第 38 卷 第 2 期　江西师范大学学报(自然科学版)　Vol. 38 No. 2
2014 年 3 月　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　Mar. 2014

文章编号:1000-5862(2014)02-0148-05

非倍测度下参数型 Marcinkiewicz 积分多线性交换子的一些估计

周　疆,王定怀

(新疆大学数学与系统科学学院,新疆 乌鲁木齐　830046)

摘要:当假设测试 μ 满足多项式增长的条件时,得到了参数型 Marcinkiewicz 积分与 $Lip_\beta(\mu)$ 函数生成的多线性交换子 $M^\rho_{\vec b}f(x)$ 具有 $(L^p(\mu),L^q(\mu))$ 的有界性,以及在 $H^1(\mu)$ 空间的端点估计,从而推广了参数型 Marcinkiewicz 积分单线性交换子的相关结果.

关键词:非倍测度;参数型 Marcinkiewicz 积分;$Lip_\beta(\mu)$ 函数;$H^1(\mu)$ 空间.

中图分类号:O 174.2　　**文献标志码**:A

0　引言

设 μ 是定义在 $\mathbf{R}^d$ 上的非负 Radon 测度且满足增长条件:对所有的 $x\in\mathbf{R}^d$,$r>0$,都有

$$\mu(B(x,r))\leqslant C_0r^n,\tag{1}$$

其中 C_0,n 是正数且 $0<n\leqslant d$,$B(x,r)=\{y\in\mathbf{R}^d:|y-x|<r\}$. $\forall x\in\operatorname{supp}(\mu)$ 及 $r>0$,满足 $\mu(B(x,2r))\leqslant C\mu(B(x,r))$,则称 μ 是倍测度.

对于方体 $Q\subset\mathbf{R}^d$,总假设 Q 是闭的且平行于坐标轴,用 $l(Q)$ 表示其边长. 设 $\alpha>1$,$\beta>\alpha^n$,若 $\mu(\alpha Q)\leqslant\beta\mu(Q)$,则称 Q 为 (α,β) 倍方体. 这里 αQ 表示与 Q 同心且边长为 $l(\alpha Q)=\alpha l(Q)$ 的方体.

给定 $\mathbf{R}^d$ 中的任意 2 个方体 $Q\subset R$,记 $K_{Q,R}=1+\sum\limits_{k=1}^{N_{Q,R}}\dfrac{\mu(2^kQ)}{[l(2^kQ)]^n}$,其中 $N_{Q,R}$ 是使得 $l(2^kQ)\geqslant l(R)$ 成立的最小正整数 k,$K_{Q,R}$ 的概念是由 X Tolsa. 在文献[1]中首次提出.

近年来,交换子理论在调和分析中具有重要作用[2-3],在测试 μ 仅满足多项式增长性的条件下,许多学者研究了 Marcinkiewicz 积分交换子 Lebesgue 空间、Morrey 空间和 Hardy 空间以及参数型 Marcinkiewicz 有界性,得到了许多结论[4-12]. 2013 年,李亮等在文献[9]中讨论了非倍情况下,Marcinkiewicz 积分高阶交换子在 Hardy 空间的有界性,受此启发,本文给出了非倍情况下,参数型 Marcinkiewicz 积分算子的多线性交换子的一些估计.

设核函数 $K(x,y)$ 是定义在 $\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\backslash\{(x,y):x=y\}$ 上的局部可积函数且满足下列条件:

(i) 存在常数 $C>0$,使得对所有的 $x,y\in\mathbf{R}^d$ 且 $x\neq y$ 有

$$|K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-(n-1)};\tag{2}$$

(ii) 当 $|x-x'|\leqslant|x-y|/2$ 时,有

$$|K(x,y)-K'(x,y)|\leqslant C\frac{|x-x'|^\varepsilon}{|x-y|^{n-1+\varepsilon}},\tag{3}$$

其中 $0<\varepsilon\leqslant1$;

(iii) 当 $|y-y'|\leqslant|x-y|/2$ 时,有

$$|K(x,y)-K(x,y')|\leqslant C\frac{|y-y'|}{|x-y|^{n-1+\varepsilon}},\tag{4}$$

其中 $0<\varepsilon\leqslant1$.

