第 38 卷 第 2 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 38 No. 2
2014 年 3 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Mar. 2014

文章编号: 1000-5862(2014)02-0145-03

半模的根与基座的作用

江小霞，王颂生*

(江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌　330022)

摘要: 利用半模根和弱基座的理论，对有限生成半模和有限上生成半模进行了讨论，给出了半模 M 是有限生成的必要条件和半模 M 是有限上生成的充要条件.

关键词: 有限生成半模; 有限上生成半模; 根; 基座; 弱基座

中图分类号: O 513.3　　　**文献标志码:** A

0　引言

众所周知，在模范畴中，任一模的本质子模的交恰是极小子模的和，但在半模范畴中，极小子半模的和是本质子半模的交的子半模，反过来则未必成立[1-6]. 于是，本文引进了半模的基座和弱基座 2 个定义，并且用弱基座刻画了有限上生成半模. 同时，采用了文献[7]中半模的根的定义，也用根刻画了有限生成半模. 本文所涉及的半环和半模的定义参见文献[1].

定义 1[8]　设 A 是半模，B 是 A 的子半模，若 $x+y \in B$，$y \in B$，有 $x \in B$，则称 B 是 A 的可减子半模.

定义 2[9]　设 A 是半模，若 A 的所有子半模都是可减的，则称 A 是优半模.

1　基座和根

定义 3　设 M 是左 R-半模，记 $SocM = \sum\{K \leqslant M \mid K$ 在 M 中是极小的$\}$，称之为 M 的基座.

定义 4　设 M 是左 R-半模，记 $WSocM = \bigcap\{L \leqslant M \mid L$ 在 M 中是本质$\}$，称之为 M 的弱基座.

命题 1　设 M 是左 R-半模，则 $SocM \leqslant WSocM$.

证　设 $L \underline{\Delta} M$，K 是 M 中的极小子半模，则 $K \neq 0$，所以 $K \cap L \neq 0$，又 K 是单半模，于是 $K \leqslant L$.

引理 1[10]　单半模是循环半模.

引理 2　设 R 是除半环，M 是左 R-半模，则 $\forall x \in M(x \neq 0)$，一定有 Rx 是极小子半模.

证　设 K 是 M 中的子半模，且 $K \leqslant Rx$. 因为 K 是单半模，由引理 1 知，K 是循环半模，于是 $\exists y \in Rx$，使得 $K = Ry$，并且 $\exists r \in R$，使得 $y = rx$，又 R 是除半环，所以 $x = r^{-1}y \in Ry = K$.

命题 2　设 R 是除半环，M 是左 R-半模，若 M 的每个非零子半模都包含极小子半模，则 $SocM = WSocM$.

证　现只需证 $WSocM \leqslant SocM$. 设 $x \neq 0$ 且 $x \in L \underline{\Delta} M$，$K$ 是 M 极小子半模，显然 $Rx \neq 0$，从而 $Rx \cap K = K$，由引理 2 知，$Rx = K$，所以 $x \in K$.

引理 3　设 M_α 为单半模，则对任意的 K-正则非零半模同态 $f: M_\alpha \to N$，有 $f(M_\alpha)$ 为 N 的单子半模.

证　由同态 $f: M_\alpha \to N$，有 $\ker f \leqslant M_\alpha$，又 M_α 是单半模，则 $\ker f = M_\alpha$ 或 $\ker f = 0$，由 $\ker f = M_\alpha$ 知 $f = 0$，这与 $f \neq 0$ 矛盾. 任取 $x, y \in M_\alpha$，若 $f(x) = f(y)$，又 f 是 K-正则的，则 $x = y$，即 f 是单同态，所以 $f(M_\alpha) \cong M_\alpha$. 又 M_α 为单半模，故 $f(M_\alpha)$ 为单半模.

命题 3　设 M 和 N 是左 R-半模，$f: M \to N$ 是 K-正则非零半模同态，则 $f(SocM) \leqslant SocN$.

证　设 M_α 是 M 的极小子半模，由引理 3 知，$f(M_\alpha)$ 是 N 的极小子半模，所以 $f(M_\alpha) \leqslant SocN$，故

$$\sum f(M_\alpha) = f(\sum M_\alpha) = f(SocM) \leqslant SocN.$$

定义 5　设 M 是左 R-半模，记 M 的根为

$$Rad(M) = \bigcap\{K \leqslant M \mid K \text{在} M \text{中是极大的}\}.$$

命题 4　设 M 是左 R-半模，则

$$Rad(M) = \sum\{L \leqslant M \mid L \text{在} M \text{中是多余的}\}.$$

事实上，M 的根是 M 中包含一切多余子半模的最小子半模，然而，根不一定是多余的.

命题 5　若 M 的每个真子半模都包含在 M 的 1 个极大子半模中，则 $Rad(M)$ 是 M 的唯一最大多余子半模.

