第38卷 第2期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 2
2014年3月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Mar. 2014

文章编号:1000-5862(2014)02-0162-05

高阶非齐次线性微分方程解沿径向的振荡性质

胡 军,易才凤*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:运用角域上值分布的理论和方法,研究了高阶非齐次线性微分方程的无穷级解沿径向上的振荡性质,得到了方程的无穷级解沿 Borel 方向上的超级和超级零点收敛指数的估计.

关键词:微分方程;解;角域;径向;Borel 方向;超级

中图分类号:O 174.52 **文献标志码**:A

0 引言与结果

假定读者熟悉 Nevanlinna 值分布的基本理论和标准记号[1-2].用 $T(r,f)$,$\sigma(f)$,$\mu(f)$,$\lambda(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的特征函数、增长级、下级和零点收敛指数.用 $\sigma_p(f)$,$\lambda_p(f)$ 分别表示 $f(z)$ 的 p 次迭代级和 p 次迭代级零点收敛指数[3-4].

本文研究了整系数高阶非齐次线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=F \quad (1)$$

的无穷级解沿径向上的振荡性质.

为叙述和证明定理,需要介绍亚纯函数在角域上的相关记号与概念.

定义1 设 $0<\alpha<\beta\leqslant 2\pi$,则复平面上的角域定义为

$$\Omega(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\},$$
$$\overline{\Omega}(\alpha,\beta,r)=\{z:\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta,|z|\leqslant r\}.$$

并记

$$\Omega_{\theta,\varepsilon}=\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)=\{z:\theta-\varepsilon<\arg z<\theta+\varepsilon\}.$$

若 f 为整函数,记

$$M(r,\overline{\Omega}(\alpha,\beta),f)=\sup\{|f(te^{i\theta})|:\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0<t\leqslant r\}.$$

若 f 为亚纯函数,记

$$A_{\alpha,\beta}(r,f)=\frac{k}{\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^k}-\frac{t^k}{r^{2k}}\right)\left\{\log^+|f(te^{i\alpha})|+\log^+|f(te^{i\beta})|\right\}\frac{dt}{t};$$

$$B_{\alpha,\beta}(r,f)=\frac{2k}{\pi r^k}\int_\alpha^\beta\log^+|f(re^{i\theta})||\sin k(\theta-\alpha)|d\theta;$$

$$C_{\alpha,\beta}(r,f)=2\sum_{b_\nu\in\Delta}\left(\frac{1}{|b_\nu|^k}-\frac{|b_\nu|^k}{r^{2k}}\right)\sin k(\beta_\nu-\alpha),$$

其中 $k=\pi/(\beta-\alpha)$,$b_\nu=|b_\nu|e^{i\beta_\nu}$ 为 $f(z)$ 在扇形区域 $\Delta=\{z:\alpha<\arg z<\beta,1\leqslant|z|\leqslant r\}$ 内的极点,重级极点按重数计算.进一步定义

$$D_{\alpha,\beta}(r,f)=A_{\alpha,\beta}(r,f)+B_{\alpha,\beta}(r,f),$$
$$S_{\alpha,\beta}(r,f)=C_{\alpha,\beta}(r,f)+D_{\alpha,\beta}(r,f).$$

定义2[5] 令 $p\in\mathbf{N}$,$f(z)$ 在角域 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)$ 上的 p 次迭代级零点收敛指数定义为

$$\lambda_{p,\theta,\varepsilon}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^{[p]}n(r,\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),f=0)}{\log r},$$

则 $f(z)$ 沿径向 $\arg z=\theta$ 上的 p 次迭代级零点收敛指数定义为

$$\lambda_{p,\theta}(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_{p,\theta,\varepsilon}(f).$$

特别地,当 $p=2$ 时,$f(z)$ 沿径向上的 p 次迭代级零点收敛指数称为径向上 $f(z)$ 的超级零点收敛指数,记为 $\lambda_{2,\theta}(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_{2,\theta,\varepsilon}(f)$.