定义关于上述 $K(x,y)$ 的参数型 Marcinkiewicz 积分算子 $M^\rho(f)(x)$ 为

$$M^\rho(f)(x)=\left[\int_0^\infty\left|\frac{1}{t^\rho}\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{K(x,y)}{|x-y|^{1-\rho}}\cdot f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right],x\in\mathbf{R},\rho>0.\tag{5}$$

对于局部可积函数 b_i,$i=1,2,\cdots,m$,记 $\vec b=(b_1,\cdots,b_n)$,则参数型 Marcinkiewicz 积分多线性交换子 $M^\rho_{\vec b}(f)(x)$ 定义如下:

收稿日期:2013-11-18

基金项目:国家自然科学基金(11261055),新疆自然科学基金(2011211A005)和新疆大学自然科学基金(BS120104)资助项目.

作者简介:周　疆(1968-),男,四川安岳人,副教授,主要从事调和分析理论及其应用方面的研究.

$$M^{\rho}_{\vec{b}}(f)(x) = \left\{\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{t^{\rho}}\int_{|x-y|\leq t}\frac{K(x,y)}{|x-y|^{1-\rho}}\cdot\prod_{i=1}^{m}[b_i(x)-b_i(y)]f(y)\,d\mu(y)\right|^2\frac{dt}{t}\right\}^{1/2}. \quad (6)$$

本文总是假定 $M^{\rho}(f)(x)$（以下都简记为 M^{ρ}）在 $L^2(\mu)$ 上有界. 特别 $K(x,y) = \Omega(x,y)/|x-y|^{d-1}$，其中 Ω 为满足零次齐次函数且 $\Omega\in Lip_{\alpha}(S^{d-1})(0<\alpha\leq 1)$，则容易验证此 $K(x,y)$ 满足(2)式和(3)式. 又若 μ 是 $\mathbf{R}$ 中的 d 维 Lebesgue 测度. 当 $\rho=1$ 时，则(5)式定义的 M^{ρ} 恰为文献[9]给出介绍的标准 Marcinkiewicz 积分算子.

定义 1　对于任意给定的 $\beta>0$，若函数 f 满足：

$$\|f\|_{\dot{\wedge}_{\beta}} = \sup_{x,h\in\mathbf{R}^n, h\neq 0}\frac{|\Delta_h^{[\beta]+1}f(x)|}{|h|^{\beta}} < \infty,$$

则称 $f(x)$ 是 Lipschitz 空间 $\dot{\wedge}_{\beta}\mathbf{R}^n$，其中 Δ_h^k 表示 k 阶不同算子.

定理 1　设 $m\in\mathbf{N}$，核函数 $K(x,y)$ 满足(2)～(4)式，$M^{\rho}_{\vec{b}}$ 为(6)式所定义的参数型 Marcinkiewicz 积分多线性交换子，$b_i\in\dot{\wedge}\beta(\mathbf{R}^n)(0<\beta_i\leq 1)$，$i=1,2,\cdots,m$，$1/q=1/p-\beta/n$，$\beta=\sum_{i=1}^{m}\beta_i(0<\beta\leq n)$，则 $M^{\rho}_{\vec{b}}$ 是从 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu)$ 的有界算子.

