文章编号:1000-5862(2014)03-0240-04

半序空间混合单调算子的耦合不动点定理及其应用

王金明,郑雄军*
(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要: 在半序空间 $X\times X$ 中证明了具 $A=CB$ 形式的混合单调算子的耦合不动点定理和最小最大耦合不动点定理. 最后将该定理应用于讨论含有不连续项的混合单调 Volterra 型积分方程耦合拟解的存在性.

关键词: 混合单调算子;半序拓扑空间;耦合不动点;Volterra 积分方程
中图分类号: O 177.91 **文献标志码:** A

0 引言和预备知识

混合单调算子是一类重要的算子,广泛存在于非线性积分方程和微分方程的应用[1-3]中. 在半序 Banach 空间中混合单调算子的耦合不动点定理已有许多很好的结果[4-6]. 孙经先在文献[7]中把 $A=CB$ 形式增算子的结果推广到了第 2 空间为半序拓扑空间,没有要求算子的连续性和紧性,只要求 $B(S)$ 是拟可分的拟紧集. 许多增算子的结果可以适当地推广到混合单调算子. 基于这一思想,本文考虑 A 表为 $A=CB$ 形式的混合单调算子,结合文献[4]中定理 2.1 的方法将文献[8]中增算子的结果推广到混合单调算子,其中 B 是映 D(D 是 $X\times X$ 中的序区间)入另一个半序拓扑空间 Y 的混合单调算子.

定义 1[9] 设 X 是具有半序结构的 Hausdorff 拓扑空间,如果对 X 中任意 2 个有向列 $\{x_\tau\mid\tau\in T\}$ 和 $\{y_\tau\mid\tau\in T\}$,只要 $x_\tau\leqslant y_\tau(\forall\tau\in T)$,$\{x_\tau\}$ 网收敛于 $\bar{x}$,$\{y_\tau\}$ 网收敛于 $\bar{y}$,就有 $\bar{x}\leqslant\bar{y}$,则称 X 是半序拓扑空间.

引理 1[8] 设 X 是半序拓扑空间,则 $\forall\alpha\in X$,$\{y\in X\mid y\geqslant\alpha\}$ 是 X 中的闭集.

定义 2[10] 设 X 是半序空间,其半序用"$\leqslant$"表示,$S\subset X$,$A:S\times S\to X$,

(i) 若 $x_1,x_2,y_1,y_2\in S$,$x_1\leqslant x_2$,$y_1\geqslant y_2$ 蕴含着 $A(x_1,y_1)\leqslant A(x_2,y_2)$,则称 A 是混合单调算子;

(ii) 若 $(x^*,y^*)\in S\times S$ 满足 $x^*=A(x^*,y^*)$,$y^*=A(y^*,x^*)$,则称 (x^*,y^*) 是 A 的耦合不动点;

(iii) 若 $\bar{x}\in S$ 满足 $\bar{x}=A(\bar{x},\bar{x})$,则称 $\bar{x}$ 是 A 的不动点.

若有耦合不动点 (z,w) 使得对任何 A 的耦合不动点 (p,q) 有 $z\leqslant p$,$q\leqslant w$,则称 (z,w) 为算子 A 的最小最大耦合不动点.

乘积空间 $X\times X$ 的半序记为"$\leqslant_1$":

$$(x,y)\leqslant_1(u,v)\Leftrightarrow x\leqslant u,v\leqslant y,\tag{1}$$

则 $X\times X$ 也为半序空间.

定义算子 $\tilde{A}:S\times S\to X\times X$ 如下:

$$\tilde{A}(x,y)=(A(x,y),A(y,x)),(x,y)\in S\times S.$$

引理 2[4] 若 $A:S\times S\to X$ 为混合单调算子,则

(i) 在 $X\times X$ 中的半序"$\leqslant_1$"下 $\tilde{A}$ 为增算子;

(ii) $\tilde{A}$ 有不动点 (x,y) 的充要条件是 (x,y) 为 A 的耦合不动点;

(iii) $\tilde{A}$ 的最小不动点为 A 的最小最大耦合不动点.