定义3 令 $p\in\mathbf{N}$,且 $f(z)$ 是 p 次迭代级为 ρ $(0<\rho\leqslant\infty)$ 的亚纯函数.如果对任意小的正数 ε,$0<\varepsilon<\pi/2$,$f(z)$ 对任意的复数 $a\in C_\infty$ 都有

$$\limsup_{r\to\infty}\log^{[p]}n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=a)/\log r=\rho$$

成立,至多除去2个例外的复数,则称射线 $L:\arg z=\theta$ 为 f 的 p 次迭代 ρ 级 Borel 方向.

特别地,当 $p=2$ 时,f 的 p 次迭代 ρ 级 Borel 方向称为 f 的1条超级为 ρ 的 Borel 方向.

关于方程(1)在全平面上的超级的整体振荡性

收稿日期:2013-10-20

基金项目:国家自然科学基金(11171170)资助项目.

通信作者:易才凤(1955-),女,江西吉安人,教授,主要从事复分析方向研究.

质，前人取得了不少研究成果[6-12]，特别地，陈宗煊等在文献[5]中得到了如下结果.

定理 A　设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数，F 是不恒为 0 的整函数，若存在 $A_s(s\in\{0,\cdots,k-1\})$ 满足 $b=\max\{\sigma(F),\sigma(A_j)(j\neq s)\}<\sigma(A_s)<1/2$，则微分方程(1)的每 1 个超越解满足

$$\sigma_2(f)=\overline{\lambda}_2(f)=\sigma(A_s).$$

定理 B　设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数，

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\{\sigma(A_j)\}<\sigma(A_0)<\infty,$$

F 是不恒为 0 的整函数，且 $\sigma(F)<\infty$，则方程(1)的所有解满足 $\sigma_2(f)=\overline{\lambda}_2(f)=\sigma(A_0)$，至多有 1 个例外解 f_0.

最近，吴昭君受文献[12-13]的启发，在文献[5]中讨论了与方程(1)相应的齐次方程

$$f^{(k)}+A_{k-2}f^{(k-2)}+\cdots+A_0f=0 \tag{2}$$

的解沿径向上的振荡性质，得到如下结果.

定理 C　设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-2}$ 中的某些(或全部)为超越整函数，且 $p=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant k-2}\{i(A_j)\}<\infty$. 设 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 为方程(2)的 1 组基础解系，并令 $E=f_1\cdots f_k$，那么 $i(E)\leqslant(p+1)$. 如果 $\sigma_{(p+1)}(E)=\rho>0$，则以下结论等价：

(i) $L:\arg z=\theta$ 是 E 的 $p+1$ 次迭代 ρ 级 Borel 方向；

(ii) $\lambda_{p+1,\theta}(E)=\rho$；

(iii) $\forall\varepsilon>0$，$\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log^{[p+2]}M(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},E)}{\log r}=\rho$，

其中 $i(A_j)$ 为系数 $A_j(z)$ 的迭代级增长指标.

定理 A 和定理 B 帮助笔者对整系数高阶微分方程(1)的解在全平面上的增长级有了一定认识. 接下来进一步研究解的超级 Borel 方向、解沿径向上的超级和沿径向上的超级零点收敛指数，这样将会对解的性质有更深入的认识. 本文证明了如下定理.

定理 1　假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 为有限级整函数，F 是不恒为 0 的有限级整函数. 若 f 为方程(1)的超越解，且满足 $\sigma_2(f)=\rho(0<\rho<\infty)$，则以下结论等价：

(i) $L:\arg z=\theta$ 是解 f 的超级为 ρ 的 Borel 方向；

(ii) $\lambda_{2,\theta}(f)=\rho$；

(iii) $\forall\varepsilon>0$，$\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log^{[3]}M(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f)}{\log r}=\rho$.

