第 38 卷 第 3 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 3
2014 年 5 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) May 2014

文章编号:1000-5862(2014)03-0244-06

无界域上带奇异扰动的非自治 FitzHugh-Nagumo 系统拉回吸引子的存在性

伍亚军,李晓军*

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要:研究无界区域上带奇异扰动的非自治 FitzHugh-Nagumo 系统的动力学行为,其中非线性项依赖于空间变量 x. 为克服 Sobolev 嵌入缺乏紧性,利用一致"tail"估计,证明系统所对应的过程是拉回渐近紧的,从而说明拉回吸引子的存在性.

关键词:非自治方程;渐近紧;拉回吸引子

中图分类号:O 241.82 **文献标志码**:A

0 引言

本文考虑在 $\mathbf{R}^n$ 上的非自治 FitzHugh-Nagumo 系统 $\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+\lambda u+h(x,u)+v=f(t)$,$\frac{\partial v}{\partial t}-\varepsilon(u-\gamma v)=\varepsilon g(t)$ 的动力学行为,其中 $\nu,\lambda,\varepsilon,\gamma$ 是非负常数,f 和 g 是依赖于 t 的函数,h 是非线性函数.

发展方程的动力学行为能被刻画为吸引子的存在性. 对于自治系统,已有大量的研究[1-4]. 对于非自治系统,一致吸引子用来描述其动力学行为,即存在 1 个紧集,关于外力符号一致吸引解空间中的任意有界集,且是吸引意义下的最小紧集. 比较常用的方法是斜积流法,将非自治系统嵌入到自治系统中去,首先得到该自治系统全局吸引子的存在性,然后通过投影得到原系统一致吸引子的存在性. 由于该方法牵扯到符号空间,故一般要求外力符号在符号空间中作紧性平移[5].

为进一步了解吸引子的结构及在弱的外力假设下研究非自治系统的动力学行为,拉回吸引子的概念被引入到非自治系统中. 拉回吸引子的拉回吸引特性与不变性类似于一致吸引子核截片的性质. 因而,从某种意义上讲,拉回吸引子更为详尽地刻画动力系统的内部信息[6-7]. 最近,源于考虑初值的遍历行为,拉回吸引子的概念被推广到拉回 $\mathscr{D}$ 吸引子,其拉回吸引解空间中的集合不一定是有界集[7-9].

在无界区域上研究发展方程所对应的无穷维动力系统,最大的困难在于 sobolev 嵌入缺乏紧性. 为克服此困难,常用的方法有:(i) 在权空间中考查其动力学行为,利用权函数的衰减特性来得到紧性[10];(ii) 利用能量泛函,说明所关心的解序列有收敛子序列[11];(iii) 区域分割与解的一致"tail"估计,将无界区域分割成一有界区域及其补区域,说明方程的解在有界区域上有一定的正则性,补区域上解一致衰减为 0,从而说明方程的解序列是渐近紧的[12]. 本文利用第 3 种方法研究无界区域上带奇异扰动的非自治 FitzHugh-Nagumo 系统拉回 $\mathscr{D}$ 吸引子的存在性. 由于非线性项依赖于空间变量,所以采用不同于文献[12]中的方法进行解的正则性估计.

1 预备知识

首先给出关于非自治系统的一些概念. 设 X 是 1 个完备的度量空间,其中距离表示为 $d(\cdot,\cdot)$. 称定义于 X 上的双参数映射族 $U(t,\tau):X\to X$,$t\geqslant\tau$,$\tau(\in\mathbf{R})$ 是定义于 X 上的 1 个过程,如果满足

(i) $U(t,\tau)=U(t,r)U(r,\tau)$,$\tau\leqslant r\leqslant t$;

(ii) $U(t,\tau)=I$ 是恒等算子,$\tau\in\mathbf{R}$.

设 $A,B\subset X$,记 $d_{ist}(A,B)$ 表示 A,B 两集合之间的 Hausdorff 半距离,即

$$d_{ist}(A,B)=\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}d(x,y).$$

令 $P(X)$ 是 X 中所有非空子集组成的集合,$\mathscr{D}$

收稿日期:2014-03-10

基金项目:国家自然科学基金(11101121)资助项目.

