文章编号:1000-5862(2014)02-0158-04

2阶齐次微分方程的次正规解

占燕燕,肖丽鹏*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要: 研究了周期系数的2阶齐次微分方程 $f''+[P_1(e^z)+Q_1(e^{-z})]f'+[P_2(e^z)+Q_2(e^{-z})]f=0$ 的次正规解的存在性及表示形式. 当 $Q_j(j=1,2)$ 的次数不同时,所得方程的次正规解的表示形式将会不同,完善了已有的结果.

关键词: 周期系数;次正规解;线性微分方程

中图分类号: O 174.52　　　　**文献标志码:** A

0 引言与主要结果

在文献[1]中,H. Wittich考虑2阶齐次线性微分方程

$$f''+P_1(e^z)f'+P_2(e^z)f=0, \tag{1}$$

其中 $P_1(z)$ 和 $P_2(z)$ 是关于 z 的多项式且不全为常数. 易知方程(1)的所有解为整函数.

在本文中,将使用值分布理论的标准记号[2],假设 $f(z)$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数,用 $T(r,f)$ 表示 $f(z)$ 的Nevanlinna理论中的特征函数.

假设 f 是方程(1)的非零解,如果 f 满足条件

$$\limsup_{r\to\infty}\log T(r,f)/r=0, \tag{2}$$

则称 f 是方程(1)的次正规解[1,3].

文献[4-5]中定义亚纯函数的 e-型级如下.

定义1 假设 f 是亚纯函数,则定义

$$\sigma_e(f)=\limsup_{r\to\infty}\log T(r,f)/r \tag{3}$$

为 f 的e-型级.

由(2)式和(3)式知,如果 $\sigma_e(f)=0$,则 f 是次正规的.

H. Wittich[1]研究了方程(1)的次正规解,在下面定理中给出所有次正规解的一般形式.

定理A 如果 f 是方程(1)的次正规解,则 f 一定有形式

$$f(z)=e^{cz}(a_0+a_1e^z+\cdots+a_me^{mz}),$$

其中 $m\geqslant 0$ 是整数,$c,a_0,\cdots,a_m$ 是常数且 $a_0a_m\neq 0$.

许多学者研究了方程(1)更一般的2阶或高阶线性微分方程的解的性质[6-8]. 文献[9-13]研究了比方程(1)更为一般的2阶齐次线性微分方程

$$f''+[P_1(e^z)+Q_1(e^{-z})]f'+[P_2(e^z)+Q_2(e^{-z})]f=0 \tag{4}$$

所有次正规解的表示形式. 在文献[9]中,得到以下几个结果.

定理B 设 $f(z)$ 是方程(4)的次正规解,其中 $P_1(z),P_2(z),Q_1(z),Q_2(z)$ 是关于 z 的多项式且不全为常数.

(i) 如果 $\deg P_1>\deg P_2$ 和 $P_2+Q_2\equiv 0$,则方程(4)的任一次正规解必为常数;

(ii) 如果 $\deg P_1>\deg P_2$ 和 $P_2+Q_2\not\equiv 0$,则 $f(z)$ 的表示形式为

$$f(z)=g_2(e^{-z}),$$

其中 $g_2(z)$ 是关于 z 的多项式且 $\deg\{g_2\}\geqslant 1$.

定理C 设 $f(z)$ 是方程(4)的次正规解,其中 $P_1(z),P_2(z),Q_1(z),Q_2(z)$ 是关于 z 的多项式且不全为常数. 如果 $\deg P_1<\deg P_2$,则方程(4)唯一的次正规解为 $f(z)\equiv 0$.

定理D 设 $f(z)$ 是方程(4)的次正规解,其中 $P_1(z),P_2(z),Q_1(z),Q_2(z)$ 是关于 z 的多项式且不全为常数. 如果 $\deg P_1=\deg P_2\geqslant 1$,则 $f(z)$ 的表示形式为

$$f(z)=e^{\beta_1 z}[g_1(e^z)+g_2(e^{-z})]+e^{\beta_2 z}[g_3(e^z)+g_4(e^{-z})],$$

其中 β_1,β_2 是复常数,$g_j(z)(j=1,2,3,4)$ 是关于 z 的多项式.