1 混合单调算子的耦合不动点定理

定理 1 设 X 为半序集,$[u_0,v_0]$ 是 X 中的序区间. 令 $D=[(u_0,v_0),(v_0,u_0)]$,则 D 是 $X\times X$ 中的序区间. 设 Y 为半序拓扑空间,若算子 $A:D\to X$ 满足:

(i) $u_0\leqslant A(u_0,v_0)$,$A(v_0,u_0)\leqslant v_0$;

(ii) 存在混合单调算子 $B:D\to Y$ 及增算子 $C:B(D)\to X$ 使得 $A=CB$;

收稿日期:2013-12-25
基金项目:江西省自然科学基金(20122BAB201008)和江西省教育厅科技课题(GJJ08169)资助项目.
通信作者:郑雄军(1968-),女,江西上饶人,教授,主要从事非线性泛函分析的研究.

(iii) $B(D)$ 中任一全序子集是 Y 中的相对紧集，则 A 在 D 中至少有耦合不动点.

证　由条件(i)和(ii)知 $A:D\to[u_0,v_0]$ 为混合单调算子，又由引理 2 知 $\tilde{A}$ 是映 D 到 D 的增算子.

令 $M_1=\{(x,y)\in D\mid(x,y)\leqslant_1\tilde{A}(x,y)\}$，$M_2=\{(y,x)\in D\mid(x,y)\in M_1\}$，由条件(i)知 $(u_0,v_0)\in M_1$，故 $M_1\neq\varnothing$，于是 $M_2\neq\varnothing$.

设 N_1 为 M_1 中的任一全序子集，则 $N_2=\{(y,x)\mid(x,y)\in N_1\}$ 为 M_2 中的全序子集. 因 B 为混合单调算子，故 $B(N_i)(i=1,2)$ 是 Y 中的全序子集且 $B(N_i)\subset B(D)$. 由条件(iii)知，$B(N_i)\subset B(M_i)(i=1,2)$ 在 Y 中相对紧. 令 $\overline{B(N_i)}$ 分别是 $B(N_i)(i=1,2)$ 在 Y 中的闭包，则 $\overline{B(N_i)}(i=1,2)$ 是 Y 中的紧集.

对于 $p,q\in Y$，记 $T_1(p)=\{y\in Y\mid p\leqslant y\}$，$T_2(q)=\{y\in Y\mid y\leqslant q\}$，由引理 1 知，$T_1(p)$，$T_2(q)$ 是 Y 中的闭集. $\forall p\in B(N_1)$ 及 $\forall q\in B(N_2)$，分别令 $J_1(p)=\overline{B(N_1)}\cap T_1(p)$，$J_2(q)=\overline{B(N_2)}\cap T_2(q)$，则 $J_1(p)$，$J_2(q)$ 都是 Y 中的闭集.

考察 $\overline{B(N_1)}$ 中的闭子集族 $\{J_1(p)\mid p\in B(N_1)\}$，任意给定其中有限个成员

$$\{J_1(p_i)\mid i=1,2,\cdots,n,p_i\in B(N_1)\},$$

令 $p^*=\max\{p_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$，因为 $B(N_1)$ 是全序集，所以 p^* 有定义，并且 $p_i\leqslant p^*(i=1,2,\cdots,n)$，即 $p^*\in\bigcap_{i=1}^{n}J_1(p_i)$，从而 $\bigcap_{i=1}^{n}J_1(p_i)$ 非空. 又 $\overline{B(N_1)}$ 是紧集，根据紧集的有限非空交性质[1]知，

