h}\\1\end{pmatrix}\right)\right)=$$

$$\left(\begin{matrix}\boldsymbol{Q}_1\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{R}_1\\(1\cdots1)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{Q}_0\\(1\cdots1)\end{matrix}\right)\triangleq\left(\begin{matrix}\boldsymbol{Q}_1\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{R}_1\\\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{Q}_0\\\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\end{matrix}\right).$$

注意 Q_2 中所有列均不相等，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_0\\\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1\\0\end{pmatrix}$ 中的列与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\1\end{pmatrix}$ 作布尔加以后获得的. 易知 $\boldsymbol{Q}_0$ 是 $\boldsymbol{Q}_1$ 的 1 个子矩阵，其中 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}=(1,1,\cdots,1)$ 是元素全为 1 的行向量，其维数由上下文确定.

再设 $\boldsymbol{R}_1$ 前 k 列表示 $m=k$ 时的完备 Q 阵，记它们为 $\boldsymbol{Q}_B=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_k)$，它对应于根结点 u 到叶结点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 之间的路径.

于是，由归纳假设，有 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_k)=\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B$ 中任意 2 行均不相同.

$$\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_k & \boldsymbol{e}_1\\ 0,\cdots,0 & 1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} & 0\\ \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_B & \boldsymbol{e}_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B & \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B & \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B & \boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{d}\end{pmatrix}.$$

注意 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1$ 等于 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}$ 第 1 列，即 $\boldsymbol{Q}_1$ 第 1 行的转置，故 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{d}$，同样可知 $\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{d},\boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{d}$.

$\boldsymbol{R}_1$ 是 $\boldsymbol{Q}_1$ 的子阵，故 $\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B$ 是 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B$ 的子阵；依归纳法假设，$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B$ 中各行元素均不相等.（$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B$，$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1$）的最后 1 个元素等于 1，而（$\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B,\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{d}$）最后 1 个元素等于 2；由此可知

$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B & \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B & \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{d}\end{pmatrix}$ 任 2 行均不相等；同理可知，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B & \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B & \boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{d}\end{pmatrix}$ 任 2 行也不相等；往证 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B & \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B & \boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{d}\end{pmatrix}$ 任 2 行均不相等. 这是因为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_B$ 中 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}$ 的子矩阵，且 $\boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}$ 没有交集，由于 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B$ 任 2 行均不相等，故 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B\\\boldsymbol{Q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_B\end{bmatrix}$ 中任意 2 行均不相等.

这就证明了当 $m=k+1$ 且 u、v 之间路长等于 1 时，结论成立；若 $m=k+1$ 且 u、v 之间路长等于 l（$l\leqslant 2$）时，结论成立，往证 u、v 之间路长等于 $l+1$ 时结论也成立. 注意到这时可达阵

$$\boldsymbol{R}_2=\left(\begin{matrix}\boldsymbol{R}_1\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{T}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\boldsymbol{R}_1\\0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{T}\end{matrix}\right),$$

$\otimes$ 是矩阵 Kronecher 积，$\boldsymbol{T}$ 为 0-1 上三角阵，按列剖分，$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_l,\boldsymbol{t}_{l+1})$.

记由 $\boldsymbol{R}_2$ 经扩张算法导出潜在 Q 阵为 Q_2，注意到扩张算法的规则，知 $\boldsymbol{R}_2$ 中 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1\\0\end{pmatrix}$ 可以扩张出 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_3\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1\\0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{T}\end{pmatrix}$ 可以扩张出一部分向量，任取 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1\\0\end{pmatrix}$ 中 1 列 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{T}\end{pmatrix}$ 可以扩张出 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{t}_1 & \boldsymbol{t}_2 & \cdots & \boldsymbol{t}_l & \boldsymbol{t}_{l+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{T}\end{pmatrix}$.

按列剖分 $\boldsymbol{R}_1=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n)$，注意到 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1\\0\end{pmatrix}$ 第 1 列 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1\\0\end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\0\end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1\\0\end{pmatrix}$ 与（$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{e}_1$）扩张后不应增加（$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{r}_1$），从而扩张出 $\left(\begin{matrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{r}_2\\\boldsymbol{T}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\cdots\\\cdots\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{e}_n\\\boldsymbol{T}\end{matrix}\right)$.