通信作者:李晓军(1970-),男,甘肃定西人,副教授,博士,主要从事非线性分析与无穷维动力系统的研究.

是 1 族非空参数集，其元素为

$\hat{D} = \{D(t): t \in \mathbf{R}\} \subset P(X)$.

定义 1　如果对给定的 $t \in \mathbf{R}$，$\forall \hat{D} \in \mathscr{D}$，$\exists \tau_0 = \tau_0(t, \hat{D}) \leqslant t$，使得当 $\tau \leqslant \tau_0$ 时，有 $U(t,\tau)D(\tau) \subset B(t)$，则称 $\hat{B} = \{B(t): t \in \mathbf{R}\} \in \mathscr{D}$ 是过程 $U(t,\tau)$ 的拉回 $\mathscr{D}$ 吸收集.

定义 2　称 $\hat{A} = \{A(t): t \in \mathbf{R}\} \subset P(X)$ 是过程 U 在 X 中的 1 个拉回 $\mathscr{D}$ 吸引子，如果它满足

(i) $\hat{A}(t)$ 是紧的，$\forall t \in \mathbf{R}$;

(ii) $\hat{A}(t)$ 是拉回 $\mathscr{D}$ 吸引的，即 $\lim\limits_{\tau \to -\infty} d_{ist}(U(t,\tau)D(\tau), A(t)) = 0$，$\forall \hat{D} \in \mathscr{D}$，$t \in \mathbf{R}$;

(iii) $\hat{A}(t)$ 是不变的，即 $U(t,\tau)A(\tau) = A(t)$，$-\infty < \tau \leqslant t < +\infty$，且 $\hat{A}(t)$ 是拉回吸引意义下的最小紧集族.

定义 3　称 $U(t,\tau)$ 是拉回 $\mathscr{D}$ 渐近紧的，如果 $\forall \hat{D} \in \mathscr{D}$，$t \in \mathbf{R}$，任意序列 $\{\tau_n\} \subset (-\infty, t]$，$\{x_n\} \subset X$，且满足 $\tau_n \to -\infty$，$x_n \in D(\tau_n)$，序列 $\{U(t,\tau_n)x_n\}$ 在 X 上有收敛子序列.

定义 4　称 $U(t,\tau)$ 是闭过程，如果对任何 $\tau \leqslant t$，任意序列 $\{x_n\} \subset X$ 且 $x_n \to x$，$x \in X$，$U(t,\tau)x_n \to y \in X$，则 $U(t,\tau)x = y$.

易知，连续或强弱连续过程都是闭的. 过程的闭性、强弱连续性或连续性都是来保证拉回吸引子的不变特性.

定理 1[9,13]　设 X 是 Banach 空间，$U(t,\tau)$ 是 X 上 1 个闭过程，满足下列条件：

(i) 在 X 上存在拉回 $\mathscr{D}$ 吸收集 $\hat{B} = \{B(t): t \in \mathbf{R}\}$;

(ii) $U(t,\tau)$ 是拉回 $\mathscr{D}$ 渐近紧的，

则在 X 上存在拉回 $\mathscr{D}$ 吸引子 $\hat{A} = \{A(t): t \in \mathbf{R}\}$，$A(t) = \bigcap\limits_{s \leqslant t} \overline{\bigcup\limits_{\tau \leqslant s} U(t,\tau)B(\tau)}^{X}$.

2　FitzHugh-Nagumo 系统的过程

考虑下面非自治系统：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\Delta u + \lambda u + h(x,u) + v = f(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon(u - \gamma v) = \varepsilon g(t), \quad (2)$$

初始条件为

$$u(x,\tau) = u_\tau(x), v(x,\tau) = v_\tau(x), x \in \mathbf{R}^n, \quad (3)$$

其中 v，λ，ε，γ 是非负常数，$f \in L^2_{loc}(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^n))$，$g \in L^2_{loc}(\mathbf{R}, H^1(\mathbf{R}^n))$，$h$ 是 1 个非线性光滑函数，且 $h(u)$ 有如下分解：

$$h(x,u) = h_1(u) + a(x)h_2(u),$$

$h_1(u)$，$h_2(u)$，$a(x)$ 满足：

(H_1)　$\alpha_1|u|^p - \beta_1|u|^2 \leqslant h_1(u)u \leqslant \gamma_1|u|^p + \delta_1|u|^2$，$h_1(u)u \geqslant 0$，$h_1'(u) \geqslant -C$;

(H_2)　$\alpha_2|u|^p - \beta_2 \leqslant h_2(u)u \leqslant \gamma_2|u|^p + \delta_2$，$p \geqslant 2$，$h_2'(u) \geqslant -C$;

(H_3)　$a(x) \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$，$a(x) > 0$;

其中 α_i，β_i，γ_i，δ_i，$i = 1,2$，C 都是非负常数.

