第 38 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 3
2014 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2014

文章编号:1000-5862(2014)03-0236-04

# 非连通图 $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ 的优美标号

吴跃生,王广富,徐保根

(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

**摘要:** 研究了图 $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ 的优美性,其中 $G_1$ 是满足一定条件的交错图,$G_2$ 是任一优美图,$G_2 \odot K_1$ 是优美图 $G_2$ 中优美值为 1 的顶点粘接 1 条悬挂边所形成的图. 构造了 1 类新优美图,推广了已有文献的结果.

**关键词:** 优美图; 平衡图; 交错图; 非连通图

**中图分类号:** O 157.5 **文献标志码:** A

## 0 引言

优美图集广泛的应用性和趣味性于一身,因而优美图的研究是图论中较为活跃的课题之一[1-19]. 许多学者对非连通图的优美性进行了研究,本文推广了文献[7,10]的结论.

本文所讨论的图均为无向简单图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 $G$ 的顶点集和边集,未说明的符号及术语均同文献[1].

**定义 1** 对于图 $G=(V,E)$ 如果存在 1 个单射 $\theta: V(G) \to \{0,1,2,\cdots,|E(G)|\}$ 使得对所有边 $e=(u,v) \in E(G)$,由 $\theta'(e) = |\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的 $E(G) \to \{1,2,\cdots,|E(G)|\}$ 是 1 个双射,则称 $G$ 是优美图,$\theta$ 是 $G$ 的一组优美标号,称 $\theta'$ 为 $G$ 的边上的由 $\theta$ 导出的诱导值.

**定义 2** 图 $G$ 的顶点集 $V(G)$ 能分成 2 个非空子集 $X$ 和 $Y$,使得 $X \cup Y = V(G)$,$X \cap Y = \varnothing$,且 $G$ 的每条边的端点分别在 $X$ 和 $Y$ 中,称此图为二分图,记作 $G=(X,Y;E)$,二分划记为 $(X,Y)$; 若此图是优美的,则称为优美二分图.

**定义 3** $G$ 是优美二分图,其优美标号为 $\theta$,$V(G)$ 的划分为集合 $X,Y$,若 $\max\limits_{v\in X}\theta(v) < \min\limits_{v\in Y}\theta(v)$,则称 $\theta$ 是 $G$ 的交错标号,$G$ 是在交错标号 $\theta$ 下的交错图.

**定义 4** 设 $\theta$ 为 $G$ 的 1 个优美标号,如果存在 1 个正整数 $k$,使得 $\forall uv \in E(G)$ 有

$$\theta(u) > k \geqslant \theta(v) \text{ 或 } \theta(u) \leqslant k < \theta(v),$$

则称 $\theta$ 为 $G$ 的平衡标号(或称 $G$ 有平衡标号 $\theta$),且称 $k$ 为 $\theta$ 的特征. 称图 $G$ 为平衡二分图.

显然,若 $\theta$ 为 $G$ 的平衡标号,则 $k$ 是边导出标号为 1 的边的 2 个端点中标号较小的顶点的标号.

由定义 3 和定义 4 知,平衡图与交错图等价,平衡图的平衡标号 $\theta$ 的特征 $k = \max\limits_{v\in X}\theta(v)$.

## 1 主要引理

**引理 1** $\forall \alpha \in \{0,1,2,\cdots,m\}$,路 $P_m = v_1v_2\cdots v_m$ 存在 1 个优美标号 $\theta$,使得 $\theta(v_o) = \alpha$.

**引理 2** $|E(G_i)| = p_i$,$g_i(v)$ 是图 $G_i$ 的特征为 $k_i$ 的交错标号,$V(G_i) = (X_i,Y_i)$,且 $p_i - 1$ 和 $k_i + 2$ 都不是 $g_i(v)$ 值,其中 $p_i - 1 > k_i + 2(i=1,2,\cdots,n)$; 对任意自然数 $n$,$\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ 既是优美图,也是交错图,存在特征为 $k \in \{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$ 的交错标号 $g$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - 1$ 和 $k+2$ 都不是 $g(v)$ 值.

**引理 3** 当 $\max\{m_i,n_i\} \geqslant 3$,$\min\{m_i,n_i\} \geqslant 2$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时,$\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_{m}$ 是交错图; 存在特征为 $k$ 的交错标号,使 $k+2$ 不在顶点标号集合内.