收稿日期: 2013-12-15

通信作者: 王颂生(1959-)，男，江西铜鼓人，副教授，主要从事半环与半模理论及其应用的研究.

证　设 L 是 M 的真子模，K 是极大子半模，$L \leqslant K$，又 $RadM \leqslant K$，有 $L + RadM \leqslant K \neq M$，则

$$RadM \ll M.$$

2　有限生成半模

定义 6　设 φ 是半模类，如果存在 φ 中的有限指标集 $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ 和 R–半模满同态 $f: \oplus_A T_\alpha \to M$，就称 M 由 φ 有限生成.

定义 7　设 φ 是由 M 的子半模构成的集合，且 φ 生成 M，如果对于 M 的每个子半模集 φ 都存在有限集合 $F \subseteq \varphi$ 生成 M，即对于某有限集 $F \subseteq \varphi$，由 $\sum \varphi = M$ 可推出 $\sum F = M$，就称 M 是有限生成的.

引理 4[11]　每个左 R–半模 M 均可由 R 生成，并且 R 有限生成 M 当且仅当 M 由有限子集张成.

命题 6　下列命题关于左 R–半模是等价的：

(i) M 是有限生成的；

(ii) 对满足 $M = \sum\limits_A \mathrm{Im} f_\alpha$ 的每个集合 $f_\alpha: U_\alpha \to M(\alpha \in A)$，存在有限集 $F \subseteq A$，使得

$$M = \sum_F \mathrm{Im} f_\alpha;$$

(iii) 对每个指标集 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ 和满同态 $\oplus_A U_\alpha \to M \to 0$，存在有限集 $F \subseteq A$ 和满同态 $\oplus_F U_\alpha \to M \to 0$；

(iv) 生成 M 的每个半模都有限生成 M；

(v) M 包含 1 个有限集.

证　(i) $\Rightarrow$ (ii) 和 (iii) $\Rightarrow$ (iv) 是显然的.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 对半模同态 $f_\alpha: U_\alpha \to M(\alpha \in A)$，$f: \oplus U_\alpha \to M$，$l_\alpha: U_\alpha \to \oplus U_\alpha$，有关系见图 1.

$$\begin{tikzcd} \oplus U_\alpha \arrow[r, "f"] & M \\ U_\alpha \arrow[u, "l_\alpha"] \arrow[ur, "f_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

图 1　交换图

由图 1 知 $f_\alpha = f l_\alpha$. 又由 (ii) 知

$$M = \sum_F \mathrm{Im} f_\alpha = \sum_F \mathrm{Im} f l_\alpha,$$

即 f 是满同态.

(iv) $\Rightarrow$ (v)　由引理 4 得可得.

(v) $\Rightarrow$ (i)　假设 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是 M 中的 1 个有限生成集，φ 是 M 的子半模集，且满足 $\sum \varphi = M$，则对于每个 x_i，都存在有限子集 $F_i \subseteq \varphi$ 使得 $x_i \in \sum F_i$，令 $F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$，则 F 是有限的，由于 $\sum F$ 是 M 的子半模，而且 $\sum F$ 还包含 M 的 1 个生成集，从而 $\sum F = M$，即 M 是有限生成的.

3　有限上生成半模

定义 8　设 φ 是半模类，如果存在 φ 中的有限指标集 $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ 和 R–半模单同态 $f: M \to \prod\limits_A T_\alpha$，就称 M 由 φ 有限上生成.

定义 9　设 φ 是由 M 的子半模构成的集合，且 φ 上生成 M，如果对于 M 的每个子半模集 φ 和某个有限集合 $F \subseteq \varphi$，由 $\cap \varphi = 0$ 可推出 $\cap F = 0$，就称 M 是有限上生成的.

显然易得如下推论.

推论 1　设 M 是左 R–半模，若 M 是有限上生成的，则对于满足 $\bigcap\limits_A \mathrm{Ker} f_\alpha = 0$ 的每个集合 $f_\alpha: M \to U_\alpha(\alpha \in A)$，存在有限集 $F \subseteq A$，使得 $\bigcap\limits_F \mathrm{Ker} f_\alpha = 0$.

命题 7　设 M 是左 R–半模，若 M 是有限上生成的，则对于每个指标集 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ 和单同态 $0 \to M \to \prod\limits_A U_\alpha$，存在有限集 $F \subseteq A$ 和单同态 $0 \to M \to \prod\limits_F U_\alpha$.