由标准的 Fatou-Galerkin 方法[3-4]，有如下结果.

定理 2　假设 $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_3)$ 成立，且 $f \in L^2_{loc}(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^n))$，$g \in L^2_{loc}(\mathbf{R}, H^1(\mathbf{R}^n))$，则问题 (1) ~ (3) 在 $L^2(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$ 中适定，即 $\forall \tau \in \mathbf{R}$，$(u_\tau, v_\tau) \in L^2(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall T > 0$，存在唯一的弱解，$(u,v) \in C([\tau, \tau+T]; L^2(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n))$，且该解连续地依赖于初值.

由定理 2，可以在 $L^2(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$ 上定义过程 $U(t,\tau): U(t,\tau)(u_\tau, v_\tau) = (u(t), v(t))$，其中 $(u(t), v(t))$ 是系统 (1) ~ (3) 的解.

令 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 范数. 为方便起见，若 $E \subset L^2(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$，记

$$\|E\| = \sup_{x \in E} \|x\|_{L^2(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

设 $D = \{D(t)\}$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的 1 族子集组成的集合，且满足

$$\lim_{t \to -\infty} e^{\sigma t}\|D(t)\|^2 = 0, \sigma = \frac{1}{2}\varepsilon\gamma, \quad (4)$$

其中 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$，$\varepsilon_0 = \min\{1, \lambda/\gamma\}$.

记满足 (4) 式的 D 为 $\mathscr{D}_\sigma$. 对于外力项，假设

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{\sigma\xi}\|f(\xi)\|^2 d\xi < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{\sigma\xi}\|g(\xi)\|^2_{H^1} d\xi < \infty, \forall \tau \in \mathbf{R}. \quad (5)$$

此外，为证明相应过程的渐进紧性，假设

$$\lim_{k \to \infty}\int_{-\infty}^{\tau}\int_{|x| \geqslant k} e^{\sigma\xi}|f(x,\xi)|^2 dx d\xi = 0,$$

$$\lim_{k \to \infty}\int_{-\infty}^{\tau}\int_{|x| \geqslant k} e^{\sigma\xi}|g(x,\xi)|^2 dx d\xi = 0, \forall \tau \in \mathbf{R}. \quad (6)$$

由 (6) 式可以推出对每个 $\tau \in \mathbf{R}$，$\forall \eta > 0$，$\exists K = K(\tau, \eta) > 0$，使得

$$\int_{-\infty}^{\tau}\int_{|x| \geqslant k} e^{\sigma\xi}|f(x,\xi)|^2 dx d\xi \leqslant \eta e^{\sigma\tau},$$

$$\int_{-\infty}^{\tau}\int_{|x| \geqslant k} e^{\sigma\xi}|g(x,\xi)|^2 dx d\xi \leqslant \eta e^{\sigma\tau}. \quad (7)$$

3　解的一致估计.

如同文献 [2] 中引理 4.1、引理 4.2 和文献 [4] 中定理 3.1 的证明，可得如下引理.