定理 2　设 $m\in\mathbf{N}$，$0<\beta_i\leq 1$，$b_i\in\dot{\wedge}\beta(\mathbf{R}^n)$，$M^{\rho}_{\vec{b}}$ 为(6)式定义的参数型 Marcinkiewicz 多线性交换子，其中核函数 $K(x,y)$ 满足(2)～(4)式，假定 M^{β} 在 $L^2(\mu)$ 上有界，$0<\beta=\sum_{i=1}^{m}\beta_i<n$ 及 $1/q=1-\beta/n$，则 $M^{\rho}_{\vec{b}}$ 是 $H^1(\mu)$ 到 $L^{n/(n-\beta)}(\mu)$ 上的有界算子，即 $\forall f=H^1(\mu)$，存在常数 C 使得

$$M^{\rho}_{\vec{b}}(f)(x) \leq C\|b\|_{\dot{\wedge}_{\beta}}\|f\|_{H^1(\mu)}.$$

后续内容中 C 表示不依赖于主要参数的常数，但其值在不同的地方可能不相同；对任意的 μ 可测集合 E，χ_E 表示特征函数；对于固定的 $1\leq p<\infty$，p 与 p' 满足共轭关系，即 $1/p+1/p'=1$.

1　预备知识

本文采用文献[1]所给出的原子 Hardy 空间 $H_a^{1,\infty}(\mu)$ 的定义，该定义与文献[15]中引入 grand 极大算子 M_{φ} 来定义具有非倍测度的 $H^1(\mu)$ 等价.

定义 2　设 $0<p\leq 1\leq q\leq\infty$，$p\neq q$，非负整数 $s\geq[n(1/p-1)]$（记号 $[x]$ 表示 x 的整数部分），如果函数 $a(x)\in L^q(\mathbf{R}^n)$ 满足下列条件：

(i) $\operatorname{supp}a\subset B(x_0,r)$；

(ii) $\|a\|\leq|B(x_0,r)|^{1/q-1/p}$；

(iii) $\int a(x)x^{\alpha}dx=0$，$0\leq|\alpha|\leq s$；

则称 $a(x)$ 为中心在 x_0 处的 (p,q,s) 原子.

定义 3　设 $s>1$，称函数 $h(x)\in L^1_{loc}(\mu)$ 为原子块，若满足

(i) 存在方体 R 使得 $\operatorname{supp}h(x)\subset R$；

(ii) 对于 $i=1,2$，存在紧支集分别包含在 $Q_i(\subset R)$ 中的函数 $a_i(x)$ 和实数 λ_i，使得 $h(x)=\lambda_{1a_1}(x)+\lambda_{2a_2}$，且 $\|a_i\|_{L^{\infty}(\mu)}\leq[\mu(mQ_i)K_{Q_i,R}]^{-1}$，定义有限原子块 $|h|_{H_a^{1,\infty}}(\mu)=|\lambda_1|+|\lambda_2|$，称 $f\in H_a^{1,\infty}(\mu)$，它是指存在满足 $\sum_{j=1}^{\infty}|h_J|_{H_a^{1,\infty}(\mu)}<\infty$ 的有限原子块 $\{h_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ 使得 $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}h_j(x)$，所以 f 的 $H_a^{1,\infty}(\mu)$ 范数定义为

$$\|f\|_{H_a^{1,\infty}}(\mu) = \inf\{\sum_j|h_j|_{H_a^{1,\infty}(\mu)}\},$$

其中 $\{h_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ 取遍 f 的所有可能原子.

X. Tolsa 在文献[1]中证明了 $H_a^{1,\infty}(\mu)$ 与 $s>1$ 的选取有关.

定义 4　设 $0<\alpha<\infty$，定义与非倍测度 μ 相关的分数次积分 I_{α} 为

$$I_{\alpha}(f)(x) = \int_{\mathbf{R}^d}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}d\mu(y),\ x\in\operatorname{supp}(\mu). \quad (7)$$