定理B~定理D根据方程(4)中的系数 $P_j(e^z)(j=1,2)$ 之间的关系,得到了方程(4)的次正规解

收稿日期:2014-01-08

基金项目:国家自然科学基金(11301232,11171119),江西省自然科学基金(20132BAB211009)和江西省教育厅青年科学基金(GJJ12207)资助项目.

通信作者:肖丽鹏(1979-),女,江西吉安人,副教授,主要从事复分析研究.

的具体表示形式. 一个自然的问题是：如果研究方程(4) 中的系数 $Q_j(e^{-z})$ $(j=1,2)$ 之间的关系，则方程(4) 的次正规解又有如何的具体表示形式？本文对这个问题进行了研究，得到如下结果.

定理 1　设 $f(z)$ 是方程(4) 的次正规解，其中 $P_1(z)$, $P_2(z)$, $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ 是关于 z 的多项式且不全为常数.

(i) 如果 $\deg Q_1 > \deg Q_2$ 和 $P_2+Q_2\equiv 0$，则方程(4) 的任一次正规解必为常数；

(ii) 如果 $\deg Q_1 > \deg Q_2$ 和 $P_2+Q_2\not\equiv 0$，则 $f(z)$ 的表示形式为

$$f(z)=g_1(e^z),$$

其中 $g_1(z)$ 是关于 z 的多项式且 $\deg\{g_1\}\geqslant 1$.

定理 2　设 $f(z)$ 是方程(4) 的次正规解，其中 $P_1(z)$, $P_2(z)$, $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ 是关于 z 的多项式且不全为常数. 如果 $\deg Q_1=\deg Q_2\geqslant 1$，则 $f(z)$ 的表示形式为

$$f(z)=e^{\beta_1 z}[g_1(e^z)+g_2(e^{-z})]+e^{\beta_2 z}[g_3(e^z)+g_4(e^{-z})],\tag{5}$$

其中 β_1, β_2 是复常数，$g_j(z)$ $(j=1,2,3,4)$ 是关于 z 的多项式.

1　证明所需引理

下面假设 $P_1(e^z)=a_{1m_1}e^{m_1z}+\cdots+a_{11}e^z+a_{10}$,

$Q_1(e^{-z})=a_{2m_2}e^{-m_2z}+\cdots+a_{21}e^{-z}+a_{20}$,

$P_2(e^z)=b_{1n_1}e^{n_1z}+\cdots+b_{11}e^z+b_{10}$,

$Q_2(e^{-z})=b_{2n_2}e^{-n_2z}+\cdots+b_{21}e^{-z}+b_{20}$,

其中 $a_{jm_j},\cdots,a_{j0},b_{jn_j},\cdots,b_{j0}$ $(j=1,2)$ 是常数，$m_j\geqslant 1$, $n_j\geqslant 0$ 是整数，$a_{jm_j}\neq 0$, $b_{jn_j}\neq 0$.

注 1　由上面 P_j 和 Q_j $(j=1,2)$ 的定义，能得到

$$|P_1(e^z)+Q_1(e^{-z})|=\begin{cases}|a_{1m_1}|e^{m_1r\cos\theta}(1+o(1)), & \arg z=\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\\ |a_{2m_2}|e^{-m_2r\cos\theta}(1+o(1)), & \arg z=\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right),\\ M, & \arg z=\pi/2\text{ 或 }-\pi/2;\end{cases}$$

$$|P_2(e^z)+Q_2(e^{-z})|=\begin{cases}|b_{1n_1}|e^{n_1r\cos\theta}(1+o(1)), & \arg z=\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\\ |b_{2n_2}|e^{-n_2r\cos\theta}(1+o(1)), & \arg z=\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right),\\ M, & \arg z=\pi/2\text{ 或 }-\pi/2,\end{cases}$$

其中 $r\to\infty$, $M(>0)$ 为某常数.