引理1 假设$(H_1)\sim(H_3)$和(5)式成立,则对每个$\tau\in\mathbf{R}$,$D=\{D(t)\}_{t\in\mathbf{R}}\in\mathscr{D}_\sigma$,$\exists T=T(\tau,D)>1$,使得$\forall t\geqslant T$,有

$$\|u(\tau,\tau-t;u_{\tau-t}(x))\|^2+\|v(\tau,\tau-t;v_{\tau-t}(x))\|^2\leqslant Me^{-\sigma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}e^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)d\xi+C,$$

$$\int_{\tau-t}^{\tau}e^{\sigma\xi}\|u(\xi,\tau-t;u_{\tau-t}(x))\|_{H^1}^2d\xi\leqslant M\int_{-\infty}^{\tau}e^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)d\xi+C,$$

$$\int_{\tau-1}^{\tau}e^{\sigma\xi}\|u(\xi,\tau-t;u_{\tau-t}(x))\|_{H^1}^2d\xi\leqslant M\int_{-\infty}^{\tau}e^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)d\xi+C,$$

$$\int_{\tau-1}^{\tau}e^{\sigma\xi}(\|u(\xi,\tau-t;u_{\tau-t}(x))\|^2+\|v(\xi,\tau-t;v_{\tau-t}(x))\|^2)d\xi\leqslant M\int_{-\infty}^{\tau}e^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)d\xi+C,$$

其中M是依赖于$v,\lambda,\varepsilon,\gamma$的非负常数,$C$是不依赖于$t,\tau$的正常数.

由引理1可知,$U(t,\tau)$于$L^2(\mathbf{R}^n)\times L^2(\mathbf{R}^n)$上存在拉回$\mathscr{D}_\sigma$吸收集$\hat{B}(\tau)=\{B(\tau):\tau\in\mathbf{R}\}\in\mathscr{D}_\sigma$,$B(\tau)=\{(u,v)\in L^2(\mathbf{R}^n)\times L^2(\mathbf{R}^n):\|u(\tau)\|^2+\|v(\tau)\|^2\leqslant\rho(\tau)^2\}$,其中$\rho(\tau)^2=Me^{-\sigma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}e^{\sigma\xi}\cdot(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)d\xi+C$.

引理2 假设$(H_1)\sim(H_3)$和(5)式成立,则$D=\{D(t)\}_{t\in\mathbf{R}}\in\mathscr{D}_\sigma$,每个$\tau\in\mathbf{R}$,使得$\forall t\geqslant T$,$T$如同引理1中,当初值$(u_{\tau-t}(x),v_{\tau-t}(x))\in D(\tau-t)$时,相应的解$u(t)$满足

$$\int_{\tau-1}^{\tau}e^{\sigma\xi}\int_{\mathbf{R}^n}|u(\xi,\tau-1;u_{\tau-t}(x))|^pdxd\xi\leqslant M\int_{-\infty}^{\tau}e^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)d\xi+C,$$

$$\int_{\tau-1}^{\tau}e^{\sigma\xi}\int_{\mathbf{R}^n}a(x)|u(\xi,\tau-1;u_{\tau-t}(x))|^pdxd\xi\leqslant M\int_{-\infty}^{\tau}e^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)d\xi+C,$$

其中M是依赖于$v,\lambda,\varepsilon,\gamma$的正常数,$C$为正常数.

证 分别将εu与(1)式,v与(2)式于$L^2(\mathbf{R}^n)$上作内积,有

$$\frac{1}{2}\varepsilon\frac{d}{dt}\|u\|^2+\varepsilon v\|\nabla u\|^2+\varepsilon\lambda\|u\|^2+\varepsilon\int h_1(u)u+\varepsilon\int a(x)h_2(u)u+\varepsilon\int uv=\varepsilon\int f(t)u. \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\varepsilon\gamma\|v\|^2-\varepsilon\int uv=\varepsilon\int g(t)v. \tag{9}$$

将(8)式与(9)式相加,得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varepsilon\|u\|^2+\|v\|^2)+\varepsilon v\|\nabla u\|^2+\varepsilon\lambda\|u\|^2+\varepsilon\gamma\|v\|^2+\varepsilon\int h_1(u)u+\varepsilon\int a(x)h_2(u)u=\varepsilon\int f(t)u+\varepsilon\int g(t)v. \tag{10}$$

由 Young's 不等式,(10)式右边两项可估计为

$$\left|\varepsilon\int f(t)u\right|\leqslant\varepsilon\|f(t)\|\|u\|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon\lambda\|u\|^2+\frac{\varepsilon}{2\lambda}\|f(t)\|^2, \tag{11}$$

$$\left|\varepsilon\int g(t)v\right|\leqslant\varepsilon\|g(t)\|\|v\|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon\gamma\|v\|^2+\frac{\varepsilon}{2\gamma}\|g(t)\|^2. \tag{12}$$