**引理 4** 当 $n > 2$ 时,$2\langle C_4,n\rangle$ 是交错图. 存在特征为 $k=4n$ 的交错标号,使 $4n+2$ 和 $8n-1$ 不在顶点标号集合内.

**引理 5** $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_{m_i,t_i}(m_i \geqslant 2,t_i \geqslant 2,i=1,2,\cdots,n)$

收稿日期:2013-10-25

基金项目:国家自然科学基金(11261019,11361024)和江西省自然科学基金(20114BAB201010)资助项目.

作者简介:吴跃生(1959-),男,江西瑞金人,副教授,主要从事图论方面的研究.

是交错图；存在特征为 $k$ 的交错标号，使 $k+2$ 不在顶点标号集合内.

**引理 6**　$\bigcup_{i=1}^{n} H_{m_i,t_i}(m_i \geqslant 2, t_i \geqslant 2, i=1,2,\cdots,n)$ 是交错图；存在特征为 $k$ 的交错标号，使 $k+2$ 不在顶点标号集合内.

**引理 7**　$\forall m \in \mathbf{N}(m \geqslant 2)$，$\wedge C_{4,m}$ 是交错图，存在特征为 $k$ 的交错标号，使 $k+2$ 和 $|E(\wedge C_{4,m})|-1$ 不在顶点标号集合内，且

$$|E(\wedge C_{4,m})| - 1 > k+2.$$

**引理 8**　对于自然数 $m(m \geqslant 2)$，$m - C_4$ 是交错图，存在特征为 $k$ 的交错标号，使 $k+2$ 和 $|E(m-C_4)|-1$ 不在顶点标号集合内，且

$$|E(m - C_4)| - 1 > k+2.$$

## 2　主要结果及其证明

**定理 1**　如果交错标号 $\theta$ 的特征为 $k$ 的交错图 $G_1$，不存在 $k+2$ 的标号值，$G_2$ 为任一非平凡优美图，$G_2 \odot K_1$ 是优美图 $G_2$ 中优美值为 1 的顶点粘接一条悬挂边所形成的图，则非连通图 $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ 是优美图；且当 $G_2$ 为交错图时，设 $G_2$ 的交错标号 $\theta_1$ 的特征为 $k_1$，$(X_1, Y_1)$ 是 $G_2$ 的二分划，$\max\limits_{v \in X_1} \theta_1(v) = k_1 < \min\limits_{v \in Y_1} \theta_1(v) = k_1 + 1$，$\theta_1(v) = 1$，$v \in X_1$，非连通图 $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ 是交错图.

**证**　设边数为 $q$ 的图 $G$ 的优美标号为 $\theta$，则 1 和 $q-1$ 必有一个被 $\theta$ 用到，换言之，非平凡的优美图 $G$ 必存在 1 是其优美值的优美标号. 设 $G_2$ 的优美标号为 $\theta_1$，$\theta_1(v_1) = 1$，在 $v_1$ 处粘接的 1 条悬挂边为 $v_1 v_2$，$|E(G_1)| = n$，$|E(G_2 \odot K_1)| = m$，$G_1 = (X, Y; E)$，定义非连通图 $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ 的标号 $\theta_2$ 如下：

$$\theta_2(v) = \begin{cases} \theta(v) + m, & v \in Y, \\ \theta(v), & v \in X, \\ \theta_1(v) + k + 1, & v \in G_2, \\ m + k + 2, & v = v_2. \end{cases}$$

下证 $\theta_2$ 是非连通图 $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ 的优美标号.

(ⅰ) 非连通图 $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ 中 $G_1$ 的顶点标号集合为 $\{0,1,\cdots,k\} \cup \{k+1+m\} \cup \{k+3+m, k+4+m, \cdots, n+m\}$ 的子集，标号互不相同.

在交错标号 $\theta$ 下，图 $G_1$ 边导出的标号集合是 $\{1,2,\cdots,n\}$，由 $\theta_2$ 的定义以及 $(X, Y)$ 是二分划知，在标号 $\theta_2$ 下，图 $G_1$ 边导出的标号集合是 $\{m+1, m+2, \cdots, m+n\}$. 上述边标号互不相同.

(ⅱ) 非连通图 $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ 中 $G_2 \odot K_1$ 的顶点标号集合为 $\{k+1, k+2, \cdots, k+m\} \cup \{k+2+m\}$ 的子集，边导出的标号集合是 $\{1,2,\cdots,m-1\} \cup \{m\}$.

由(ⅰ)和(ⅱ)知 $\theta_2$ 是非连通图 $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ 的优美标号.