证　假设 $f: M \to \prod\limits_A U_\alpha$ 是单同态，$\pi_\alpha: \prod\limits_A U_\alpha \to U_\alpha$ 是自然投射，则有 $f_\alpha = \pi_\alpha f$，$f = \prod f_\alpha$，由 $\mathrm{Ker} f = 0$ 知，$\bigcap\limits_A \mathrm{Ker} f_\alpha = 0$. 应用推论 1 得，存在有限集 $F \subseteq A$，使得 $\bigcap\limits_F \mathrm{Ker} f_\alpha = 0$，且易知 $\pi_F: \prod\limits_A U_\alpha \to \prod\limits_F U_\alpha$ 是单同态，故 $\pi_F f: M \to \prod\limits_F U_\alpha$ 是单同态.

推论 2　如果半模 M 是有限上生成，则上生成 M 的每个半模都是有限上生成 M.

证　由推论 1 和命题 7 即可得.

推论 3　设 M 是是左 R–半模，

(i) 若 M 是有限生成的，则 M 的所有子半模都是有限生成的；

(ii) 若 M 是有限上生成的，则 M 的所有子半模都是有限上生成的.

证　(i) 设 $K \leqslant M$，则显然存在自然的满同态 $h: M \to K$. 又 M 是有限生成的，则存在有限集 $F \subseteq A$ 和满同态 $f: \oplus_F T_\alpha \to M$，于是有同态 $hf: \oplus_F T_\alpha \to M \to K$ 也是满同态.

类似地可以证明 (ii).

4　根和基座的作用

下面给出有限生成半模和有限上生成半模的基本刻画，它们表明"有限生成的"和"有限上生成的"分别由根和基座确定.

设 M 是半模，记 $\varphi(M)$ 是 M 的所有子半模集合.

引理 5[12]　设 M 是优半模，则 $(\varphi(M), +, \cap)$ 是 Dedekind 格.

引理 6[13]　对于优半模 M 的子半模 K，下列命题是等价的：(i) $K\underline{\Delta}M$；(ii) 包含映射 $i_K: K\to M$ 是 1 个本质的半模单同态.

引理 7　对于优半模 M 的子半模 K，下列命题是等价的：(i) $K\ll M$；(ii) 包含映射 $\varphi_K: M\to M/K$ 是 1 个多余的半模满同态[14-15].

引理 8　设 M 是半模，子半模 $K\leqslant N\leqslant M$，且 $H\leqslant M$，(i) 若 $H\underline{\Delta}M$，$K\underline{\Delta}M$，则 $H\cap K\underline{\Delta}M$；(ii) 若 $H\ll M$，$K\ll M$，则 $H+K\ll M$.

定理 1　设 M 是左 R-优半模，

(i) 若 M 是有限生成的，则 $M/RadM$ 是有限生成的，且自然满同态 $M\to M/RadM\to 0$ 是多余的(即 $RadM\ll M$)；

(ii) M 是有限上生成的当且仅当 $WSocM$ 是有限上生成的，且包含映射 $0\to WSocM\to M$ 是本质的(即 $WSocM\underline{\Delta}M$).

证　(i) 设 M 是有限生成的，K 是 M 的极大子半模，$RadM$ 不是 K 的子半模，满足 $K+RadM=M$，又 $RadM=\sum\{L\leqslant M\mid L$在 M 中是多余的$\}$ 和 M 是有限生成的，从而存在 M 的多余子半模 $L_1,\cdots,L_n$，使得 $L_1+\cdots+L_n+K=M$，由引理 8 知，$L_1+\cdots+L_n\ll M$，于是 $K=M$，即 $RadM\ll M$.

(ii) 设 M 是有限上生成的，$K\leqslant M$，满足 $(WSocM)\cap K=0$，又 $WSocM=\cap\{L\leqslant M\mid L$在 M 中是本质的$\}$ 和 M 是有限上生成的，从而存在 M 的本质子半模 $L_1,\cdots,L_n$，使得 $L_1\cap\cdots\cap L_n\cap K=0$，由引理 8 知，$L_1\cap\cdots\cap L_n\underline{\Delta}M$，于是 $K=0$，即 $WSocM\underline{\Delta}M$；反之，设 $WSocM$ 是有限上生成的，且 $WSocM\underline{\Delta}M$，φ 是由 M 的子半模构成的任意集合，且 $\cap\varphi=0$，则 $\cap\{(A\cap WSocM)\mid A\in\varphi\}=0$，从而对某些 $A_1,\cdots,A_n\in\varphi$，有 $(A_1\cap\cdots\cap A_n)\cap WSocM=(A_1\cap WSocM)\cap\cdots\cap(A_n\cap WSocM)=0$. 又因为 $WSocM\underline{\Delta}M$，所以 $A_1\cap\cdots\cap A_n=0$.

推论 4　设 M 是非零半模，

(i) 若 M 是有限生成的，则 M 有极大子半模；

(ii) 若 M 是有限上生成的，则 M 有极小子半模.

证　由文献[10]知(i)成立. 只需证(ii). 由 $SocM\leqslant M$ 和 $SocM=\sum\{K\leqslant M\mid K$在 M 中是极小的$\}$ 即得.