定理 2　假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 为有限级整函数，F 是不恒为 0 的有限级整函数，若存在 $A_s(s\in\{0,\cdots,k-1\})$ 满足

$b=\max\{\sigma(F),\sigma(A_j)(j\neq s)\}<\sigma(A_s)<1/2$，

则对方程(1)的所有超越解 f，以下结论等价：

(i) $L:\arg z=\theta$ 是解 f 的超级为 $\sigma(A_s)$ 的 Borel 方向；

(ii) $\lambda_{2,\theta}(f)=\sigma(A_s)$；

(iii) $\forall\varepsilon>0$，$\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log^{[3]}M(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f)}{\log r}=\sigma(A_s)$.

定理 3　假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 为整函数，

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}\{\sigma(A_j)\}<\sigma(A_0)<\infty,$$

F 是不恒为 0 的整函数，且 $\sigma(F)<\infty$，则对方程(1)的所有超越解 f 以下结论等价，至多有 1 个例外解 f_0.

(i) $L:\arg z=\theta$ 是解 f 的超级为 $\sigma(A_0)$ 的 Borel 方向；

(ii) $\lambda_{2,\theta}(f)=\sigma(A_0)$；

(iii) $\forall\varepsilon>0$，$\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log^{[3]}M(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f)}{\log r}=\sigma(A_0)$.

1　引理

定理的证明需要用到以下引理.

引理 1[14]　设 $f(z)$ 为角域 $\Omega(\alpha,\beta)(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 上的非常数亚纯函数，则 $\forall a\in\mathbf{C}$，有

$$S_{\alpha,\beta}(r,1/(f-a))=S_{\alpha,\beta}(r,f)+\varepsilon(r,a),$$

其中当 $r\to\infty$ 时，$\varepsilon(r,a)=O(1)$.

引理 2　设 $f(z)$ 为角域 $\Omega(\alpha,\beta)(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 上的非常数亚纯函数，则 $\forall a_j\in C_\infty$，$j=1,2,\cdots,q$，有

$$(q-2)S_{\alpha,\beta}(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{q}\overline{C}_{\alpha,\beta}(r,1/(f-a_j))+O(\log rT(r,f)),\ r\notin E,$$

其中 E 是 1 个线性测度有限的集合.

引理 3[15]　设 $f(z)$ 为角域 $\Omega(\alpha,\beta)(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi)$ 上的非常数亚纯函数，则 $\forall r<R$，有

$$A_{\alpha,\beta}(r,f'/f)\leqslant K\left\{\left(\frac{R}{r}\right)^k\int_1^R\frac{\log^+T(t,f)}{t^{1+k}}\mathrm{d}t+\log^+\frac{r}{R-r}+\log\frac{R}{r}+1\right\},$$

$$B_{\alpha,\beta}(r,f'/f)\leqslant\frac{4k}{r^k}m(r,f'/f),$$

其中 $k=\pi/(\beta-\alpha)$，K 为 1 个不依赖于 r 和 R 的正常数.

引理 4　令 $p\in\mathbf{N}$ 且 $p>1$，f 是 1 个满足 $\sigma_p(f)=\rho(0<\rho<\infty)$ 的亚纯函数. 1 条射线 $L:\arg z=\theta$ 是 f 的 p 次迭代 ρ 级 Borel 方向的充要条件为：$\forall\varepsilon(0<\varepsilon<\pi/2)$，在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内，有

$$\limsup_{r\to\infty}\log^{[2]}S_{\theta,\varepsilon}(r,f)/\log r=\rho.$$

引理 5 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 为有限级整函数,F 是不恒为 0 的有限级整函数,f 是方程(1)的解,且满足 $\sigma_2(f)=\rho(\rho<\infty)$,则 $\forall\theta\in[0,2\pi]$ 以及充分小的 $\varepsilon>0$,在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内,当 r 充分大时,有

$$S_{\theta,\varepsilon}(r,f)=C_{\theta,\varepsilon}(r,1/f)+O(1).$$

证 假设 f 为方程(1)的解,且 $\sigma_2(f)=\rho(\rho<\infty)$,将方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+A_{k-2}f^{(k-2)}+\cdots+A_0f=F$$