当 $G_2$ 为交错图时，设图 $G_2$ 的交错标号 $\theta_1$ 的特征为 $k_1$，则 $\max\limits_{v \in X_1} \theta_1(v) = k_1 < \min\limits_{v \in Y_1} \theta_1(v) = k_1 + 1$，其中 $(X_1, Y_1)$ 是 $G_2$ 的二分划，$\theta_1(v) = 1 (v \in X_1)$. 令 $X_2 = X_1 \cup X$，$Y_2 = Y_1 \cup Y \cup \{v_2\}$，则有 $\max\limits_{v \in X_2} \theta_2(v) = k_1 + 1 + k < \min\limits_{v \in Y_2} \theta_2(v) = k_1 + 2 + k$，即 $\theta_2$ 是非连通图 $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ 的交错标号，此交错标号的特征为 $k_1 + 1 + k$.

**推论 1**　$|E(G_i)| = p_i$，如果交错标号 $\theta_i$ 的特征为 $k_i$ 的交错图 $G_i$，不存在 $k_i + 2$ 的标号值，$p_i > k_i + 2 (i = 1,2,\cdots,n+1)$，$G_i \odot K_1$ 是交错图 $G_i$ 中优美值为 1 的顶点粘接 1 条悬挂边所形成的图，则非连通图 $G_{n+1} \bigcup_{i=1}^{n} (G_i \odot K_1)$ 是交错图. 设 $\theta$ 是图 $G_{n+1} \bigcup_{i=1}^{n} (G_i \odot K_1)$ 的交错标号，则 $\theta$ 的特征为 $k = \sum_{i=1}^{n} k_i + (n-1)$，图 $G_{n+1} \bigcup_{i=1}^{n} (G_i \odot K_1)$ 不存在 $k+2$ 的标号值.

**证**　连续 $n$ 次应用定理 1 就可以得出推论 1.

**推论 2**　当 $\max\{m_i, n_i\} \geqslant 3$，$\min\{m_i, n_i\} \geqslant 2 (i = 1,2,\cdots,n)$ 时，$T$ 为毛虫树等优美树时，图 $\bigcup_{i=1}^{n} K_m \cup T \odot K_1$ 是优美图.

**证**　由定理 1 和引理 3 可以得出推论 2.

**推论 3**　当 $\max\{m_i, n_i\} \geqslant 3$，$\min\{m_i, n_i\} \geqslant 2 (i = 1,2,\cdots,n)$ 时，图 $\bigcup_{i=1}^{n} K_m \cup P_m$ 是优美图.

**证**　由引理 1 和推论 2 可以得出推论 3.

**推论 4**　当 $n_i > 2$，$t_i \geqslant 1$，$r \geqslant 1$，$T$ 为毛虫树等优美树时，图 $\bigcup_{i=1}^{r} (2t_i \langle C_4, n_i \rangle) \cup T \odot K_1$ 是优美图.

**证**　由定理 1、引理 2 和引理 4 可得出推论 3.

**推论 5**　当 $n_i > 2$，$t_i \geqslant 1$，$m \geqslant 2$，$r \geqslant 1$ 时，图 $\bigcup_{i=1}^{r} (2t_i \langle C_4, n_i \rangle) \cup P_m$ 是优美图.

**证**　由引理 1 和推论 4 可以得出推论 5.

**推论 6**　当 $m_i \geqslant 2$，$t_i \geqslant 2 (i = 1,2,\cdots,n)$，$T$ 为毛虫树等优美树时，图 $\bigcup_{i=1}^{n} F_{m_i,t_i} \cup T \odot K_1$ 是优美图.

**证**　由定理 1 和引理 5 可以得出推论 6.

**推论 7** 当 $m_i \geqslant 2, t_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $m \geqslant 2$ 时,图 $\bigcup_{i=1}^{n} F_{m_i,t_i} \cup P_m$ 是优美图.

**证** 由引理 1 和推论 6 可以得出本推论 6.

**推论 8** 当 $m_i \geqslant 2, t_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $T$ 为毛虫树等优美树时,图 $\bigcup_{i=1}^{n} H_{m_i,t_i} \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**证** 由定理 1 和引理 6 可以得出推论 8.

**推论 9** 当 $m_i \geqslant 2, t_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $m \geqslant 2$ 时,图 $\bigcup_{i=1}^{n} H_{m_i,t_i} \cup P_m$ 是优美图.

**证** 由引理 1 和推论 8 可以得出推论 9.

**推论 10** 当 $m_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $T$ 为毛虫树等优美树时, $\bigcup_{i=1}^{n} \wedge C_{4,m_i} \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**证** 由定理 1、引理 2 和引理 7 可得出推论 10.

**推论 11** 当 $m_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $m \geqslant 2$ 时, $\bigcup_{i=1}^{n} \wedge C_{4,m_i} \cup P_m$ 是优美图.