定义 10　设 $(M_\partial)_{\partial\in A}$ 为半模 M 的一族单子半模指标集，若 $M=\oplus_A M_\partial$，则称 M 为半单半模，且 $M=\oplus_A M_\partial$ 为 M 的半单分解.

命题 8　设 M 是半单半模，则 M 是有限生成的.

证　设 $M=T_1\oplus\cdots\oplus T_n$，$T_i$ 是单的 $(i=1,\cdots,n)$，显然 M 存在有限生成集，再应用命题 6 中 (v)$\Rightarrow$(i) 即得证.

命题 9　设 M 是半模，$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_n$，则 M 是有限生成的当且仅当每个 $M_i(i=1,\cdots,n)$ 都是有限生成的.

证　显然若 M 是有限生成的，则每个 $M_i(i=1,\cdots,n)$ 是有限生成的；反之，若 M_i 是有限生成，由于 $M_i(i=1,\cdots,n)$ 的生成集的并是 M 的 1 个生成集，由命题 6 得 M 是有限生成.

5　参考文献

[1] Golan J S. The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science [M]. Exxes England: Longman Scientific & Technical, 1999.

[2] Anderson F W, Fuller K R. Rings and categories of modules [M]. New York: Springer-Verlag, 1973.

[3] 王秀丽. 伪 k-投射半模[J]. 东北师大学报: 自然科学版, 2012, 44(1): 41-44.

[4] 熊清泉, 舒乾宇. 完备格上区间值 t-半模及其 R-蕴含算子[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2013, 36(2): 165-170.

[5] 杨俊燕. 内射半模的若干性质[D]. 南昌: 江西师范大学, 2011.

[6] 王力. 关于具有某些性质的半环和半模的研究[D]. 西安: 西北大学, 2011.

[7] 王秀丽. 半模的投射盖和半模的根[J]. 数学研究, 2004, 31(4): 220-224.

[8] 王聪, 黄福生. 拟内射半模与伪内射半模[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(2): 155-159.

[9] 刘兴, 黄福生. 可消半模范畴中的完全可减内射分解[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(5): 512-516.

[10] 欧启通. 有限生成半模的性质[J]. 三明高等专科学校学报, 2003, 20(4): 150-156.

[11] 石定琴. 半模范畴中的生成与余生成及其相关性质[D]. 南昌: 江西师范大学, 2006.

[12] 陈清华. 关于优半模[J]. 福建师范大学学报: 自然科学版, 1992, 8(3): 24-26.

[13] 郑金荣, 陈清华. 本质与多余子半模[J]. 福建师范大学学报: 自然科学版, 1994, 10(4): 20-26.

[14] 张廷海, 黄福生, 甘爱萍. 自由©-半模[J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2011, 36(1): 31-33.

[15] 牛军伟, 黄福生, 刘新斌. 半模余生成子的刻画[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(1): 78-80.

(下转第 166 页)

[10] 石磊,易才凤.一类高阶线性微分方程解的增长性[J].江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(3):230-233.
[11] 刘旭强,易才凤.关于2阶线性微分方程解的增长性[J].江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(2):171-174.
[12] 易才凤.高阶微分方程解的幅角分布[J].数学学报,2005,48(1):133-140.
[13] Wu Zhaojun,Sun Daochun. Angular distribution of solutions of higher order linear differential equations[J]. J Korean Math Soc,2007,44(6):1329-1338.
[14] Zheng Jianhua. Value distribution of meromorphic functions[M]. Beijing:Tsinghua Univ Press,2010.
[15] Wu Shengjian. On the location of zeros of $f''+Af=0$ where $A(z)$ is entire[J]. Math Scand,1994,74:293-312.

The Radial Oscillation of Higher Order Non-Homogeneous Linear Differential Equation

HU Jun,YI Cai-feng*
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: It is investigated that the radial oscillation of infinite order solutions of higher order nonhomogeneous linear differential equation,by using the fundamental theory and method of value distribution in angular domain. It was obtained that the estimations on the hyper order and the hyper order convergence exponent of the sequence of zero of infinite order solutions along it's Borel direction of hyper order.

Key words: differential equations; solutions; angular domain; radial; Borel direction; hyper order

(责任编辑:王金莲)

(上接第147页)

The Function of Radical and Socle of Semimodule

JIANG Xiao-xia,WANG Song-sheng*
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: By the theory of semimodular root and weak-socle,the function of weak-socle and radical over finitely generate(cogenerated) semimodule are studied. The necessary condition of semimodule M being finitely generated is obtained,the sufficient and necessary condition of semimodule M being finitely cogenerated is given.

Key words: finitely generated semimodule; finitely cogenerated semimodule; radical; socle; weak-socle

(责任编辑:曾剑锋)