变形为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}}{f}+A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+A_1\frac{f'}{f}+A_0\right).\quad(3)$$

根据引理 1,$\forall\varepsilon>0$ 和 $\theta\in[0,2\pi]$,在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内,当 $r\to\infty$ 时,有

$$S_{\theta,\varepsilon}(r,f)=S_{\theta,\varepsilon}(r,1/f)+O(1)=$$
$$D_{\theta,\varepsilon}(r,1/f)+C_{\theta,\varepsilon}(r,1/f)+O(1).\quad(4)$$

已知 F 为有限级整函数,不妨设 $\sigma(F)=\rho_0$,$\forall\varphi\in\Omega_{\theta,\varepsilon}$,有

$$\rho_0=\limsup_{r\to\infty}\log\log M(r,F)/\log r\geqslant$$
$$\limsup_{r\to\infty}\log\log|F(re^{i\varphi})|/\log r,$$

故当 r 充分大时,$\forall\eta>0$,有 $\log|F(re^{i\varphi})|<r^{\rho_0+\eta}$.

再由 $A_{\alpha,\beta},B_{\alpha,\beta}$ 的定义知,当 r 充分大并取 η 和 ε 满足 $\rho_0+\eta<k=\pi/2\varepsilon$ 时,有

$$D_{\theta,\varepsilon}(r,F)=A_{\theta,\varepsilon}(r,F)+B_{\theta,\varepsilon}(r,F)=O(1).\quad(5)$$

又 $\lambda(F)\leqslant\sigma(F)=\rho_0$,故

$$\limsup_{r\to\infty}\log n(r,F=0)/\log r\leqslant\rho_0,$$

即 $n(r,F=0)\leqslant r^{\rho_0+\eta}$.

设 $a_v=|a_v|e^{i\theta_v}$ 为 F 在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内的所有零点,由 $C_{\alpha,\beta}$ 定义知

$$C_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{1}{F}\right)=2\sum_{\substack{a_v\in\Omega_{\theta,\varepsilon}\\1\leqslant|a_v|\leqslant r}}\left(\frac{1}{|a_v|^k}-\frac{|a_v|^k}{r^{2k}}\right)\sin k(\theta_v-$$
$$\theta+\varepsilon)\leqslant2\sum_{\substack{a_v\in\Omega_{\theta,\varepsilon}\\1\leqslant|a_v|\leqslant r}}\left(\frac{1}{|a_v|^k}\right)=2\int_1^r\frac{dn(t)}{t^k}=$$
$$2\left(\frac{n(t)}{t^k}\Big|_1^r+k\int_1^r\frac{n(t)}{t^{k+1}}dt\right),$$

其中 $n(t)=n(t,\Omega_{\theta,\varepsilon},F=0)$.因 $n(t,\Omega_{\theta,\varepsilon},F=0)\leqslant n(t,F=0)\leqslant t^{\rho_0+\eta}$,则有

$$C_{\theta,\varepsilon}(r,1/F)=O(1).\quad(6)$$

故

$$D_{\theta,\varepsilon}(r,1/F)=S_{\theta,\varepsilon}(r,F)-C_{\theta,\varepsilon}(r,1/F)+O(1)=$$
$$D_{\theta,\varepsilon}(r,F)+C_{\theta,\varepsilon}(r,F)-C_{\theta,\varepsilon}(r,1/F)+O(1).$$

由 F 为整函数知 $C_{\theta,\varepsilon}(r,F)=0$,则结合(5)~(6)式,有

$$D_{\theta,\varepsilon}(r,1/F)=O(1).\quad(7)$$

因 $A_i(i=0,1,\cdots,k-1)$ 也为有限级的整函数,类似于 $D_{\theta,\varepsilon}(r,F)$ 的估计,有

$$D_{\theta,\varepsilon}(r,A_i)=O(1).\quad(8)$$

对满足引理 5 条件的解 f,由引理 3 知,$\forall\theta\in[0,2\pi]$ 及充分小的 ε(ε 满足 $\rho+1<\pi/(2\varepsilon)$),当取 $R=2r$ 时,有

$$A_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O\left(\int_1^{2r}\frac{\log^+T(t,f)}{t^{1+\frac{\pi}{2\varepsilon}}}dt\right)=$$
$$O\left(\int_1^{2r}\frac{t^{\rho+1}}{t^{1+\frac{\pi}{2\varepsilon}}}dt\right)=O(1).$$