引理 1　设整函数 $f(z)$ 是 n 阶微分方程

$$P_0(e^z,e^{-z})f^{(n)}+P_1(e^z,e^{-z})f^{(n-1)}+\cdots+P_n(e^z,e^{-z})f=P_{n+1}(e^z,e^{-z})\tag{6}$$

的次正规解，其中 $P_j(e^z,e^{-z})$ $(j=0,1,\cdots,n+1)$ 是关于 e^z 和 e^{-z} 的多项式且 $P_0(e^z,e^{-z})\not\equiv 0$. 如果 $f(z)$ 可以表示为 $f(z)=e^{\beta z}G(e^z)$，其中 β 是复常数，$G(\xi)$ 在 $0<|\xi|<\infty$ 上解析，则 $f(z)$ 的表示形式为

$$f(z)=e^{\beta z}[g_1(e^z)+g_2(e^{-z})],$$

其中 $g_1(z)$, $g_2(z)$ 是关于 z 的多项式.

引理 2　设整函数 $f(z)$ 是方程(6) 的次正规解，其中 $P_j(e^z,e^{-z})$ $(j=0,1,\cdots,n+1)$ 是关于 e^z 和 e^{-z} 的多项式且 $P_0(e^z,e^{-z})\not\equiv 0$. 如果 $f(z)$ 和 $f(z+2\pi i)$ 线性相关，则 $f(z)$ 的表示形式为

$$f(z)=e^{\beta z}[g_1(e^z)+g_2(e^{-z})],$$

其中 β 是复常数，$g_1(z)$, $g_2(z)$ 是关于 z 的多项式.

引理 3[14]　设 $f(z)$ 是超越亚纯函数，$\alpha>1$ 是一个给定的实数，$k>j\geqslant 0$，则 $\exists C=C(\alpha)>0$，使得下面 2 个结论成立，其中 $r=|z|$.

(i) 存在线测度为 0 的集合 $E_1\subset[-\pi,\pi)$，满足 $\psi\in[-\pi,\pi)\backslash E_1$，则存在常数 $R=R(\psi)>0$，使得对所有满足 $\arg z=\psi$ 和 $|z|\geqslant R$ 的 z，有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\leqslant C\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha}r\log T(\alpha r,f)\right)^{k-j};\tag{7}$$

(ii) 存在具有有限对数测度的集合 $E_2\subset(1,\infty)$，使得对所有满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$ 的 z 也有 (7) 式成立.

注 2　在引理 3(i) 中，如果 $\psi\in[-\pi,\pi)\backslash E_1$ 由 $\psi\in[-\pi/2,3\pi/2)\backslash E_1$ 来替代，(7) 式也成立. 从引理 3(ii) 的证明可知，例外集 E_2 满足：如果 a_n, b_n $(n=1,2,\cdots)$ 分别表示 $f(z)$ 的所有零点和极点，$O(a_n)$, $O(b_n)$ 分别表示 a_n, b_n 的充分小的邻域，则

$$E_2=\left\{|z|:z\in\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}O(a_n)\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}O(b_n)\right)\right\}.$$

所以，如果 $f(z)$ 是超越整函数，z 是使得 $|f(z)|$ 充分大的点，则(7) 式也成立.

引理 4[15]　设 $f(z)$ 在射线 $\arg z=\theta$ 上解析，如果对某常数 $\alpha>1$，当 z 沿着射线 $\arg z=\theta$ 趋于 $+\infty$ 时，有

$$|f'(z)/f(z)|=o(|z|^{-\alpha}),$$

则存在常数 $c\neq 0,\infty$，使得当 z 沿着射线 $\arg z=\theta$ 趋于 $+\infty$ 时，有 $f(z)\to c$.