而（$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{e}_1$）中每 1 列又可以和 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_3\\0\end{pmatrix}$ 中的列作布尔加，只要导出以前不存在的列便扩张了 1 个新列，记这些新列构成的矩阵为 $Q_4=\left(\begin{matrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{q}_{i_1}\\\boldsymbol{Q}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\cdots\\\cdots\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{q}_{i_s}\\\boldsymbol{T}\end{matrix}\right)$，其中（$\boldsymbol{q}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{q}_{i_s}$）是 Q_3 的子矩阵且和 R_1 中列均不相同；故 Q_2 可以表示为

$$Q_2=\left[\begin{matrix}R_1 & Q_3\\ 0 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{T}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{r}_1\cdots\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{r}_n\\\boldsymbol{T}\cdots\boldsymbol{T}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{q}_{i_1}\cdots\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{q}_{i_s}\\\boldsymbol{T}\cdots\boldsymbol{T}\end{matrix}\right].$$

记 $Q_{B_1}=\begin{pmatrix} Q_B & e_1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$,

$$Q_2^{\mathrm{T}}Q_{B_1}=\begin{bmatrix} R_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ Q_3^{\mathrm{T}} & 0 \\ d^{\mathrm{T}}\otimes e_1^{\mathrm{T}} & T^{\mathrm{T}} \\ d^{\mathrm{T}}\otimes r_1^{\mathrm{T}} & T^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots \\ d^{\mathrm{T}}\otimes r_n^{\mathrm{T}} & T^{\mathrm{T}} \\ d^{\mathrm{T}}\otimes q_{i_1}^{\mathrm{T}} & T^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots \\ d^{\mathrm{T}}\otimes q_{i_s}^{\mathrm{T}} & T^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_B & e_1 \\ 0 & d \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} R_1^{\mathrm{T}}Q_B & R_1^{\mathrm{T}}e_1 \\ Q_3^{\mathrm{T}}Q_B & Q_3^{\mathrm{T}}e_1 \\ d^{\mathrm{T}}\otimes e_1^{\mathrm{T}} & (d^{\mathrm{T}}\otimes e_1^{\mathrm{T}})e_1+T^{\mathrm{T}}d \\ d^{\mathrm{T}}\otimes r_1^{\mathrm{T}} & (d^{\mathrm{T}}\otimes r_1^{\mathrm{T}})e_1+T^{\mathrm{T}}d \\ \vdots & \vdots \\ d^{\mathrm{T}}\otimes r_n^{\mathrm{T}} & (d^{\mathrm{T}}\otimes r_n^{\mathrm{T}})e_1+T^{\mathrm{T}}d \\ d^{\mathrm{T}}\otimes q_{i_1}^{\mathrm{T}} & (d^{\mathrm{T}}\otimes q_{i_1}^{\mathrm{T}})e_1+T^{\mathrm{T}}d \\ \vdots & \vdots \\ d^{\mathrm{T}}\otimes q_{i_s}^{\mathrm{T}} & (d^{\mathrm{T}}\otimes q_{i_s}^{\mathrm{T}})e_1+T^{\mathrm{T}}d \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

(i) 依归纳假设 $\begin{pmatrix} R_1^{\mathrm{T}}Q_B \\ Q_3^{\mathrm{T}}Q_B \end{pmatrix}$ 任 2 行均不相同,故(1)式中第 1、2 行块中任 2 行不相等;

(ii) $(d^{\mathrm{T}}\otimes e_1^{\mathrm{T}})Q_B=\begin{pmatrix} e^{\mathrm{T}}Q_B \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}Q_B \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\triangleq J.$ $(d^{\mathrm{T}}\otimes e_1^{\mathrm{T}})e_1=\begin{pmatrix} e^{\mathrm{T}}e_1 \\ \vdots \\ e^{\mathrm{T}}e_1 \end{pmatrix}=d.$ $T^{\mathrm{T}}d=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ l+1 \end{pmatrix}$;