因 $m(r,f'/f)=O(\log rT(r,f))=O(r^{\rho+1})$,再由引理 3,当 r 充分大时,

$$B_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant\frac{4(\pi/(2\varepsilon))}{r^{\pi/(2\varepsilon)}}m\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O(1).$$

所以,当 r 充分大时,

$$D_{\theta,\varepsilon}(r,f'/f)=O(1).\quad(9)$$

又因为

$$D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{f^{(h)}}{f}\right)\leqslant\sum_{l=1}^{h}D_{\theta,\varepsilon}\left(r,\frac{f^{(l)}}{f^{(l-1)}}\right)+O(1),\quad(10)$$

其中 $h=2,3,\cdots,k$.

所以由(3)式,(7)~(10)式得,当 r 充分大时,

$$D_{\theta,\varepsilon}(r,1/f)\leqslant D_{\theta,\varepsilon}(r,1/F)+\sum_{i=0}^{k-1}D_{\theta,\varepsilon}(r,A_i)+$$
$$\sum_{h=1}^{k}D_{\theta,\varepsilon}(r,f^{(h)}/f)+O(1)=O(1).\quad(11)$$

将(11)式代入(4)式知,当 r 充分大时,有

$$S_{\theta,\varepsilon}(r,f)=C_{\theta,\varepsilon}(r,1/f)+O(1),$$

即引理 5 证毕.

引理 6 设 f 在角域 $\Omega_{\alpha,\beta}$ 内解析,则有

$$\log M(r,\Omega_{\alpha,\beta},f)\leqslant Kr^k\{S_{\alpha,\beta}(2r,f)+1\}$$

成立,其中 $k=\pi/(\beta-\alpha)$,

$$M(r,\Omega_{\alpha,\beta},f)=\sup\left\{|f(te^{i\tau})|:\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta,1\leqslant t\leqslant r\right\},$$

K 是一正常数.

2 定理的证明

定理 1 的证明 假设 f 是方程(1)的解,且满足 $\sigma_2(f)=\rho(0<\rho<\infty)$.

(Ⅰ)证明(i)和(ii)等价.

假设 $L:\arg z=\theta$ 是 f 超级为 ρ 的 Borel 方向.根据引理 4,对任何正数 ε,$0<\varepsilon<\pi/2$,

$$\limsup_{r\to\infty}\log\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)/\log r=\rho$$

在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内成立.再结合引理 5,可推出

$$\limsup_{r\to\infty}\log\log C_{\theta,\varepsilon}(r,1/f)/\log r=\rho.$$

注意到 $C_{\theta,\varepsilon}(r,1/f) \leqslant 2n(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f=0)$，便有 $\rho \leqslant \lambda_{2,\theta}(f) \leqslant \sigma_2(f) = \rho$，所以有

$$\lambda_{2,\theta}(f) = \rho.$$

反过来，假设 $\lambda_{2,\theta}(f) = \rho$，$\forall \varepsilon$，$0 < \varepsilon < \pi/2$，设 $a_\mu = |a_\mu| e^{i\theta_\mu}$ 为 f 在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内的所有零点，由 $C_{\alpha,\beta}$ 的定义知