引理 5　设 $f(z)$ 是方程(4) 的次正规解，其中 $P_1(z)$, $P_2(z)$, $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ 是关于 z 的多项式且不全为常数，则 $f(z)$ 的表示形式为

$$f(z)=e^{\beta z}[g_1(e^z)+g_2(e^{-z})],$$

其中 β 是复常数，$g_j(z)$ $(j=1,2)$ 是关于 z 的多项式.

2 定理的证明

定理 1 的证明 (i) 假设 $\deg Q_1 > \deg Q_2$ 和 $P_2 + Q_2 \equiv 0$,且 $f(z)$ 是方程

$$f'' + [P_1(e^z) + Q_1(e^{-z})] f' = 0 \tag{8}$$

的次正规解.

注意到任一常数均为方程(8)的解,下面证方程(8)的任一非常数解均不是次正规解. 现在假设 $f(z)$ 为一非常数且为方程(8)的次正规解. 由(8)式有

$$f''/f' = -[P_1(e^z) + Q_1(e^{-z})]. \tag{9}$$

由$\deg Q_1 > \deg Q_2$和(8)式知,$f(z)$不可能为非常数多项式. 若不然,则由取 $z = -r$ 和(8)式及注 1 知

$$|a_{2m_2}|e^{m_2 r}(1 + o(1)) = |P_1(e^z) + Q_1(e^{-z})| = |f''/f'|,$$

比较方程两边的增长性,可得矛盾,因此$f(z)$是超越整函数.

由引理 3(ii)可知存在子集 $E_2 \subset (1,\infty)$ 具有有限对数测度和一仅依赖于 α 和 k,j 的常数 $B > 0$,满足对所有满足 $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$ 的 z 有

$$|f''/f'| \leqslant B[T(2r,f)]^2. \tag{10}$$

取 $z = -r$,由(9)式和(10)式及注 1,可知对充分大的 $r \notin [0,1] \cup E_2$ 有

$$|a_{2m_2}|e^{m_2 r}(1 + o(1)) = |P_1(e^z) + Q_1(e^{-z})| = |f''/f'| \leqslant B[T(2r,f)]^2.$$

因此

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \log T(2r,f)/2r \geqslant m_2/2 > 0$$

与 $\sigma_e(f) = 0$ 矛盾. 从而任一非常数$f(z)$都不是方程(8)的次正规解,即(i)得证.

(ii) 设$f(z)$是方程(4)的次正规解,则由引理5知,$f(z)$的一般表示形式为

$$f(z) = e^{\beta z}[g_1(e^z) + g_2(e^{-z})], \tag{11}$$

其中β是复常数,$g_j(z)$ $(j = 1,2)$ 是关于z的多项式. 由于方程(4)中$\deg Q_1 > \deg Q_2$和$P_2 + Q_2 \not\equiv 0$,则方程(4)的解不可能为常数. 进一步地,如果$f(z)$是次数 $\geqslant 1$ 的多项式,那么由取 $z = -r$ 和观察方程(4)两边的增长性可得矛盾,所以 $f(z)$ 也不可能为多项式.

下面考虑$f(z)$是超越整函数,根据引理3(i)和 $\sigma_e(f) = 0$ 知,存在线测度为0的集合 $E_1 \subset [-\pi/2, 3\pi/2)$,满足 $\psi \in [-\pi/2, 3\pi/2) \setminus E_1$, $\forall \varepsilon > 0$,当 z 沿着射线 $\arg z = \psi$ 趋于 $+\infty$ 时,有

$$\left|\frac{f'}{f}\right| \leqslant B\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha} r\log T(\alpha r,f) \leqslant e^{\varepsilon|z|}, \tag{12}$$

$$\left|\frac{f''}{f}\right| \leqslant B\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha} r\log T(\alpha r,f)^2 \leqslant e^{\varepsilon|z|}. \tag{13}$$

另一方面,由方程(4)有

$$\frac{f'}{f} = -\frac{P_2(e^z) + Q_2(e^{-z})}{P_1(e^z) + Q_1(e^{-z})} - \frac{1}{P_1(e^z) + Q_1(e^{-z})}\frac{f''}{f}. \tag{14}$$