$$\bigcap_{p\in B(N_1)}J_1(p)\neq\varnothing.$$

同样考察 $\overline{B(N_2)}$ 中的闭子集族 $\{J_2(q)\mid q\in B(N_2)\}$，任意给定其中的有限个成员

$$\{J_2(q_j)\mid j=1,2,\cdots,m,q_j\in B(N_2)\},$$

令 $q^*=\min\{q_j\mid j=1,2,\cdots,m\}$，因为 $B(N_2)$ 是全序集，所以 q^* 有定义，并且 $q^*\leqslant q_j(j=1,2,\cdots,m)$，即 $q^*\in\bigcap_{j=1}^{m}J_2(q_j)$，从而 $\bigcap_{j=1}^{m}J_2(q_j)$ 非空，又由 $\overline{B(N_2)}$ 是紧集及有限非空交性质知 $\bigcap_{q\in B(N_2)}J_2(q)\neq\varnothing$. 所以，$\exists\bar{p}\in\bigcap_{p\in B(N_1)}J_1(p)$，$\bar{q}\in\bigcap_{q\in B(N_2)}J_2(q)$，且 $\forall p\in B(N_1)$ 及 $\forall q\in B(N_2)$ 有

$$p\leqslant\bar{p},\bar{q}\leqslant q. \tag{2}$$

由 $\bar{p}\in\bigcap_{p\in B(N_1)}J_1(p)\subset\overline{B(N_1)}\subset B(D)=[B(u_0,v_0),B(v_0,u_0)]$，$\bar{q}\in\bigcap_{q\in B(N_2)}J_2(q)\subset\overline{B(N_2)}\subset B(D)$ 知，$\exists\{p_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}\subset B(N_1)$ 及 $\{q_\beta\mid\beta\in\Lambda\}\subset B(N_2)$ 使得 $\{p_\alpha\}$ 网收敛于 $\bar{p}$，$\{q_\beta\}$ 网收敛于 $\bar{q}$. 由于 $\bar{p},\bar{q}\in B(D)$，因此 $\bar{x}_1=C\bar{p}\in[u_0,v_0]$，$\bar{x}_2=C\bar{q}\in[u_0,v_0]$ 有定义，下证：

(i) $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ 是 N_1 的上界. 事实上，任取 $(x_1,y_1)\in N_1$，则 $(y_1,x_1)\in N_2$，由(2)式知 $B(x_1,y_1)\leqslant\bar{p},\bar{q}\leqslant B(y_1,x_1)$. 再由 C 是增算子知，

$$CB(x_1,y_1)\leqslant C\bar{p}=\bar{x}_1,\bar{x}_2=C\bar{q}\leqslant CB(y_1,x_1),$$

即 $A(x_1,y_1)\leqslant\bar{x}_1,\bar{x}_2\leqslant A(y_1,x_1)$. 又因为 $N_1\subset M_1$，所以，$(x_1,y_1)\leqslant_1\tilde{A}(x_1,y_1)=(A(x_1,y_1),A(y_1,x_1))$，于是 $x_1\leqslant A(x_1,y_1)$，$A(y_1,x_1)\leqslant y_1$，从而 $x_1\leqslant\bar{x}_1,\bar{x}_2\leqslant y_1$. 由(1)式得 $(x_1,y_1)\leqslant_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$，即 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ 是 N_1 的上界.

(ii) $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in M_1$，即要证 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\leqslant_1\tilde{A}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$. 因 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ 是 N_1 的上界，故 $(\bar{x}_2,\bar{x}_1)$ 是 N_2 的下界. 任取 $(x_1,y_1)\in N_1$，$(x_2,y_2)\in N_2$，都有 $(x_1,y_1)\leqslant(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$，$(\bar{x}_2,\bar{x}_1)\leqslant(x_2,y_2)$. 由 B 的混合单调性可知，

$$B(x_1,y_1)\leqslant B(\bar{x}_1,\bar{x}_2),B(\bar{x}_2,\bar{x}_1)\leqslant B(x_2,y_2).$$

