文章编号:1000-5862(2014)02-0171-05

Stein 损失函数下的保费估计

余　君[1],章　溢[2],温利民[1,3*]

(1.江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌　330022;2.江西师范大学计算机学院,江西 南昌　330022;
3.江西财经大学信息与管理学院,江西 南昌　330013)

摘要:利用信度理论研究在 Stein 损失函数下的保费估计问题,分析了贝叶斯估计、信度估计、多层贝叶斯估计 3 种估计,并计算 3 种保费估计,比较其结果发现在 Stein 损失函数下:当样本数 n 趋于无穷大时,信度保费会收敛到风险保费,且多层贝叶斯估计比贝叶斯估计的稳健性更强.

关键词:贝叶斯估计;信度估计;多层贝叶斯估计;稳健性

中图分类号:O 211.67　　**文献标志码**:A

0　引言

信度理论是精算学中最重要的经验保费厘定技巧,是一种经验估计保费模型,其研究的核心问题是对非齐次风险制定合理的价格.在这个过程中,精算师根据过去的单个风险或者一个或多个相似的保单组合风险的经验数据,调整未来的保费.当保险公司对未来的保费进行估计时可能出现 2 种偏差:(i)征收保费不够,造成亏损;(ii)征收保费过高,投保人数量减少.为了对这 2 种偏差进行惩罚,通常考虑非负凸函数作为损失函数.损失函数一般是均方损失函数,在决策理论框架下,由文献[1]定义的信度保费能在历史索赔记录的所有线性组合类中使平方损失函数的期望达到最小,而贝叶斯保费是在历史索赔记录的所有可测函数类中使平方损失函数达到最小.关于信度理论的研究,可参见文献[2-3].

但是,由于平方损失函数的对称性,使得保费征收过高和过低具有相等的惩罚程度.然而,在实际运用中,过低的征收保费可能导致公司偿付能力不足从而破产,因此低保费应该比高保费有更大的惩罚,此时对应的损失函数应取为非对称损失函数,这里的"非对称损失"是指过高与过低预测所造成的损失不同.在决策理论中,熵损失函数和 Linex 损失函数分别为

$$L_{Ent}(\theta,\delta)=\theta/\delta-\ln(\theta/\delta)-1,$$

$$L_{\mathrm{Linex}}(\theta,\delta)=\exp\{a(\delta-\theta)\}-a(\delta-\theta)-1,$$

它们经常被用于刻画这种损失,许多学者对这 2 种损失函数下的统计决策问题进行了研究.文献[4]研究了 Linex 非对称损失函数下的信度估计问题;文献[5]考虑了 Linex 损失函数下的估计和预测问题,研究了该损失函数的性质和应用;鄢伟安等[6]考虑了熵损失函数、Linex 损失函数和刻度平方损失函数下的指数泊松分布的贝叶斯估计;王德辉等[7]研究了熵损失函数下定数截尾情形参数的贝叶斯估计;熊常伟等[8]考虑了熵损失函数下几何分布可靠度的贝叶斯估计.

W. James 等[9]引进一个有用的凸损失函数,称之为 Stein 损失函数:

$$L(\theta,\delta)=\delta/\theta-\ln(\delta/\theta)-1. \tag{1}$$

Stein 损失函数是非对称的,常用于估计量 δ 对未知参数 θ 的过高或过低估计造成的损失不同问题,该损失函数在许多领域中都有广泛的应用.如刘延喜[10]研究了 Stein 损失函数下 BP 神经网络分类方法在人脸识别中的应用,林明等[11]研究了回归系数 Stein 压缩估计的小样本性质等.本文研究 Stein 损失函数下的贝叶斯保费和信度保费.

众所周知,贝叶斯方法的关键在于先验的选取,常用的先验分布确定方法有无信息先验分布、共轭先验分布、杰弗莱原则和多层先验等.而多层先验分布是性质最稳健的.应用多层先验分布确定先验并得出后验分布及进行统计推断的方法称为多层贝叶

收稿日期:2013-10-20

基金项目:国家自然科学基金(71001046,71361015),中国博士后科学基金(2013M540534)和江西省教育厅基金(GJJ13217)资助项目.

通信作者:温利民(1979-),男,江西石城人,副教授,博士,主要从事精算学的研究.