如果 $\psi \in [\pi/2, 3\pi/2) \setminus E_1$,则根据(12)~(14)式及注 1 知,对任意给定的 $\mu > 1$,当 z 沿着射线 $\arg z = \psi$ 趋于 $+\infty$ 时,有

$$\left|\frac{f'}{f}\right| \leqslant \left|\frac{P_2(e^z) + Q_2(e^{-z})}{P_1(e^z) + Q_1(e^{-z})}\right| + \left|\frac{1}{P_1(e^z) + Q_1(e^{-z})}\right|\left|\frac{f''}{f}\right| = o(|z|^{-\mu}).$$

根据引理 4 知,存在常数 $c \neq 0,\infty$,使得当 z 沿着射线 $\arg z = \psi$ 趋于 $+\infty$ 时,有

$$f(z) \to c. \tag{15}$$

比较(11)式和(15)式,可知(11)式中的 $\beta = \deg g_2$,从而$f(z)$的表示形式退化为$f(z) = g_1(e^z)$,其中 $g_1(z)$ 是关于 z 的多项式且 $\deg g_1 \geqslant 1$. 即(ii)得证.

定理 2 的证明 设$f(z)$是方程(4)的次正规解,则$f(z + 2\pi i)$也是方程(4)的次正规解. 从而 $f(z) - f(z + 2\pi i)$ 也是方程(4)的次正规解.

如果$f(z) - f(z + 2\pi i) \equiv 0$,则由引理 2 可知 $f(z)$ 的表示形式为

$$f(z) = e^{\beta z}[g_1(e^z) + g_2(e^{-z})],$$

其中β是复常数,$g_1(z)$,$g_2(z)$是关于z的多项式. 显然$f(z)$具有(5)式的表示形式.

如果$f(z) - f(z+2\pi i) \not\equiv 0$,因$f(z) - f(z+2\pi i)$是方程(4)的次正规解,则由引理 5 知

$$f(z) - f(z + 2\pi i) = e^{\beta_1 z}[g_1(e^z) + g_2(e^{-z})], \tag{16}$$

其中 β_1 是复常数,$g_1(z)$,$g_2(z)$ 是关于 z 的多项式.

下面分 2 种情形讨论

情形 1 假设(16)式中的 β_1 不是整数,令

$$g(z) = f(z) + \frac{1}{e^{2\pi i\beta_1} - 1}e^{\beta_1 z}[g_1(e^z) + g_2(e^{-z})], \tag{17}$$

则由(16)式和(17)式知,$g(z)$是方程(4)的次正规解且 $g(z) \equiv g(z + 2\pi i)$. 从而由引理 2 知

$$g(z) = e^{\beta_2 z}[g_3(e^z) + g_4(e^{-z})], \tag{18}$$

其中 β_2 是复常数,$g_3(z)$,$g_4(z)$ 是关于 z 的多项式. 结合(17)式和(18)式有

$$f(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi i\beta_1}}e^{\beta_1 z}[g_1(e^z) + g_2(e^{-z})] + e^{\beta_2 z}[g_3(e^z) + g_4(e^{-z})].$$

这表明$f(z)$具有(5)式的表示形式.

情形 2 假设(16)式中 β_1 是整数,α 是 1 个非零常数满足

$$\deg\{Q_2-\alpha Q_1\}<\deg Q_1=\deg Q_2. \tag{19}$$

令

$$h(z)=e^{\alpha z}f(z). \tag{20}$$

因为$f(z)$是方程(4)的次正规解,所以$h(z)$是方程

$$h''+[P_3(e^z)+Q_3(e^{-z})]h'+[P_4(e^z)+Q_4(e^{-z})]h=0 \tag{21}$$

的次正规解,其中

$$P_3(e^z)=P_1(e^z)-2\alpha,\ Q_3(e^{-z})=Q_1(e^{-z}),$$
$$P_4(e^z)=P_2(e^z)-\alpha P_1(e^z)+\alpha^2,$$
$$Q_4(e^{-z})=Q_2(e^{-z})-\alpha Q_1(e^{-z}).$$

因此,$P_3(z)$,$P_4(z)$,$Q_3(z)$,$Q_4(z)$是关于z的多项式,且由(19)式知,$\deg Q_3>\deg Q_4$.