前面已证 $\exists\{p_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}\subset B(N_1)$ 及 $\{q_\beta\mid\beta\in\Lambda\}\subset B(N_2)$ 使得 $\{p_\alpha\}$ 网收敛于 $\bar{p}$，$\{q_\beta\}$ 网收敛于 $\bar{q}$，所以 $\forall\alpha\in\Gamma$，$p_\alpha\leqslant B(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$，但 $\{p_\alpha\}$ 网收敛于 $\bar{p}$，于是由 Y 为半序拓扑空间知 $\bar{p}\leqslant B(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$. 同理，$\forall\beta\in\Lambda$，$B(\bar{x}_2,\bar{x}_1)\leqslant q_\beta$，且 $\{q_\beta\}$ 网收敛于 $\bar{q}$，故有 $B(\bar{x}_2,\bar{x}_1)\leqslant\bar{q}$，于是由 C 的单调性有 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=(C\bar{p},C\bar{q})\leqslant_1(CB(\bar{x}_1,\bar{x}_2),CB(\bar{x}_2,\bar{x}_1))=\tilde{A}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$，故 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in M_1$.

由(i)和(ii)得 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ 为 N_1 在 M_1 中的上界. 利用 Zorn 引理知，M_1 有极大元 (x^*,y^*)，且 $(x^*,y^*)\leqslant_1\tilde{A}(x^*,y^*)$. 又由 $\tilde{A}$ 是增算子知 $\tilde{A}(x^*,y^*)\leqslant_1\tilde{A}(\tilde{A}(x^*,y^*))$，于是 $\tilde{A}(x^*,y^*)\in M_1$，而 (x^*,y^*) 是 M_1 中的极大元，所以 $(x^*,y^*)=\tilde{A}(x^*,y^*)$，即 (x^*,y^*) 为 A 在 D 中的耦合不动点.

注 1　本文定理 1 与文献[4]的定理 2.1 相比有本质区别：只要求第 1 空间是半序空间和第 2 空间是半序拓扑空间，且证明方法与文献[4]也存在不同.

定理 2　在定理 1 的条件下，A 在 D 中存在最小最大耦合不动点.

证　令 $Fix(\tilde{A})=\{(x,y)\in D\mid\tilde{A}(x,y)=(x,y)\}$，由定理 1 知，$Fix(\tilde{A})\neq\varnothing$. 又令 $G=\{[u,v]$，

$(v,u)]\mid[(u,v),(v,u)]$ 是 $X\times X$ 中的序区间,$(u,v)\in D$,$(u,v)\leqslant_1\tilde{A}(u,v)$ 且 $Fix(\tilde{A})\subset[(u,v),(v,u)]\}$,由条件(i)知 $(u_0,v_0)\leqslant_1\tilde{A}(u_0,v_0)$.又由定理 1 的证明知 $Fix(\tilde{A})\subset D$,因此 $D\in G$,从而 $G\neq\varnothing$.在 G 中定义如下的序关系"≤":

$$I_1,I_2\in G,I_1\leqslant I_2\Leftrightarrow I_1\subset I_2,$$

于是 G 为半序集.取 $K=\{[(u_\alpha,v_\alpha),(v_\alpha,u_\alpha)]\mid\alpha\in T\}$ 为 G 中的任一全序子集.记 $U=\{(u_\alpha,v_\alpha)\mid\alpha\in T\}$,$V=\{(v_\alpha,u_\alpha)\mid\alpha\in T\}$,则 U,V 均为 D 中的全序子集,由 B 的混合单调性可知 $B(U)$,$B(V)$ 为 $B(D)$ 中的全序子集.在定理 1 的证明中取 $N_1=U$,$N_2=V$,则有如下结论:

(i) $\exists\bar{p}\in\bigcap\limits_{p\in B(U)}J_1(p)\subset\overline{B(U)}$,$\bar{q}\in\bigcap\limits_{q\in B(V)}J_2(q)\subset\overline{B(V)}$,其中 $J_1(p)=\overline{B(U)}\cap T_1(p)$,$J_2(q)=\overline{B(V)}\cap T_2(q)$,令 $\bar{x}_1=C\bar{p}$,$\bar{x}_2=C\bar{q}$,则 $\bar{x}_1,\bar{x}_2\in[u_0,v_0]$;

(ii) $\forall\alpha\in T,(u_\alpha,v_\alpha)\leqslant_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$;

(iii) $\exists\{(u_{\tau'},v_{\tau'})\}_{\tau'\in A'\subset T}\subset\{(u_\alpha,v_\alpha)\}_{\alpha\in T}$,$\{(v_{\tau''},u_{\tau''})\}_{\tau''\in A''\subset T}\subset\{(v_\alpha,u_\alpha)\}_{\alpha\in T}$,使得 $B(u_{\tau'},v_{\tau'})$ 网收敛于 $\bar{p}\in[B(u_0,v_0),B(v_0,u_0)]$,且 $\forall\alpha\in T,B(u_\alpha,v_\alpha)\leqslant\bar{p}$;$B(v_{\tau''},u_{\tau''})$ 网收敛于 $\bar{q}\in[B(u_0,v_0),B(v_0,u_0)]$,且 $\forall\alpha\in T,B(v_\alpha,u_\alpha)\geqslant\bar{q}$;

(iv) $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\leqslant_1\tilde{A}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$.

任取 $(x,y)\in Fix(\tilde{A})$,$(u_\alpha,v_\alpha)\in U$,则 $(v_\alpha,u_\alpha)\in V$,且由 G 的定义知,$(u_\alpha,v_\alpha)\leqslant_1(x,y)\leqslant_1(v_\alpha,u_\alpha)$.由于 B 是混合单调算子,所以 $\forall\alpha\in T,B(u_\alpha,v_\alpha)\leqslant B(x,y)\leqslant B(v_\alpha,u_\alpha)$,于是 $B(u_{\tau'},v_{\tau'})\leqslant B(x,y)\leqslant B(v_{\tau''},u_{\tau''})$.由 Y 是半序拓扑空间和(iii)有 $\bar{p}\leqslant B(x,y)\leqslant\bar{q}$,再由 C 的增性可得 $C\bar{p}\leqslant CB(x,y)\leqslant C\bar{q}$,即 $\bar{x}_1\leqslant A(x,y)\leqslant\bar{x}_2$.又任取 $(x,y)\in Fix(\tilde{A})$,$(v_\alpha,u_\alpha)\in V$,则 $(u_\alpha,v_\alpha)\in U$,由 G 的定义知 $(u_\alpha,v_\alpha)\leqslant_1(y,x)\leqslant_1(v_\alpha,u_\alpha)$,类似地有 $\bar{x}_1\leqslant A(y,x)\leqslant\bar{x}_2$,故 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\leqslant_1(A(x,y),A(y,x))=\tilde{A}(x,y)=(x,y)$,$(\bar{x}_2,\bar{x}_1)\geqslant_1(A(x,y),A(y,x))=\tilde{A}(x,y)=(x,y)$,即

$$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\leqslant_1(x,y)\leqslant_1(\bar{x}_2,\bar{x}_1),(x,y)\in Fix(\tilde{A}),$$

令 $I=[(\bar{x}_1,\bar{x}_2),(\bar{x}_2,\bar{x}_1)]$,则 $I\in G$,且由(ii)知 $\forall\alpha\in T,(u_\alpha,v_\alpha)\leqslant_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$,$(\bar{x}_2,\bar{x}_1)\leqslant_1(v_\alpha,u_\alpha)$,这表明 $I\subset[(u_\alpha,v_\alpha),(v_\alpha,u_\alpha)]$,故 I 为 K 在 G 中的下界.由 Zorn 引理知 G 有极小元 I^*,设 $I^*=[(u^*,v^*),(v^*,u^*)]$,则 $(u^*,v^*)\leqslant_1\tilde{A}(u^*,v^*)$,$Fix(\tilde{A})\subset[(u^*,v^*),(v^*,u^*)]$.