斯分析. 而本文也进一步得到了多层贝叶斯保费. 具体做法如下: 风险损失 X 由参数 Θ 识别,若 θ 的先验密度为 $\pi(\theta \mid a)$,其中 $a > 0$ 为超参数; 当所给先验分布中超参数难以确定时,可以对超参数再给出 1 个先验,第 2 个先验称为超先验. 故可假设超参数 a 的先验密度为 $\pi(a)$,此时,θ 的超先验密度为

$$\pi(\theta) = \int \pi(\theta \mid a)\pi(a)\,\mathrm{d}a.$$

通常,在理论上没有限制多层先验的步数,但在实际问题中多于 2 步的先验是不常见的,选用无信息先验作为第 2 步先验是一种好的策略. 此时,把 θ 多层先验密度视为 θ 的先验密度代入到贝叶斯保费和信度保费公式中计算所得到的保费估计称为多层贝叶斯保费.

1 Stein 损失函数下的保费

1.1 贝叶斯保费

假设 1 个风险的损失 X 是非负随机变量且具有分布函数 $F_X(x)$,本文假设随机变量的期望和方差都存在. 如果用实值 P 来估计风险或损失 X,在 Stein 损失函数下,使期望损失达到最小,即

$$\min_{P \in \mathbf{R}} E[L(X,P)],$$

则计算得到的实值 P 为

$$P = \frac{1}{E[1/X]}, \tag{2}$$

称 P 为聚合保费.

与经典的信度理论相比,假设风险 X 由参数 Θ 识别,假设前 n 年的风险即随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 在参数 $\Theta = \theta$ 给定的条件下是独立同分布的,其相同的分布函数 $F_{X \mid \Theta}(x, \theta)$,并且随机变量 Θ 的密度函数为 $\pi(\theta)$,记 $\underline{X_n} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

易证, 在参数 Θ 给定条件下使期望损失 $E[L(X_{n+1}, g(\Theta))]$ 达到最小的最优保费为

$$g(\Theta) = \frac{1}{E[1/X_{n+1} \mid \Theta]} = H(X \mid \Theta), \tag{3}$$

称之为风险保费.

然而,在实际中风险参数 Θ 是未知的,因此风险保费 $H(X \mid \Theta)$ 也是未知的,需要被估计. 本节的主要目的是根据已知数据 $\underline{X_n}$ 预测 X_{n+1},即使得(1)式中定义的损失函数的期望达到最小.

首先,集合 M 表示所有关于 $\underline{X_n}$ 的可测函数的全体,$H_B(\underline{X_n})$ 表示第 $n+1$ 年风险 X_{n+1} 的估计,则

$$E[L(X_{n+1}, H_B(\underline{X_n}))] = \min_{P \in M} E[L(X_{n+1}, P)]. \tag{4}$$

可以得到与文献[12]中类似的结论.

定理 1 在 Stein 损失函数下,根据样本 $\underline{X_n}$ 得到 X_{n+1} 的最优估计为

$$H_B(\underline{X_n}) = \frac{1}{E[1/X_{n+1} \mid \underline{X_n}]},$$

称之为贝叶斯保费.

证 记 $\varphi = E[P/X_{n+1} - \ln(P/X_{n+1}) - 1 \mid \underline{X_n}]$,要使(2)式成立,即使得损失函数的期望达到最小,则由贝叶斯定理知使 φ 最小即可,对 φ 关于 P 求偏导,并令导数为 0,得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P} = E\left[\frac{1}{X_{n+1}} - \frac{1}{P} \,\middle|\, \underline{X_n}\right] = 0.$$

因此,有

$$P = \frac{1}{E[1/X_{n+1} \mid \underline{X_n}]} = H_B(\underline{X_n}), \tag{5}$$

注意到(5)式, 为了求出 $H_B(\underline{X_n})$, 必须计算出 $E[1/X_{n+1} \mid \underline{X_n}]$. 然而,由于

$$E[1/X_{n+1} \mid \underline{X_n}] = \int E(1/X_{n+1} \mid \Theta = \theta)\pi(\theta \mid \underline{X_n})\,\mathrm{d}\theta, \tag{6}$$

其中 $\pi(\theta \mid \underline{X_n})$ 表示在 $\underline{X_n}$ 已知的条件下 Θ 的后验分布,且假设风险 X 在参数 θ 给定条件下的密度函数为 $f(x \mid \theta)$,参数 θ 的先验分布为 $\pi(\theta)$,则

$$\pi(\theta \mid \underline{X_n}) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)\pi(\theta)}{\int \prod_{i=0}^{n} f(x_i \mid \theta)\pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta},$$

代入(5)式便可得到贝叶斯保费.