J. García-Cuerva 等在文献[16]中对 I_{α} 进行了研究并得到：

引理 1　假定 $0<\alpha<n$，I_{α} 为(7)式所定义的分数次积分，对 $1\leq p<n/\alpha$ 且 $1/q=1/p-\alpha/n$，存在常数 $C>0$，使得对所有的 $\lambda>0$ 和具有紧支集的函数 $f\in L^{\infty}(\mu)$，有

$$\|I_{\alpha}(f)\|_{L^q(\mu)}\leq C\|f\|_{L^p(\mu)},$$

$$\mu(x\in\mathbf{R}^d: I_{\alpha}(f)(x)>\lambda)\leq C\left(\frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{\lambda}\right)^{n/(n-\alpha)}.$$

2　定理的证明

定理 1 的证明　因为 $b_i\in\dot{\wedge}_{\beta}(\mathbf{R}^n)(0<\beta_i\leq 1)$，$\forall i=1,2,\cdots,m$，由 Minkowski 不等式和(1)式得

$$M^{\rho}_{\vec{b}}(f)(x) = \left\{\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{t^{\rho}}\int_{|x-y|\leq t}\frac{K(x,y)}{|x-y|^{1-\rho}}\cdot\prod_{i=1}^{m}[b_i(x)-b_i(y)]f(y)\,d\mu(y)\right|^2\frac{dt}{t}\right\}^{1/2}\leq$$

$$\int_{\mathbf{R}^d}\frac{|K(x,y)|}{|x-y|^{1-\rho}}\prod_{i=1}^{m}|b(x)-b(y)||f(y)|\cdot\left(\int_{|x-y|}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+2\rho}}\right)^{1/2}\mathrm{d}\mu(y)\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\int_{\mathbf{R}^d}\frac{1}{|x-y|^{n-\rho}}|x-y|^{\beta}\cdot|f(y)|\frac{1}{|x-y|^{\rho}}\mathrm{d}\mu(y)\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\int_{\mathbf{R}^d}\frac{1}{|x-y|^{n-\beta}}\cdot|f(y)|\mathrm{d}\mu(y)\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}I_\beta(|f|)(x),$$

注意到 $0<\sum_{j=1}^{m}\beta_j=\beta<n$,结合引理 1 即可得到定理 1 的结论.

定理 2 的证明 根据原子 Hardy 空间 $H_a^{1,\infty}(\mu)$ 的定义,只需证明定理 2 对于每个原子块 h 成立即可. 为了便于计算,在证明中取 $s=4$. 设方体 Q 满足 $\operatorname{supp}(h)\subset R$, $\int_{\mathbf{R}^d}h(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=0$,并且

$$h(x)=\lambda_1a_1(x)+\lambda_2a_2(x),\qquad(8)$$

其中 λ_1,λ_2 是实数,满足 $|h|_{H_a^{1,\infty}}=\lambda_1+\lambda_2$. 函数 a_i $(i=1,2)$ 有界且 $\operatorname{supp}(a_i)\subset Q_i\subset R$,并满足

$$\|a_i\|_{L^\infty}\leqslant[\mu(4Q_iK_{Q_i,R})]^{-1}.$$

设 x_R 为方体 R 的中心,有

$$\|M_{\vec b}^{\rho}(h)\|_{L^q(\mu)}=\left(\int_{\mathbf{R}^d}|M_{\vec b}^{\rho}(h)(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}\leqslant\left(\int_{2R}|M_{\vec b}^{\rho}(h)(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}+\left(\int_{\mathbf{R}^d\setminus 2R}|M_{\vec b}^{\rho}h(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}=I+II.$$

根据(8)式,有

$$I=\left(\int_{2R}|M_{\vec b}^{\rho}h(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}=\left(\int_{2R}|M_{\vec b}^{\rho}[\lambda_1a_1(x)+\lambda_2a_2(x)]|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}\leqslant|\lambda_1|\left(\int_{2R}|M_{\vec b}^{\rho}(a_1)(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}+|\lambda_2|\left(\int_{2R}|M_{\vec b}^{\rho}(a_2)(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}=I_1+I_2.$$