由 $\tilde{A}$ 为增算子知,$\forall(u,v)\in Fix(\tilde{A})$,$\tilde{A}(u^*,v^*)\leqslant_1\tilde{A}(\tilde{A}(u^*,v^*))$,$\tilde{A}(u^*,v^*)\leqslant_1\tilde{A}(u,v)=(u,v)\leqslant_1\tilde{A}(v^*,u^*)$,所以 $[\tilde{A}(u^*,v^*),\tilde{A}(v^*,u^*)]\in G$,而 $(u^*,v^*)\leqslant_1\tilde{A}(u^*,v^*)=(A(u^*,v^*),A(v^*,u^*))$ 蕴含 $\tilde{A}(v^*,u^*)\leqslant_1(v^*,u^*)$,于是 $[\tilde{A}(u^*,v^*),\tilde{A}(v^*,u^*)]\leqslant I^*$.又 I^* 是 G 的极小元知 $(u^*,v^*)=\tilde{A}(u^*,v^*)$,即 (u^*,v^*) 为 $\tilde{A}$ 的最小不动点,从而由引理 2 知 (u^*,v^*) 为 A 的最小最大耦合不动点.

2 应用

本节讨论定理 2 在 Volterra 积分方程的应用,先给出几个引理.

设 (E,P) 是半序 Banach 空间,$I=[a,b]$,$L_p[I,E]$ 的定义及性质参见文献[12].

引理 3[13] 若 E 自反,则 $L_p[I,E]$ 也自反.

引理 4[14] 设 E 是自反空间,P 是正规锥,则 W(W 为 E 的全序子集)列紧的充要条件是 W 依范数有界.

下面考虑含间断项的 Volterra 积分方程组[15]

$$\begin{cases}u(t)=h(t)+\int_a^t k(t,s)f(s,u(s),v(s))\,\mathrm{d}s,\\ v(t)=h(t)+\int_a^t k(t,s)f(s,v(s),u(s))\,\mathrm{d}s,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $h(t)\in C[I,E]$,$k(x,y):I\times I\to R^1$ 非负连续,$f(t,x,y):I\times E\times E\to E$.作如下假设:

(H_1) $f(t,x,y)$ 关于 x 增,关于 y 减(不要求连续);

(H_2) $\exists u_0,v_0\in C[I,E]$,$u_0\leqslant v_0$(即 $\forall t\in I$,$u_0(t)\leqslant v_0(t)$)使得

$$\begin{cases}u_0(t)\leqslant h(t)+\int_a^t k(t,s)f(s,u_0(s),v_0(s))\,\mathrm{d}s,\\ v_0(t)\geqslant h(t)+\int_a^t k(t,s)f(s,v_0(s),u_0(s))\,\mathrm{d}s,\end{cases}$$

(H_3) $\exists R>0$ 使得 $\forall(u,v)\in D=[(u_0,v_0),(v_0,u_0)]$,有 $\int_I\|f(t,u(t),v(t))\|^p\mathrm{d}t\leqslant R$.

令 $Cu(t)=h(t)+\int_a^t k(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s$,$B(u,v)(t)=f(t,u(t),v(t))$.$C[I,E]$ 中的半序由锥 $P_1=\{\varphi\in C[I,E]\mid\varphi(x)\geqslant0\}$ 导出,$L_p[I,E]$ 中的半序由锥 $P_2=\{\varphi\in L_p[I,E]\mid\varphi(x)\geqslant0\}$ 导出.

定理 3 设 $1<p<+\infty$,E 为自反的 Banach 空

间，满足假设$(H_1) \sim (H_3)$，则积分方程组(3)在 D 中存在最小最大耦合拟解.