1.2 多层贝叶斯保费

由多层保费估计的定义可知多层的贝叶斯保费估计的计算公式为

$$H_B^*(\underline{X_n}) = E[1/X_{n+1} \mid \underline{X_n}] = \int E(1/X_{n+1} \mid \Theta = \theta)\pi(\theta \mid \underline{X_n})\,\mathrm{d}\theta,$$

其中

$$\pi(\theta \mid \underline{X_n}) = \int \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)\pi(\theta \mid a)\pi(a)\,\mathrm{d}a \Big/ \iint \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)\pi(\theta \mid a)\pi(a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\theta. \tag{7}$$

1.3 信度保费

由(6)式可知,为了得到贝叶斯保费 $H_B(\underline{X_n})$,就必须知道样本的密度函数 $f(x \mid \theta)$ 及参数的先验分布 $\pi(\theta)$ 的所有信息. 但是在大多数情况下都无法知道这些完整信息. 因此在实际情况下贝叶斯保费很难求出来,解决这个问题的方法就是将(4)式

中的 P 限定在 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的线性函数中,这种方法求得的保费称为信度保费.

信度保费的求解步骤如下:

Step 1　观察 X 的风险保费: $H(X\mid\Theta)=1/E[X_{n+1}\mid\Theta]$,首先根据信度理论的思想估计 $R(\Theta)=E(1/X_{n+1}\mid\Theta)$,即解决最小化问题:

$$\min_{c_i,c_0\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n}E\left[\left(R(\Theta)-c_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{X_i}\right)^2\right];\qquad(8)$$

Step 2　将(8)式得到的线性估计 $\hat{R}^*(\Theta)=\hat{c}_0+\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_i/X_i$ 代入(3)式,得到风险保费 $H(X\mid\Theta)$ 的 1 个估计:

$$H_C(\underline{X_n})=\frac{1}{\hat{R}^*(\Theta)},$$

称 $H_C(\underline{X_n})$ 为信度保费.

为方便起见,引入如下记号:

$$R_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i},\mathrm{Var}(1/X\mid\Theta)=\sigma^2(\Theta),$$

$$E[R(\Theta)]=R_0,\mathrm{Var}[R(\Theta)]=\tau_0^{\ 2},$$

$$E[\sigma^2(\Theta)]=\sigma_0^{\ 2}.$$

定理 2　在上述的假设和记号下,解(8)式得到 $R(\Theta)$ 的信度估计: $\hat{R}^*(\Theta)=ZR_n+(1-Z)R_0$,因此风险保费 $H(X\mid\Theta)$ 的 1 个估计为

$$H_C(\underline{X_n})=\frac{1}{ZR_n+(1-Z)R_0},$$

其中 $Z=n\tau_0^{\ 2}/(n\tau_0^{\ 2}+\sigma_0^{\ 2})$ 为信度因子,称 $H_C(\underline{X_n})$ 为 $H(X\mid\Theta)$ 的信度估计.

证　为求解(8)式,记

$$\Phi=E\left[\left(R(\Theta)-c_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{X_i}\right)^2\right],\qquad(9)$$

对 Φ 关于 c_0 求偏导并令导数为 0,则

$$\frac{\partial\Phi}{\partial c_0}=-2E\left[R(\Theta)-c_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{X_i}\right]=0.\qquad(10)$$

注意到 $E[R(\Theta)]=E[1/X_i]=R_0,i=1,2,\cdots,n$,则

$$c_0=(1-\sum_{i=1}^{n}c_i)R_0,$$

代入(9)式得

$$\Phi=E\left[(R(\Theta)-R_0)-\sum_{i=1}^{n}c_i\left(\frac{1}{X_i}-R_0\right)\right]^2,$$

再对 Φ 关于 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 求偏导并令导数为 0,得到

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{X_i},\frac{1}{X_j}\right)=\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{X_j},R(\Theta)\right),j=1,2,\cdots,n.\qquad(11)$$

注意到

$$\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{X_i},\frac{1}{X_j}\right)=\mathrm{Cov}\left(E\left(\frac{1}{X_i}\mid\Theta\right),E\left(\frac{1}{X_j}\mid\Theta\right)\right)+E\left[\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{X_i},\frac{1}{X_j}\mid\Theta\right)\right]=\begin{cases}\tau_0^{\ 2}+\sigma_0^{\ 2}, & i\neq j,\\ \sigma_0^{\ 2}, & i=j.\end{cases}$$