$$C_{\theta,\varepsilon}(2r,1/f) \geqslant C_{\theta,\varepsilon/2}(2r,1/f) \geqslant$$
$$2\sum_{\substack{a_\mu \in \Omega_{\theta,\varepsilon/2}\\ 1\leqslant |a_\mu| \leqslant r}} \left(\frac{1}{|a_\mu|^k} - \frac{|a_\mu|^k}{(2r)^{2k}}\right)\sin k(\theta_\mu - \theta + \varepsilon/2) \geqslant$$
$$2\sum_{\substack{a_\mu \in \Omega_{\theta,\varepsilon/3}\\ 1\leqslant |a_\mu| \leqslant r}} \left(\frac{1}{|a_\mu|^k} - \frac{|a_\mu|^k}{(2r)^{2k}}\right)\sin k(\theta_\mu - \theta + \varepsilon/2), \tag{12}$$

其中 $k = \pi/\varepsilon$，且当 $a_\mu \in \{z: \theta - \varepsilon/3 < \arg z < \theta + \varepsilon/3, 1 < |a_\mu| < r\}$ 时，有 $\varepsilon/6 < \theta_\mu - \theta + \varepsilon/2 < 5\varepsilon/6$，进而有 $\sin k(\theta_\mu - \theta + \varepsilon/2) \geqslant 1/2$. 将(12)式改写为 Stieltjes 积分形式

$$C_{\theta,\varepsilon}\left(2r,\frac{1}{f}\right) \geqslant \int_1^r \frac{1}{t^k}\mathrm{d}n(t) - \frac{1}{(2r)^{2k}}\int_1^r t^k \mathrm{d}n(t) \geqslant$$
$$k\int_1^r \frac{1}{t^{k+1}} n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{n(r)}{r^k} - \frac{r^k n(r)}{(2r)^{2k}} +$$
$$\frac{k}{(2r)^{2k}}\int_1^r t^{k-1} n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n(r)}{r^k} - \frac{r^k n(r)}{(2r)^{2k}} =$$
$$\left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)\frac{n(r)}{r^k},$$

则

$$S_{\theta,\varepsilon}(2r,f) = S_{\theta,\varepsilon}(2r,1/f) + O(1) \geqslant C_{\theta,\varepsilon}(2r,$$
$$1/f) + O(1) \geqslant \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)\frac{n(r)}{r^k} + O(1),$$

其中 $n(r) = n(t,\Omega_{\theta,\varepsilon/3},f=0)$. 因此 $\forall \varepsilon$，$0 < \varepsilon < \pi/2$，在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内，有

$$\limsup_{r\to\infty} \log\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)/\log r = \rho.$$

再根据引理 4，可以得到 L: $\arg z = \theta$ 是解 f 的超级为 ρ 的 Borel 方向.

(Ⅱ) 证明(i) 和(iii) 等价.

假设 L: $\arg z = \theta$ 是整函数解 f 的超级为 ρ 的 Borel 方向，由引理 4，对任意的正数 ε，$0 < \varepsilon < \pi/2$，在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内，有

$$\limsup_{r\to\infty} \log\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)/\log r = \rho. \tag{13}$$

如果 $\exists \varepsilon$，$0 < \varepsilon < \pi/2$，$T < \rho$ 使得

$$\limsup_{r\to\infty} \log^{[3]} M(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f)/\log r < T < \rho,$$

则对充分大的 r 以及所有的 $\varphi \in [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ 都有

$$\log|f(re^{i\varphi})| < \exp r^T. \tag{14}$$

由于 f 为整函数，根据角域中的 Nevanlinna 特征函数的定义及(14)式，可以证明在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内，有

$$\limsup_{r\to\infty} \log\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)/\log r < \rho.$$

这与(13)式矛盾. 因此，$\forall \varepsilon$，$0 < \varepsilon < \pi/2$，有

$$\limsup_{r\to\infty} \log^{[3]} M(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f)/\log r = \rho.$$

反过来，如果 $\forall \varepsilon$，$0 < \varepsilon < \pi/2$，已知

$$\limsup_{r\to\infty} \log^{[3]} M(r,\Omega_{\theta,\varepsilon},f)/\log r = \rho,$$

根据引理 6 在角域 $\Omega_{\theta,\varepsilon}$ 内，有

$$\limsup_{r\to\infty} \log\log S_{\theta,\varepsilon}(r,f)/\log r = \rho.$$

根据引理 4 可知 L: $\arg z = \theta$ 是解 f 超级为 ρ 的 Borel 方向.