(iii) $(d^{\mathrm{T}}\otimes r_1^{\mathrm{T}})Q_B=\begin{pmatrix} r_1^{\mathrm{T}}Q_B \\ \vdots \\ r_1^{\mathrm{T}}Q_B \end{pmatrix}$, $j=2,\cdots,n$,由于 r_j 为 R_1 的列,故依归纳假设,$r_1^{\mathrm{T}}Q_B,\cdots,r_n^{\mathrm{T}}Q_B$ 互不相等;同理,$q_{i_1}^{\mathrm{T}}Q_B,\cdots,q_{i_s}^{\mathrm{T}}Q_B$ 互不相等;

(iv) 注意 $r_j^{\mathrm{T}}e_1=1$, $j=2,\cdots,n$, $q_{i_n}^{\mathrm{T}}e_1=1$, $h=1,2,\cdots,s$;

(v) $r_h^{\mathrm{T}}Q_B\neq(1,1,\cdots,1)$, $\forall h$ 往证(v). 因 r_j 是 R_1 的列,Q_B 中的列也是 R_1 的列,而且 R_1 的列不仅包含了 Q_B 中所有列,而且包含了 Q_B 的列的至少包含 2 个非 0 元素的子向量. 从而 $r_j^{\mathrm{T}}Q_B\neq(1,1,\cdots,1)$, $\forall j=2,\cdots,n$,又由于 q_{i_h} 是由 R_1 扩张出来的列,故它与 R_1 中任 1 列均不同,从而 $e_1\leqslant q_{i_h}$,且 $e_1\neq q_{i_h}$, $\forall h$;故 $q_{i_h}Q_B\neq(1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1)$. 于是 $(d^{\mathrm{T}}\otimes r_j^{\mathrm{T}})Q_B$ 和 $(d^{\mathrm{T}}\otimes e_1^{\mathrm{T}})Q_B$ 不相同,$(d^{\mathrm{T}}\otimes q_{i_n}^{\mathrm{T}})Q_B$ 和 $(d^{\mathrm{T}}\otimes e_1^{\mathrm{T}})Q_B$ 不相同;又由归纳假设,对于 R_1 中的列 $r_2,\cdots,r_n$ 和由 R_1 扩张出来的列 $q_{i_n},\cdots,q_{i_s}$,它们的转置与 Q_B 相乘以后互不相等;而同一个子块 $[(d^{\mathrm{T}}\otimes r_1^{\mathrm{T}})Q_B\quad (d^{\mathrm{T}}\otimes r_j^{\mathrm{T}})e_1+T^{\mathrm{T}}d]$ 的各行,由于最后 1 列为 $(1,2,\cdots,l+1)^{\mathrm{T}}$,它们互不相等,故同一个子块的各行互不相等;同样可证 $[(d^{\mathrm{T}}\otimes q_{i_n}^{\mathrm{T}})Q_B\quad (d^{\mathrm{T}}\otimes q_{i_n}^{\mathrm{T}})e_1+T^{\mathrm{T}}d]$ 这个子块的各行也互不相等.

至此证明了将根结点到叶结点的所有路径构成的 Q 阵为充分必要 Q 阵,即是使得 KS 和 ERP 一一对应的 Q 矩阵.

下面进一步证明这个充分必要 Q 阵的列数最少.

设根树中有根结点 u 和叶结点 $v_1,v_2,\cdots,v_p$. 在上述充分必要 Q 阵 Q_B 中删去任 1 列,不失一般性,设删除 u 到 v_p 的路径,即 Q_B 中仅剩下 $p-1$ 列,记之为 Q'_B. 这 $p-1$ 列中不能提供叶结点 v_p 的信息,故对于 u 到 v_p 路径上属性集相同的 KS 的 ERP 必与其他某一 KS 的 ERP 相同,从而 Q'_B 不可能是充分必要 Q 阵. 故 Q_B 是可以使 KS 与 ERP 一一对应且含列数最少的 Q 矩阵,从而是完备 Q 阵.

由于将 Q_B 中若干列(比如第 $j_1,\cdots,j_k$)加列(布尔加)另一列(比如第 j 列),可以看成是先将 j_1 列加到第 j 列后,再将 j_2 列加到第 j 列,$\cdots$,最后将 j_k 列加列到第 j 列,即可以分解成每次仅有 1 列加到第 j 列的较简单的情形,因此不失一般性,可以设 $Q_B=(q_1,q_2,\cdots,q_p)$,将 q_p 加到 q_1(布尔加).