为了估计 I_1,作如下分解:

$$I_1=|\lambda_1|\left(\int_{2R}|M_{\vec b}^{\rho}(a_1)(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q_1}+|\lambda_1|\left(\int_{2R\setminus 2Q_1}|M_{\vec b}^{\rho}(a_1)(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q_1}\leqslant|\lambda_1|\left(\int_{2Q_1}|M_{\vec b}^{\rho}(a_1)(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q_1}+|\lambda_1|\left(\int_{2R\setminus 2Q_1}|M_{\vec b}^{\rho}(a_1)(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q_1}=I_{11}+I_{12}.$$

选取 p_1,q_1 使得 $1<p_1<n/\beta$, $1<q<q_1$,其中 $1/q_1=1/p_1-\beta/n$. 由 Hölder 不等式,$K_{Q_1,R}\geqslant1$ 以及引理 1 中的 $M_{\vec b}^{\rho}$ 的 $(L^{p_1}(\mu),L^{q_1}(\mu))$ 有界性,得

$$I_{11}=|\lambda_1|\left(\int_{2Q_1}|M_{\vec b}^{\rho}(a_1)(x)|^{q_1}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q_1}\leqslant|\lambda_1|\left[\int_{2Q_1}|M_{\vec b}^{\rho}(a_1)(x)|^{q_1}\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/q_1}\mu(2Q_1)^{1/q-1/q_1}\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|\lambda_1|\|a_1\|_{L^{p_1}(\mu)}\mu(2Q_1)^{1/q-1/q_1}\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|\lambda_1|\|a_1\|_{L^\infty(\mu)}\mu(2Q_1)^{1/p_1+1/q-1/q_1}\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|\lambda_1|\frac{\mu(Q_1)}{\mu(4Q_1)K_{Q_1,R}}\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|\lambda_1|.$$

简记 N_1 表示为 $N_{2Q_1,2R}$ 且结合

$$\|a_1\|_{L^\infty(\mu)}\leqslant[\mu(4Q_1)K_{Q_1,R}]^{-1},$$

得到

$$I_{12}=|\lambda_1|\left(\int_{2R\setminus 2Q_1}|M_{\vec b}^{\rho}(a_1)(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}\leqslant|\lambda_1|\left\{\sum_{k=1}^{N_1+1}\int_{2^{k+1}Q_1\setminus 2^kQ_1}\left[\int_0^\infty\left|\frac{1}{t^\rho}\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{K(x,y)}{|x-y|^{1-\rho}}\cdot\prod_{i=1}^{m}[b_i(x)-b_i(y)]a_1(y)\mathrm{d}\mu(y)\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right]^{q/2}\mathrm{d}\mu(x)^{1/q}\right\}\leqslant C|\lambda_1|\left\{\sum_{k=1}^{N_1+1}\int_{2^{k+1}Q_1\setminus2^kQ_1}\left[\int_{Q_1}\prod_{i=1}^{m}|b_i(x)-b_i(y)|/|x-y|^n\cdot|a_1(y)|\mathrm{d}\mu(y)\right]^q\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|\lambda_1|\left\{\sum_{k=1}^{N_1+1}l(2^kQ_1)^{q(\beta-n)}\cdot\int_{2^{k+1}Q_1\setminus2^kQ_1}\left[\int_{Q_1}|a_1(y)|\mathrm{d}\mu(y)\right]^q\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|\lambda_1|\left[\sum_{k=1}^{N_1+1}l(2^kQ_1)^{q(\beta-n)}\mu(2^{k+1}Q_1)\cdot\|a_1\|_{L^\infty(\mu)}^q\mu(Q_1)^q\right]^{1/q}\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|\lambda_1|\cdot\left[\sum_{k=1}^{N_1+1}l(2^kQ_1)^{q(\beta-n)}\mu(2^{k+1}Q_1)\mu(4Q_1)^{-q}\cdot K_{Q_1,R}^{-q}\mu(Q_1)^q\right]^{1/q}\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|\lambda_1|\cdot\left\{K_{Q_1,R}^{-q}\sum_{k=2}^{N_1+1}\frac{\mu(2^kQ_1)}{l(2^kQ_1)^n}\right\}^{1/q}\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|\lambda_1|,$$