定理 1 证毕.

定理 2 的证明　由定理 A 知方程(1) 的每 1 个超越解 f 都满足 $\sigma_2(f) = \sigma(A_s)$，其中 $0 < \sigma(A_s) < \infty$，并且由定理 2 的条件 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 为有限级整函数，F 是不恒为 0 的有限级整函数，则只须在定理 1 中令 $\rho = \sigma(A_s)$ 便可得到定理 2 的结果.

定理 3 的证明　由定理 B 知方程(1) 的所有解 f 满足 $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$，至多有 1 个例外解 f_0，其中 $0 < \sigma(A_0) < \infty$，并且由定理 3 的条件 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 为有限级整函数，F 是不恒为 0 的有限级整函数，则只须在定理 1 中令 $\rho = \sigma(A_0)$ 便可得到定理 3 的结果.

3　参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[3] Kinnunen L. Linear differential equations with solutions of finite iterated order [J]. Southeast Asian Bull Math, 1998, 22(4): 385-405.

[4] Sato D. On the rate of growth of entire functions of fast growth [J]. Bull Amer Math Soc, 1963, 69(3): 411-414.

[5] Wu Zhaojun. Radial oscillation of linear differential equation [J]. Bull Korean Math, 2012, 49(5): 911-921.

[6] Chen Zongxuan, Yang Chungchun. Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations [J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2000, 42(2): 119-133.

[7] 郑秀敏，陈宗煊，曹廷彬，等. 一类亚纯函数系数的高阶非齐次线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2004, 28(5): 431-435.

[8] 肖丽鹏，陈宗煊. 一类高阶微分方程亚纯解的增长性 [J]. 数学研究, 2005, 38(3): 265-271.

[9] 李延玲，刘慧芳，冯斌. 微分方程的复振荡 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(6): 579-538.

[10] 石磊,易才凤.一类高阶线性微分方程解的增长性[J].江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(3):230-233.
[11] 刘旭强,易才凤.关于2阶线性微分方程解的增长性[J].江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(2):171-174.
[12] 易才凤.高阶微分方程解的幅角分布[J].数学学报,2005,48(1):133-140.
[13] Wu Zhaojun,Sun Daochun. Angular distribution of solutions of higher order linear differential equations [J]. J Korean Math Soc,2007,44(6):1329-1338.
[14] Zheng Jianhua. Value distribution of meromorphic functions [M]. Beijing: Tsinghua Univ Press,2010.
[15] Wu Shengjian. On the location of zeros of $f'' + Af = 0$ where $A(z)$ is entire [J]. Math Scand,1994,74: 293-312.

The Radial Oscillation of Higher Order Non-Homogeneous Linear Differential Equation

HU Jun,YI Cai-feng*
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: It is investigated that the radial oscillation of infinite order solutions of higher order nonhomogeneous linear differential equation,by using the fundamental theory and method of value distribution in angular domain. It was obtained that the estimations on the hyper order and the hyper order convergence exponent of the sequence of zero of infinite order solutions along it's Borel direction of hyper order.

Key words: differential equations; solutions; angular domain; radial; Borel direction; hyper order

(责任编辑:王金莲)

(上接第147页)

The Function of Radical and Socle of Semimodule

JIANG Xiao-xia,WANG Song-sheng*
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: By the theory of semimodular root and weak-socle,the function of weak-socle and radical over finitely generate(cogenerated) semimodule are studied. The necessary condition of semimodule M being finitely generated is obtained,the sufficient and necessary condition of semimodule M being finitely cogenerated is given.

Key words: finitely generated semimodule; finitely cogenerated semimodule; radical; socle; weak-socle

(责任编辑:曾剑锋)