下面需要考虑 2 种子情形.

情形2.1　若(21)式中$P_4+Q_4\equiv 0$,因$\deg Q_3>\deg Q_4$,则由定理1(i)知$h(z)\equiv c$,其中c是常数.结合(20)式知$f(z)=ce^{-\alpha z}$.这表明$f(z)$具有(5)式的表示形式.

情形2.2　若(21)式中$P_4+Q_4\not\equiv 0$,因$\deg Q_3>\deg Q_4$,则由定理1(ii)知$h(z)=g_3(e^z)$,其中$g_3(z)$是关于z的多项式且$\deg g_3\geqslant 1$,结合(20)式知$f(z)=e^{-\alpha z}g_3(e^z)$,即$f(z)$具有(5)式的表示形式.

综上所述,定理 2 证毕.

3　参考文献

[1] Wittich H. Subnormale lösungen der differentialgleichung $w''+p(e^z)w'+q(e^z)w=0$ [J]. Nagoya Math J,1967,30:29-37.

[2] 杨乐.值分布论及其新研究 [M].北京:科学出版社,1982.

[3] Huang Zhibo,Xia Xiaohua,Li Qian. Subnormal solutions of second order nonhomogeneous linear periodic differential equations [J]. Commun Nonlinea Sci Numer Simulat,2010,15(4):881-885.

[4] Chiang Y M,Gao Shian. On a problem in complex oscillation theory of periodic second order linear differential equation and some related perturbation results [J]. Ann Acad Sci Fenn Math,2002,27(2):273-290.

[5] Gundersen G G,Steinbart E M. Subnormal solutions of second order linear differential equations with periodic coefficients [J]. Results in Math,1994,25(3/4):270-289.

[6] 江良英,陈宗煊.某类高阶整函数系数微分方程解的增长性 [J].江西师范大学学报:自然科学版,2005,29(1):12-14.

[7] 黄志刚,陈宗煊.关于齐次线性微分方程的复振荡 [J].江西师范大学学报:自然科学版,2000,24(1):6-11.

[8] 冯斌,刘慧芳,李延玲.一类高阶微分方程解的增长性 [J].江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(4):335-338.

[9] 黄志波,陈宗煊.周期系数二阶齐次线性微分方程的次正规解 [J].数学学报:中文版,2009,52(1):9-16.

[10] 邱玲,易才凤.一类高阶微分方程解的增长率 [J].江西师范大学学报:自然科学版,2003,27(1):25-29.

[11] 陈宗煊.关于二阶线性周期微分方程的次正规解 [J].中国科学,2007,37(3):361-374.

[12] 丁友生,易才凤.关于n阶线性周期微分方程的次正规解 [J].江西师范大学学报:自然科学版,2009,33(1):1-4.

[13] Urabe H,Yang Congjun. On factorization of entire functions satisfying differential equations [J]. Kodai Math J,1991,14(1):123-133.

[14] Gundersen G G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function,plus similar estimates [J]. J London Math Soc,1988,37(2):88-104.

[15] Gundersen G G. Finite order solutions of second order linear differential equations [J]. Trans Amer Math Soc,1988,305(1):415-429.

The Subnormal Solutions of Second Order Homogeneous Differential Equations

ZHAN Yan-yan, XIAO Li-peng

(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: The representations of all subnormal solutions of second order homogeneous linear differential equations $f''+[P_1(e^z)+Q_1(e^{-z})]f'+[P_2(e^z)+Q_2(e^{-z})]f=0$ are investigated. When the degrees of $Q_j(j=1,2)$ are different, the representations of subnormal solutions of equations will be different,which complete the existing results.

Key words: periodic coefficient; subnormal solutions; linear differential equation

(责任编辑:王金莲)