解(10)式和(11)式得

$$c_0=\frac{\sigma_0^{\ 2}R_0}{n\tau_0^{\ 2}+\sigma_0^{\ 2}},c_i=\frac{\tau_0^{\ 2}}{n\tau_0^{\ 2}+\sigma_0^{\ 2}},i=1,2,\cdots,n.$$

因此,$R(\Theta)$ 的最优估计为

$$H_C(\underline{X_n})=\frac{1}{ZR_n+(1-Z)R_0}.$$

注 1　当样本容量 $n\to\infty$ 时,有

$$H_C(\underline{X_n})\to H(X\mid\Theta),a.s.$$

事实上,由于信度因子为 $Z=n\tau_0^{\ 2}/(n\tau_0^{\ 2}+\sigma_0^{\ 2})$,且 $0\leqslant Z\leqslant 1$,所以有 $n\to\infty,Z\to 1$.

又由强大数定律知,

$$R_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\to R(\Theta)=E(1/X\mid\Theta),a.s.$$

由 Slustky 定理得

$$H_C(\underline{X_n})=\frac{1}{ZR_n+(1-Z)R_0}\to\frac{1}{E(1/X\mid\Theta)}=H(X\mid\Theta),a.s.$$

因此信度保费 $H_C(\underline{X_n})$ 是风险保费 $H(X\mid\Theta)$ 的相合估计.

2　数值模拟

假设随机变量 X 服从分布为 $P(X=1)=1-P(X=2)=\theta$,则其密度函数为

$$f(x\mid\theta)=\theta^{2-x}(1-\theta)^{x-1},0<\theta<1,$$

故随机变量 $Y=1/X$ 服从分布为 $P(Y=1/2)=1-P(Y=1)=1-\theta$,其密度函数为

$$f(y\mid\theta)=\theta^{-2(1/2-y)}(1-\theta)^{2(1-y)},0<\theta<1,$$

且 θ 服从幂分布,其密度函数为 $\pi(\theta\mid a)=a\theta^{a-1}(0<\theta<1)$,则

$$R(\Theta)=\frac{1+\theta}{2},\tau_0^{\ 2}=\frac{a}{4(a+2)(a+1)^2},$$

$$\sigma_0^{\ 2}=\frac{a}{4(a+1)(a+2)},R_0=\frac{2a+1}{2(a+1)},$$

$$Z=\frac{n}{a+n+1}.\qquad(12)$$

因此 Bayes 保费和信度保费分别为

$$H_B(\underline{X_n})=2B(2n-\sum_{i=1}^{n}x_i+a,\sum_{i=1}^{n}x_i-n+1)/\Big[B(2n-\sum_{i=1}^{n}x_i+a,\sum_{i=1}^{n}x_i-n+1)+$$

$$B(2n - \sum_{i=1}^{n} x_i + a + 1, \sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1)\Big], \tag{13}$$

$$H_C(\underline{X_n}) = \frac{2a + n + 1}{2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i} + 2a + 1}.$$

若将 a 视为随机变量,且取 a 的分布为 $P(a=1)=P(a=2)=1/2$,则参数 θ 的先验密度为 $\pi(\theta)=\pi(\theta|a=1)P(a=1)+\pi(\theta|a=2)P(a=2)=1/2+\theta$,则可计算得多层 Bayes 保费为

$$H_B^*(\underline{X_n}) = \Big[2B(2n - \sum_{i=1}^{n} x_i + a, \sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1) + 4B(2n - \sum_{i=1}^{n} x_i + a + 1, \sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1)\Big] \Big/ \Big[B(2n - \sum_{i=1}^{n} x_i + a, \sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1) + 3B(2n - \sum_{i=1}^{n} x_i + a + 1, \sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1) + 2B(2n - \sum_{i=1}^{n} x_i + a + 2, \sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1)\Big].$$

在(12)式和(13)式中取 $a=1$,取定 $\theta=0.3$ 即可得到 X 的样本值,再取不同的 n 值进行数值模拟 5 000 次可得如表 1 所示的结果.

表 1 保费估计值

n	$n=20$	$n=50$	$n=100$	$n=500$	$n=1\,000$	$n=5\,000$
$R(\Theta)$	1.538 5	1.538 5	1.538 5	1.538 5	1.538 5	1.538 5
$H_B(\underline{X_n})$	1.518 7	1.529 9	1.523 7	1.537 5	1.538 0	1.538 2
$H_C(\underline{X_n})$	1.517 9	1.529 1	1.533 8	1.537 6	1.537 9	1.538 4
$H_B^*(\underline{X_n})$	1.505 5	1.524 1	1.530 7	1.536 9	1.537 7	1.538 4

定义 3 种保费的稳健性如下:

$$RB = [H_B(\underline{X_n}) - R(\Theta)/R(\Theta)] \times 100\%,$$

$$RC = [H_C(\underline{X_n}) - R(\Theta)/R(\Theta)] \times 100\%,$$

$$RB^* = [H_B^*(\underline{X_n}) - R(\Theta)/R(\Theta)] \times 100\%,$$

从而通过代入表 1 中相应的保费估计值可得表 2.