注意到这是讨论根树情形,故 Q_B 的第 1 行的元素均为 1. 为证明结论对 q_p 中根结点 u 到叶结点 v_p 的路径长度 l 用数学归纳法.

设 $l=1$,可以仿照(i)中相关的归纳法基础的证明,知结论成立.

设 $l=h$ 时结论成立. 记 $Q_{B_1}=(q_1,\cdots,q_{p-1})$,则 $Q_B=(Q_{B_1}\mid q_p)$,当 $l=h$ 时,可达阵记为 R,且经扩张后,扩张部分记为 Q_0,于是 $R_{K\times K}\xrightarrow{\text{扩张}}(R\mid Q_0)=Q_p$. 由归纳基础知 $Q_p^{\mathrm{T}}Q_B=\begin{pmatrix} R^{\mathrm{T}}Q_B \\ Q_0^{\mathrm{T}}Q_R \end{pmatrix}$ 中任 2 行均不相等;

注意 $Q_p^{\mathrm{T}}Q_B=\begin{pmatrix}R^{\mathrm{T}}\\Q_0^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(Q_{B_1}\quad q_p)=\begin{pmatrix}R^{\mathrm{T}}Q_{B_1} & R^{\mathrm{T}}q_p\\Q_0^{\mathrm{T}}Q_{B_1} & Q_0^{\mathrm{T}}q_p\end{pmatrix}$,今在 v_p 上再增加 1 个结点 v,使 v_p 为内点而 v 为叶结点,则 u 到 v 的路径长度 $l=h+1$.

设 $Q_c=\left[\begin{array}{c|c}q_1\cdots q_{p-1} & q_p\\0\cdots 0 & 1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}Q_{B_1} & q_p\\0 & 1\end{bmatrix}$,相应地可达阵记为 R_c,R_c 扩张出来的潜在 Q 阵记为 $Q_p^{(c)}$,易知 R_c 为 $(K+1)\times(K+1)$ 阵,且 $R_c=\begin{bmatrix}R & q_p\\0 & 1\end{bmatrix}$.

前已述及,R 对应的潜在 Q 阵为 $Q_p=(R\mid Q_0)$,$\begin{pmatrix}Q_p\\0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}q_p\\1\end{pmatrix}$ 扩张作布尔并,设得出的扩张部分为 Q_1,注意 Q_1 的最后 1 个元素均为 1,不妨设 $Q_1=\begin{pmatrix}Q_{11}\\d^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$,$Q_{11}$ 事实上是 Q_p 与 q_p 作布尔加的结果,故必与 Q_p 中的某些列相同. 于是 R_c 通过扩张以后得到

$$Q_p^{(c)}\begin{bmatrix}R & Q_0 & q_p & Q_{11}\\0 & 0 & 1 & d^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\triangleq Q_p^{(c)},$$

$$Q_p^{(c)}Q_c\begin{bmatrix}R^{\mathrm{T}} & 0\\Q_0^{\mathrm{T}} & 0\\q_p^{\mathrm{T}} & 1\\Q_{11}^{\mathrm{T}} & d^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{B_1} & q_p\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R^{\mathrm{T}}Q_{B_1} & R^{\mathrm{T}}q_p\\Q_0^{\mathrm{T}}Q_{B_1} & Q_0^{\mathrm{T}}q_p\\q_p^{\mathrm{T}}Q_{B_1} & q_0^{\mathrm{T}}q_p+1\\Q_{11}^{\mathrm{T}}Q_{B_1} & Q_{11}^{\mathrm{T}}q_p+d\end{bmatrix}.$$