**证** 由引理 1 和推论 10 可以得出推论 11.

**推论 12** 当 $m_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $T$ 为毛虫树等优美树时, $\bigcup_{i=1}^{n} (m_i - C_4) \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**证** 由定理 1、引理 2 和引理 8 可得出推论 12.

**推论 13** 当 $m_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $m \geqslant 2$ 时, $\bigcup_{i=1}^{n} (m_i - C_4) \cup P_m$ 是优美图.

**证** 由引理 1 和推论 12 可以得出推论 13.

**推论 14** 当 $\max\{m_i, n_i\} \geqslant 3$, $\min\{m_i, n_i\} \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{n} K_m = G_1$,当 $n_i > 2, t_i \geqslant 1, m \geqslant 2, r \geqslant 1$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{r} (2t_i \langle C_4, n_i \rangle) = G_2$,当 $m_i \geqslant 2, t_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{n} F_{m_i,t_i} = G_3$, $\bigcup_{i=1}^{n} H_{m_i,t_i} = G_4$,当 $m_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{n} \wedge C_{4,m_i} = G_5$, $\bigcup_{i=1}^{n} (m_i - C_4) = G_6$,当 $m_i \geqslant 5(i=1,2,\cdots,n)$ 时,$T$ 为毛虫树等优美树,则 $\bigcup_{j=1}^{6} G_j \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**证** 由定理 1、引理 2 ~ 引理 8 可得推论 14.

**推论 15** 当 $\max\{m_i, n_i\} \geqslant 3$, $\min\{m_i, n_i\} \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{n} K_m = G_1$,当 $n_i > 2, t_i \geqslant 1, m \geqslant 2, r \geqslant 1$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{r} (2t_i \langle C_4, n_i \rangle) = G_2$,当 $m_i \geqslant 2, t_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{n} F_{m_i,t_i} = G_3$, $\bigcup_{i=1}^{n} H_{m_i,t_i} = G_4$,当 $m_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{n} \wedge C_{4,m_i} = G_5$, $\bigcup_{i=1}^{n} (m_i - C_4) = G_6$,当 $m_i \geqslant 5(i=1,2,\cdots,n)$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{n} P_{m_i}^3 = G_7$, $m \geqslant 2$,则 $\bigcup_{j=1}^{7} G_j \cup P_m$ 是优美图.

**猜想 1** 当 $\max\{m_i, n_i\} \geqslant 3$, $\min\{m_i, n_i\} \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $T$ 为树时,图 $\bigcup_{i=1}^{n} K_m \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**猜想 2** 当 $n_i > 2, t_i \geqslant 1, r \geqslant 1$, $T$ 为树时,图 $\bigcup_{i=1}^{r} (2t_i \langle C_4, n_i \rangle) \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**猜想 3** 当 $m_i \geqslant 2, t_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $T$ 为树时,图 $\bigcup_{i=1}^{n} F_{m_i,t_i} \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**猜想 4** 当 $m_i \geqslant 2, t_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $T$ 为树时,图 $\bigcup_{i=1}^{n} H_{m_i,t_i} \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**猜想 5** 当 $m_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $T$ 为树时, $\bigcup_{i=1}^{n} \wedge C_{4,m_i} \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**猜想 6** 当 $m_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$, $T$ 为树时, $\bigcup_{i=1}^{n} (m_i - C_4) \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**猜想 7** 当 $m_i \geqslant 5(i=1,2,\cdots,n)$, $T$ 为树时, $\bigcup_{i=1}^{n} P_{m_i}^3 \cup T\odot K_1$ 是优美图.

**猜想 8** 当 $\max\{m_i, n_i\} \geqslant 3$, $\min\{m_i, n_i\} \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{n} K_m = G_1$,当 $n_i > 2, t_i \geqslant 1, m \geqslant 2, r \geqslant 1$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{r} (2t_i \langle C_4, n_i \rangle) = G_2$,当 $m_i \geqslant 2, t_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{n} F_{m_i,t_i} = G_3$, $\bigcup_{i=1}^{n} H_{m_i,t_i} = G_4$,当 $m_i \geqslant 2(i=1,2,\cdots,n)$ 时,令 $\bigcup_{i=1}^{n} \wedge C_{4,m_i} = G_5$, $\bigcup_{i=1}^{n} (m_i - C_4) = G_6$,当 $m_i \geqslant 5(i=1,2,\cdots,n)$ 时,$T$ 为树,则 $\bigcup_{j=1}^{6} G_j \cup T\odot K_1$ 是优美图.

## 3 参考文献

[1] 马克杰. 优美图[M]. 北京:北京大学出版社,1991.