这里用到文献[7]中给出的

$$\sum_{k=1}^{N_1+1}\frac{\mu(2^kQ_1)}{l(2^kQ_1)^n}\leqslant CK_{Q_1,R}.$$

由前面关于 I_{11} 和 I_{12} 的结论,得到 I_1 的估计. 类似地方法可得 $I_2\leqslant C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|\lambda_1|$,综合得出 I 的估计.

$$II=\left\{\int_{\mathbf{R}^d\setminus2R}\left[\int_0^\infty\left|\frac{1}{t^\rho}\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{K(x,y)}{|x-y|^{1-\rho}}\cdot\prod_{i=2}^{m}[b_i(x)-b_i(y)]h(y)\mathrm{d}\mu(y)\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}^{q/2}\right]\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}=$$

$$\left\{\int_{\mathbf{R}^d\setminus 2R}\left[\int_0^{|x-x_R|+2l(R)}\left|\frac{1}{t^\rho}\int_{|x-y|\le t}\frac{K(x,y)}{|x-y|^{1-\rho}}\cdot\prod_{i=2}^m[b_i(x)-b_i(y)]h(y)\mathrm{d}\mu(y)\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right]^{q/2}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}+$$

$$\left\{\int_{\mathbf{R}^d\setminus 2R}\left[\int_{|x-x_R|+2l(R)}^{\infty}\left|\frac{1}{t^\rho}\int_{|x-y|\le t}\frac{K(x,y)}{|x-y|^{1-\rho}}\cdot\prod_{i=2}^m[b_i(x)-b_i(y)]h(y)\mathrm{d}\mu(y)\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right]^{q/2}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}=II_1+II_2.$$

对 $i=1,2,y\in Q_i\subset R,x\in\mathbf{R}^d\setminus(2R)$,有 $|x-y|\sim|x-x_R|\sim|x-x_R|+2l(R)$,由 Minkowski 不等式得

$$II_1=C\left\{\int_{\mathbf{R}^d\setminus 2R}\left[\int_{\mathbf{R}^d}\frac{h(y)}{|x-y|^{n-\rho}}\prod_{i=1}^m|b_i(x)-b_i(y)|\cdot\left(\int_{|x-y|}^{|x-x_R|+2l(R)}\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+2\rho}}\right)^{1/2}\mathrm{d}\mu(y)\right]^q\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}\le$$

$$C\left\{\int_{\mathbf{R}^d\setminus 2R}\left[\int_{\mathbf{R}^d}\frac{h(y)}{|x-y|^{n-\rho}}\prod_{i=1}^m|b_i(x)-b_i(y)|\cdot\left(\frac{1}{(|x-x_R|+2l(R))^{2\rho}}-\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}\right)^{1/2}\mathrm{d}\mu(x)\right]^q\mathrm{d}\mu(y)\right\}^{1/q}\le C\|b\|_{Lip_\beta}^m\cdot$$

$$\int_{\mathbf{R}^d}\left\{\sum_{k=1}^\infty\int_{2^{k+1}R\setminus 2^kR}\left(\frac{l(R)^{\rho/2}}{|x-y|^{n-\beta+\rho/2}}\right)^q\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}\cdot|h(y)|\mathrm{d}\mu(y)\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\left(\sum_{j=1}^2|\lambda_j|\,\|a_j\|_{L^1(\mu)}\right)\cdot$$

$$\left[\sum_{k=1}^\infty l(R)^{\rho/2}l(2^kR)^{-n+\beta-\rho/2}\mu(2^{k+1}R)^{1/q}\right]\le$$

$$C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\left(\sum_{j=1}^2|\lambda_j|\frac{\mu(Q_j)}{\mu(4Q_j)K_{Q_j,R}}\right)\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\left(\sum_{j=1}^2|\lambda_j|\right).$$