表 2 保费的稳健性

n	$n=20$	$n=50$	$n=100$	$n=500$	$n=1\,000$	$n=5\,000$
RB	1.29	0.56	0.31	0.065	0.033	0.020
RC	1.34	0.61	0.31	0.058	0.039	0.065
RB^*	2.47	0.94	0.51	0.10	0.051	0.013

由表 2 知,在 Stein 损失函数下,当样本数量 n 越来越大时,信度保费越来越趋近于风险保费 $R(\Theta)$ 且多层贝叶斯保费比贝叶斯保费的稳健性更强.

3 参考文献

[1] Bühlmann H. Experience rating and credibility [J]. Astin Bulletin,1967,4(3):199-207.

[2] 郑丹,章溢,温利民. 具有时间变化效应的信度模型[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(3):249-252.

[3] 方婧,章溢,温利民. 聚合风险模型下的信度估计 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012,36(6):607-611.

[4] Wen Limin,Zhang Xiankun,Zheng Dan,et al. The credibility models under Linex loss functions [J]. Chin Quart J of Math,2012,27(3):397-402.

[5] Zellner A. Biased predictors,rationality and the evaluation of forecasts [J]. Ecnomics Letters,1986,21(1):45-48.

[6] 鄢伟安,师义民,刘英. 不同损失函数下指数-泊松分布的 Bayes 估计 [J]. 火力与指挥控制,2012,37(2):124-126.

[7] 王德辉,宋立新. 熵损失函数下定数截尾情形参数的 Bayes 估计 [J]. 应用概率统计,1999,15(2):176-186.

[8] 熊常伟,张德然,张怡. 熵损失函数下几何分布可靠度的 Bayes 估计 [J]. 数理统计与管理,2008,27(1):82-86.

[9] James W,Stein C. Estimation with quadratic loss [J]. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,1961,1(1):361-379.

[10] 刘延喜. Stein 损失下 BP 神经网络分类方法在人脸识别中的应用 [J]. 东北师大学报:自然科学版,2010,42(1):27-31.

[11] 林明,韦来生. 回归系数 Stein 压缩估计的小样本性质[J]. 应用数学学报,2002,25(3):497-504.

[12] Heilmann W R. Decision theoretic foundations of credibility theory [J]. Insurance: Mathematics and Economics,1989,8(1):77-95.

Premium Estimator under Stein Loss

YU Jun[1], ZHANG Yi[2], WEN Li-min[1,3*]
(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. School of Computer Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
3. College of Information Management, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang Jiangxi 330013)

Abstract: The premium estimate under a typical asymmetric Stein loss function is studied by the credibility theory. The three type of estimator including Bayes estimator, credibility estimator and hierarchical Bayes estimator under Stein loss function are discussed. Finally, by numerical simulation method the quality of three estimates are compared. The results show that, under Stein loss function, when the sample size n tends to infinity, all the three premium estimator convergence to risk premiums respectively. In addition, the robustness of hierarchical Bayes estimator is better than that of two other estimator.

Key words: Bayes estimator; credibility estimator; hierarchical Bayes estimator; robustness

(责任编辑: 曾剑锋)

(上接第 170 页)

The Alternative Direction Implicit Scheme for Inhomogeneous Schrödinger Equation

FU Li-dan[1], KONG Ling-hua[1*], WANG Lan[1], FU Fang-fang[2], HUANG Xiao-mei[1]
(1. College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. Department of Basic Teaching, Nanchang Institute of Science and Technology, Nanchang Jiangxi 330108, China)

Abstract: Based on Taylor's expansion, an alternative direction implicit scheme was proposed for multidimensional Schrödinger equation. The scheme is of second order both in time and space. Moreover, the scale of the algebraic equations resulting from the scheme is the same with a one-dimensional problem. It is economic, practical and can be coded modularly. Numerical experiments verify the long-term simulation of the developed scheme to original problem and the evolution of discrete charge against time.

Key words: Schrödinger equation; alternative direction implicit scheme; Taylor's expansion

(责任编辑: 曾剑锋)