[2] 杨显文. 关于 $C_{4m}$ 蛇的优美性[J]. 工程数学学报, 1995, 12(4): 108-112.

[3] Flandrin E, Fournier I, Germa A. Numotations gracieuses des chemins[J]. Ars Combinatoria, 1983, 16: 149-181.

[4] 吴跃生. 关于圈 $C_{4h}$ 的$(r_1, r_2, \cdots, r_{4h})$-冠的优美性[J]. 华东交通大学学报, 2011, 28(1): 77-80.

[5] 吴跃生, 李咏秋. 关于圈 $C_{4h+3}$ 的$(r_1, r_2, \cdots, r_{4h+3})$-冠的优美性[J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2011, 32(6): 1-4.

[6] 潘伟, 杨显文. 关于 $G \cup \bigcup_{i=1}^{k} K_{m_i n_i}$ 的优美性[J]. 吉林大学学报: 信息科学版, 2004, 22(5): 513-516.

[7] 杜万根. 关于图$(s\langle c_4, n\rangle) \cup P_m$ 的优美性[J]. 苏州大学学报: 自然科学版, 2012, 28(2): 7-11.

[8] 杨迪, 刘春峰. 图 $\bigcup_{i=1}^{n} F_{m_i, t_i}$ 和 $\bigcup_{i=1}^{n} H_{m_i, t_i}$ 的优美性[J]. 科学技术与工程, 2008, 8(9): 2285-2287, 2306.

[9] 李长春, 韩兆红, 张国阳. 关于 $St \bigcup_{i=1}^{n} m_i - C_4$ 的优美性[J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2007(4): 55-56, 100.

[10] 张志尚, 张庆成, 王春月. 关于$(s\langle C_4, n\rangle) \cup P_m$ 的优美性[J]. 东北师大学报: 自然科学版, 2011, 43(3): 14-18.

[11] 吴跃生, 徐保根. 关于图 $P_n^3 \cup \tilde{P}_4$ 的优美性[J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2011, 39(2): 27-29.

[12] 吴跃生, 徐保根. 关于图 $P_{6k+3}^3 \cup P_n^3$ 的优美性[J]. 安徽大学学报: 自然科学版, 2011, 35(5): 14-17.

[13] 吴跃生, 徐保根. 关于图 $P_{6k+4}^3 \cup P_n^3$ 的优美性[J]. 山西大学学报: 自然科学版, 2012, 35(1): 27-29.

[14] 张志尚, 王春月, 张庆成. 关于 $\tilde{w}_n \cup \tilde{w}_n \cup p_m$ 的优美性[J]. 东北师大学报: 自然科学版, 2010, 42(4): 30-34.

[15] 吴跃生. 关于图 $P_{6k+5}^3 \cup P_n^3$ 的优美性[J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2012, 33(3): 4-7, 10.

[16] 吴跃生, 王广富, 徐保根. 非连通图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 的优美性[J]. 华东交通大学学报, 2012, 29(6): 26-29.

[17] 吴跃生, 徐保根. 两类非连通图$(P_2 \vee \bar{K}_n(0, 0, r_1, 0, \cdots, 0, r_n) \cup St(m)$ 及$(P_2 \vee \bar{K}_n(r_1 + a, r_2, 0, \cdots, 0) \cup G_r$ 的优美性[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2012, 51(5): 63-66.

[18] 吴跃生. 图 $C_7(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美性[J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2012, 33(5): 9-11, 25.

[19] 吴跃生. 关于圈 $C_{4h+3}$ 的$(G_{r_1}, G_{r_2}, \cdots, G_{r_{4h+3}})$-冠的优美性[J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2013, 34(4): 1-6.

[20] 徐保根, 赵利芬, 操叶龙, 等. 关于图的控制划分[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37(5): 475-478.

[21] 徐保根, 丁宗鹏, 喻卫. 几类图的符号星 $k$ 控制数[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(5): 516-518.

[22] 徐保根, 陈悦, 孔祥阳. 图的符号边全 $k$ 控制数[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2011, 35(3): 316-318.

# On the Gracefulness of $G_1 \cup G_2 \odot K_1$

WU Yue-sheng, WANG Guang-fu, XU Bao-gen

(Institute of Technology, East China Jiaotong University, Nanchang Jiangxi 330013, China)

**Abstract:** The gracefulness of $G_1 \cup G_2 \odot K_1$ is studied. A new class of graceful graphs is constructed to promote the results of the literature.

**Key words:** graceful graph; balanced bipartic graph; alternating graph; unconnected graph

(责任编辑: 曾剑锋)