(i) 由归纳假设知 $\begin{bmatrix}R^{\mathrm{T}}Q_{B_1} & R^{\mathrm{T}}q_p\\Q_0^{\mathrm{T}}Q_{B_1} & Q_0^{\mathrm{T}}q_p\end{bmatrix}$ 任 2 行均不相等; (ii) $q_p^{\mathrm{T}}Q_{B_1}$ 与 $R^{\mathrm{T}}Q_{B_1}$ 中某 1 行相同,但 $(q^{\mathrm{T}}Q_{B_1}\quad q_p^{\mathrm{T}}q_p+1)$ 与 $(R^{\mathrm{T}}Q_{B_1}\quad R^{\mathrm{T}}q_p)$ 最后的分量不相同; (iii) 注意 Q_{11} 是 Q_0 的子矩阵,故 $Q_{11}^{\mathrm{T}}Q_{B_1}$ 中任 2 行均不相同,而 $(Q_0^{\mathrm{T}}Q_{B_1}\quad Q_0^{\mathrm{T}}q_p)$ 与 $(Q_{11}^{\mathrm{T}}Q_{B_11}\quad Q^{\mathrm{T}}q_p+d)$ 的最后的分量不相同.

综上 (i) ~ (iii) 知,$Q_p^{(c)\,\mathrm{T}}Q_c$ 的任 2 行均不相同.

以上证明部分均使用潜在 Q 阵 Q_p,而未使用学生 Q 阵 Q_s 的原因是,$Q_p^{\mathrm{T}}Q_B$ 中没有 0 行,这显然与 Q_s 中知识状态为 0 向量加以了区别.

猜测: 如果 Q_B 中的若干行加(布尔加) 到第 j 列,又有若干列加到第 k 列,…,只要导出的布尔矩阵的秩等于叶结点的数目,则仍然是完备 Q 阵,例

图4　无结构型 3

$$Q_B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$,如果将第 $j+1$ 列加到第 i 列,$i=1,2,3$,得 $Q_c=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$,

$$Q_p=\left[\begin{array}{ccccc|ccc|cccc|cccc}1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1\end{array}\right].$$

上述 Q_p 由可达矩阵扩张而来. 通过简单代数运算,可知 $Q_p^{\mathrm{T}}Q_c$ 的行互不相同,也就是 ERP 和 KS 一一对应. 注意 Q_c 和 Q_B 的秩相等.

3　小结和讨论

上文仅仅是在属性作用之间不可以补偿、属性等权、每掌握项目中 1 个属性便期望得分增加 1 分等假设下对多级评分认知诊断的测验蓝图的设计进行讨论,希望找到结构良好的测验蓝图,即是使得 KS 和 ERP 能够一一对应. 由离散数学中图论知,对根树型(包括 J. P. Leighton 等所说的线型、发散型、无结构型) 讨论完备 Q 矩阵的构造问题. 假设 Q 矩阵的行表示属性,列表示项目. 根树型对应的完备 Q 矩阵的秩由这个根树的叶结点数决定.

由根树型结构的完备 Q 阵的构造来看,它们和属性个数的关系不太密切,而与几何形状关系十分密切,这表明对于包含多个属性的内容领域采用多级评分方式可以使认知诊断测验包含的项目数更少; 这对于多级评分计算机化自适应诊断测验(CD-CAT) 的入口项目(集合) 的选取很可能有重要意义. 但另一方面,多次测量可以减少测量误差,所以如何在缩短测验长度和提高测验精度方面达到平衡,可能要应用概化理论(generalization theory) 进一步讨论. 但是上文中讨论的是 KS 和 ERP 的对应问题,ERP 不包含随机误差(error-free) ,因此不需要重复,在属性及其层级关系不正确时,也只有系统误差.

本文如果采用 Sun Jianan 所说的计分方式,即设被试 i 的 KS 为 a_i,项目 j 对应 Q_t 中的列 q_j,则 i 在 j 上期望得分等于 $s_{ij}=s(a_i,q_j)=\sum_{t=1}^{K}q_{tj}I(a_{ti}\geqslant q_{tj})$.

这时,如何构造多值Q矩阵条件下的完备Q矩阵,值得讨论.

本文只是对根树型属性基本层级对应的完备Q矩阵的构造进行讨论,更复杂的属性层级结构可以由基本层级结构复合而成.相应的完备Q矩阵应该视复合方式的不同而变化.本文定理的证明相当长,是否有更为简洁的方式证明,值得思考.其他属性层级结构下完备Q阵将另文讨论.文章讨论在某些条件下多级评分完备Q矩阵构造问题,这实质上是最优诊断测验的设计问题.