$\forall y\in\mathbf{R}$,有 $|x-y|\le|x-x_R|+|y-x_R|\le|x-x_r|+2l(R)\le t$,由 Minkowski 不等式,条件(3)和(4)以及 h 的消失性 $\int_{\mathbf{R}^d}h(x)\mathrm{d}\mu(x)=0$ 得

$$II_2\le\left\{\int_{\mathbf{R}^d\setminus 2R}\left|\int_{\mathbf{R}^d}\frac{K(x,y)}{|x-y|^{1-\rho}}\prod_{i=1}^m[b_i(x)-b_i(y)]\cdot h(y)\mathrm{d}\mu(y)\left(\int_{|x-x_R|+2l(R)}^\infty\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+2\rho}}\right)^{1/2}\right|^q\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}\le$$

$$\left\{\int_{\mathbf{R}^d\setminus 2R}\left|\int_{\mathbf{R}^d}\frac{K(x,y)}{|x-y|^{1-\rho}}\prod_{i=1}^m[b_i(x)-b_i(y)]h(y)\cdot\frac{1}{[|x-x_R|+2l(R)]^\rho}\mathrm{d}\mu(y)\right|^q\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}\le$$

$$C\left\{\int_{\mathbf{R}^d\setminus 2R}\left|\int_{\mathbf{R}^d}\frac{K(x,y)}{|x-y|^{1-\rho}}\prod_{i=1}^m[b_i(x)-b_i(y)]\cdot h(y)\mathrm{d}\mu(y)\right|^q\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}\le$$

$$C\left\{\int_{\mathbf{R}^d\setminus 2R}\left|\int_{\mathbf{R}^d}\frac{K(x,y)-K(x,x_R)}{|x-y|^{1-\rho}}\cdot\prod_{i=1}^m[b_i(x)-b_i(y)]h(y)\mathrm{d}\mu(y)\right|^q\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q}\le$$

$$C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\int_{\mathbf{R}^d}\sum_{k=1}^\infty\left\{\int_{2^{k+1}R\setminus 2^kR}\left[\frac{|K(x,y)-K(x,x_R)|}{|x-y|}\cdot|x-y|^\beta\right]^q\mathrm{d}\mu(x)\,|h(y)|\right\}\mathrm{d}\mu(y)\le$$

$$C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\int_{\mathbf{R}^d}|h(y)|\cdot\sum_{k=1}^\infty\left[\int_{2^{k+1}R\setminus 2^kR}\left(\frac{|y-x_R|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\beta+\varepsilon}}\right)^q\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/q}\mathrm{d}\mu(y)\le$$

$$C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\int_{\mathbf{R}^d}|h(y)|\sum_{k=1}^\infty 2^{k(\beta-\varepsilon-n+n/q)}l(R)^{\beta-n+n/q}\mathrm{d}\mu(y)\le$$

$$C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\sum_{k=1}^\infty 2^{-k\varepsilon}\int_{\mathbf{R}^d}\left|\sum_{j=1}^2\lambda_ja_j(y)\right|\mathrm{d}\mu(y)\le$$

$$C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\sum_{j=1}^2|\lambda_j|\frac{\mu(Q_j)}{\mu(4Q_j)K_{Q_j,R}}\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\left(\sum_{j=1}^2|\lambda_j|\right),$$

这里 $1/q=1-\beta/n$ 和 $0<\varepsilon\le 1$.

由 I,II 的估计,得到

$$\|M_{\vec b}^\rho\|_{L^q(\mu)}\le C|h|_{H_a^{1,\infty}(\mu)}.$$

最后,结合有限原子线性组合在有限的 $H_a^{1,\infty}(\mu)$ 中的稠密性,从而得到定理2的结论.