证　由条件(H_1)知 $B: D \to L_p[I,E]$ 为混合单调算子，且由文献[6]定理4和 $k(x,y) \geqslant 0$ 知 C 是增算子，且 $C: L_p[I,E] \to C[I,E]$. 令 $A = CB$，所以定理1的条件(ii)被满足. 由假设(H_2)得 $A(u_0,v_0) \geqslant u_0$，$A(v_0,u_0) \leqslant v_0$，即定理1的条件(i)被满足.

因为 E 是自反的 Banach 空间，故由引理3知，$L_p[I,E](1 < p < +\infty)$是自反空间. 设 W 为 $B(D)$ 任一全序子集，由条件(H_3)知 $B(D)$ 是 $L_p[I,E]$ 中的有界集，所以 W 按范数有界. 由 P_2 是 $L_p[I,E]$ 中的正规锥及引理4知 W 是相对紧的，故定理1条件(iii)被满足，因此方程组(3)在 D 中存在最小最大耦合拟解.

注2　虽然本文的例子与文献[4]的例子一样，但证明方法是不同的且更为简洁.

3　参考文献

[1] 刘春晗，王建国. 混合单调算子的不动点定理及其应用[J]. 江南大学学报：自然科学版，2013，12(2)：239-243.

[2] 吴炎生. 一类反向混合单调子方程组的迭代求解[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2012，36(1)：59-62.

[3] 田杰. 一类混合单调算子方程的求解及应用[J]. 纯粹数学与应用数学，2012，28(5)：692-697.

[4] 段华贵，李国帧. 一类混合单调算子的耦合不动点定理及其应用[J]. 应用泛函分析学报，2006，8(4)：335-340.

[5] 郭大钧. 非线性分析中的半序方法[M]. 济南：山东科学技术出版社，1997.

[6] 周智，于朝霞. 混合单调算子的不动点定理及其应用[J]. 高校应用数学学报，1997，12(3)：347-352.

[7] 孙经先. 非连续的增算子的不动点定理及其对含间断项的非线性方程的应用[J]. 数学学报，1988，31(1)：101-107.

[8] 郑雄军，孙经先. 半序空间非连续增算子的不动点定理及应用[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2008，32(5)：597-600.

[9] 刘笑颖，吴从炘. 非连续弱紧增算子的不动点定理及其对 Banach 空间初值问题的应用[J]. 系统科学与数学，2002，20(2)：175-180.

[10] 孙经先. 非线性泛函分析及其应用[M]. 北京：科学出版社，2007.

[11] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[12] Sun Jingxian，Zhao Zengqin. Fixed point theorems of increasing operators and applications to nonlinear integro-differential equations with discontinuous terms[J]. Appl Anal，1993，175(1)：33-45.

[13] Deimling K. Nonlinear functional analysis[M]. Berlin：Springer-Verlag，1985.

[14] 孙经先. Banach 空间中某些新的列紧性判别法及其应用[J]. 数学年刊，1990，11(4)：407-412.

[15] 孙经先. 增算子的不动点和广义不动点[J]. 数学学报，1989，32(4)：457-463.

The Coupled Fixed Point Theorems of Mixed Monotone Operators in Partly Ordered Space and Their Applications

WANG Jin-ming，ZHENG Xiong-jun*

(College of Mathematics and Informatics，Jiangxi Normal University，Nanchang Jiangxi 330022，China)

Abstract： Assuming $X \times X$ is partly ordered space，some coupled fixed point theorems and coupled minimal-maximal fixed points of mixed monotone operators which are expressed as the form $A = CB$ are obtained. As an application，the existence of coupled quasi-solutions for mixed monotone Volterra integral equations with discontinuous terms is discussed.

Key words： mixed monotone operator；partly ordered topological space；coupled fixed point；Volterra integral equation

(责任编辑：曾剑锋)