4 参考文献

[1] Tao Jian,Shi Ningzhong,Chang Huahua. Item-weighted likelihood method for ability estimation in tests composed of both dichotomous and polytomous items [J]. Journal of Educational and Behavioral Statistics,2012,37(2):298-315.

[2] Ding Shuliang,Luo Fen,Cai Yan,et al. Complement to Tatsuoka's Q matrix theory [A]//Shigemasu K,Okada A,Imaizumi T,et al. New Trends in Psychometrics [C]. Tokyo:Universal Academy Press,2008:417-423.

[3] 丁树良,祝玉芳,林海菁,等. Tatsuoka Q 矩阵理论的修正 [J]. 心理学报,2009,41(2):175-181.

[4] 丁树良,罗芬,汪文义. 认知诊断分类中心的确定 [J]. 心理学探新,2013,33(5):396-401.

[5] 孙佳楠,张淑梅,辛涛,等. 基于Q矩阵和广义距离的认知诊断方法 [J]. 心理学报,2011,43(9):1095-1102.

[6] Sun Jianan,Xin Tao,Zhang Shumei,et al. A polytomousextension of the generalized distance discriminating method [J]. Applied Psychological Measurement,2013(7):503-521.

[7] 丁树良,杨淑群,汪文义. 可达矩阵在认知诊断测验编制中的重要作用 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2010,34(5):490-495.

[8] 丁树良,罗芬,汪文义. Q矩阵理论的扩展 [J]. 心理学探新,2012,32(5):410-422.

[9] 丁树良,毛萌萌,汪文义,等. 教育认知诊断测验与认知模型一致性的评估 [J]. 心理学报,2012,44(11):1535-1546.

[10] Tatsuoka K K. Architecture of knowledge structures and cognitive diagnosis:a statistical pattern classiflcation approach,in cognitively diagnostic assessments [D]. Erlbaum:Hillsdale,1995:327-359.

[11] Tatsuoka K K. Cognitive assessment:an introduction to the rule space method [M]. New York:Taylor & Francis Group,2009.

[12] 丁树良,汪文义,杨淑群. 认知诊断测验蓝图的设计 [J]. 心理科学,2011,34(2):258-265.

[13] 丁树良,汪文义,罗芬. 认知诊断中Q矩阵和Q矩阵理论 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(5):441-445.

[14] 田伟,辛涛. 基于等级反应模型的规则空间方法 [J]. 心理学报,2012,44(2):249-262.

[15] 祝玉芳,丁树良. 基于等级反应模型的属性层级方法 [J]. 心理学,2009,41(3):267-275.

[16] Leighton J P,Gierl M J,Hunka S M. The attribute hierarchy method for cognitive assessment:a variation on Tatsuoka´s rule-space approach [J]. Journal of Educational Measurement,2004,41:205-237.

[16] 左孝凌,李为鑑,刘永才. 离散数学 [M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1982.

Design of Polytomous Cognitively Diagnostic Test Blueprint

——For the Rooted Tree Type

DING Shu-liang,WANG Wen-yi,LUO Fen

(College of Computer Information Engineering,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: Giving a polytomous scoring rule,suppose that there is no compensation among the attributes,for the rooted tree type (RTT) which concludes the linear type,the divergent type and the unstructured type named by Leighton and her colleagues,the design of polytomous cognitively diagnostic test blueprint is discussed in this paper. The concepts of basic perfect Q matrix and perfect Q matrix are given. A perfect Q matrix is the Q matrix which contains the fewest columns and is the bijective mapping between the set of knowledge states and the set of the expected response patterns. The perfect Q matrix corresponding to the RTT and for polytomous scoring is proposed and proved. The number of the items in the perfect Q matrices is equal to the number of the leaves in the rooted tree and is restricted by the rank of the Q matrix. It is obvious that there is a difference between the related results for dichotomous and polytomous,respectively.

Key words: polytomous scoring; cognitive diagnosis; design of test blueprint; rooted tree type; perfect Q matrix

(责任编辑:冉小晓)