3　参考文献

[1] Tolsa X. BMO,H^1 and Calderón-Zymundopertors for non doubling measures [J]. Math Ann,2001,319:89-149.

[2] 胡伶俐,陈冬香. Bochner-Riesz 算子及其交换子在 Morrey 型空间的有界性 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2010,34(4):414-416.

[3] 曾志强,陈冬香. 具有 $H(m)$-型核的奇异积分算子交换子的双权 Lipsehitz 估计 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2011,35(6):601-604.

[4] Sawano Y,Tanaka H. Morrey spaces for non-doubling measures [J]. Acta Mathematica Sinica:English Series,2005,21:1535-1544.

[5] Ding Yong,Fan Dasan,Pan Yibao. *Lp* boundedness of Marcinkiewicz intergrals with Hardy functions kernel [J]. Acta Math Sinica:English Ser,2000,16(4):593-600.

[6] 陈冬香,吴丽丽. 具有非倍测度的 Marcinkiewicz 积分交换子 Morrey 空间的有界性 [J]. 数学物理学报,2011,31A(4):1105-1114.

[7] 陈晓莉,陈冬香. 具有非倍测度的 Marcinkiewicz 积分交换子的有界性 [J]. 数学年刊,2010,30A(3):375-384.

[8] 陆善真,吴强,杨大春. 交换子在 Hardy 空间上的有界

性[J]. 中国科学,2002,32(3):232-244.
[9] 李亮,周疆. 非倍测度下 Marcinkiewicz 积分交换子在 Hardy 空间中的有界性[J]. 高等应用数学学报,2013,28(2):145-153.
[10] 李冉. 带变量核参数型 Marcinkiewicz 积分有界性[J]. 北京师范大学学报:自然科学版,2007,23(6):599-605.
[11] 吴世旭,有界性核参数型 Marcinkiewicz 积分交换子端点估计[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2009,32(2):179-183.
[12] 左大伟,贾慧羡,王亚宁. 参数型 Marcinkiewicz 积分交换子端点估计[J]. 石家庄铁道大学学报,2011,24(1):105-110.
[13] Stein E M. On the functions of Littlewood-Paley,Lusin,and Marcinkiewicz[J]. Trans Amer Math Soc,1958,88:430-466.
[14] Paluszynski M. Characterization of the Besov spaces via commutors operator of coifman,Rochberg and Welss[J]. India Univ,Math J,1995,44(1):1-18.
[15] Tolsa X. The space H1for non doubling measures in terms of a grand maximal operator[J]. Trans Amer Math Soc,2003,355:315-348.
[16] García-Cuerva J,Gatto A E. Boundedness properties of fractional integral operators associated to non-doubling measures[J]. Studia Math,2004,162:245-261.
[17] Mo Huixia,Lu Shanzhen. Boundedness of generalized higher commutators of Marcinkiewicz integrals[J]. Acta Math Sci,2007,27B(4):852-866.

The Boundedness of Higher Order Commutators for the Parametric Marcinkiewicz Integral with Non-Doubling Measures

ZHOU Jiang,WANG Ding-huai

(College of Mathematics and System Sciences,Xinjiang University,Urumqi Xinjiang 830046,China)

Abstract: Under the assumption that μ only satisfies the polynomial growth condition,the $(L^p(\mu),L^q(\mu))$ boundedness of higher order commutator $M^{\rho}_{\vec{b}}f(x)$ generated by the parametric Marcinkiewicz integral and $Lip_{\beta}(\mu)$ function are estabished. And the boundedness on $H^1(\mu)$ spaces is also obtained,which promote some results on single linear parametric Marcinkiewicz integral commutators.

Key words: non-doubling measure; parametric Marcinkiewicz integral; $Lip_{\beta}(\mu)$ function; Hardy space

(责任编辑:曾剑锋)