由(10)~(12)式,并应用$(H_1)\sim(H_3)$,有

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon\|u\|^2+\|v\|^2)+2\sigma(\varepsilon\|u\|^2+\|v\|^2)+2\varepsilon v\|\nabla u\|^2+2\varepsilon\alpha_2\int a(x)|u|^pdx+2\alpha_1\varepsilon\int|u|^pdx\leqslant 2\varepsilon\beta_2\|a\|_{L^1}+\frac{\varepsilon}{\lambda}\|f\|^2+\frac{\varepsilon}{\gamma}\|g\|^2+2\beta_1\int|u|^2dx. \tag{13}$$

(13)式两边乘以$e^{\sigma t}$,在$(\tau-1,\tau)$上积分,并应用引理1得

$$2\varepsilon\alpha_1\int_{\tau-1}^{\tau}e^{\sigma\xi}\int_{\mathbf{R}^n}|u(\xi,\tau-1;u_{\tau-t}(x))|^pdxd\xi\leqslant M\int_{-\infty}^{\tau}e^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)d\xi+C,$$

$$2\varepsilon\alpha_2\int_{\tau-1}^{\tau}e^{\sigma\xi}\int_{\mathbf{R}^n}a(x)|u(\xi,\tau-1;u_{\tau-t}(x))|^pdxd\xi\leqslant M\int_{-\infty}^{\tau}e^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)d\xi+C.$$

令$H_1(u)=\int_0^u h_1(\tau)d\tau$,$H_2(u)=\int_0^u h_2(\tau)d\tau$.由$(H_1)$和$(H_2)$知,存在大于0的常数$\alpha_i',\beta_i',\gamma_i',\delta_i'$,$i=1,2$,使得

(H_4) $\alpha_1'|u(s)|^p-\beta_1'|u(s)|^2\leqslant H_1(u)\leqslant\gamma_1'|u(s)|^p+\delta_1'|u(s)|^2$;

(H_5) $\alpha_2'|u(s)|^p-\beta_2'\leqslant H_2(u)\leqslant\gamma_2'|u(s)|^p+\delta_2'$.

引理3 假设$(H_1)\sim(H_3)$和(5)式成立,则当$D=\{D(t)\}_{t\in\mathbf{R}}\in\mathscr{D}_\sigma$,对每个$\tau\in\mathbf{R}$,使得对所有$t\geqslant T$,$T$如同引理1中,有

$$\|\nabla u(\tau,\tau-t;u_{\tau-t}(x))\|^2\leqslant Me^{-\sigma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}e^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)d\xi+C,$$

其中M是依赖于$v,\lambda,\varepsilon,\gamma$的常数.

证 用u_t与(1)式在$L^2(\mathbf{R}^n)$中作内积,得到

$$\|u_t\|^2+v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2+\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^n}H_1(s)\,\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^n}a(x)H_2(s)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^n}u_t v=\int_{\mathbf{R}^n}f(t)u_t.$$

由 Young's 不等式，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(v\|\nabla u\|^2+\lambda\|u\|^2+\int_{\mathbf{R}^n}H_1(u)\,\mathrm{d}x+\beta_1'\rho^2(\tau)+\int_{\mathbf{R}^n}a(x)(H_2(u)+\beta_2')\,\mathrm{d}x\Big)\leqslant\frac{1}{2}\|f(t)\|^2+\frac{1}{2}\|v\|^2.$$

由 (H_4)，(H_5)，并应用引理 1 和引理 2，$\forall t\geqslant T$，

$$\int_{\mathbf{R}^n}H_1(u)\,\mathrm{d}x+\beta_1'\rho^2(\tau)\geqslant 0,$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}a(x)(H_2(u)+\beta_2')\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

令 $y(t)=v\|\nabla u\|^2+\lambda\|u\|^2+\int_{\mathbf{R}^n}H_1(u)\,\mathrm{d}x+\beta_1'\rho^2(\tau)+\int_{\mathbf{R}^n}a(x)(H_2(u)+\beta_2')\,\mathrm{d}x\geqslant 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)\leqslant\frac{1}{2}\|f(t)\|^2+\frac{1}{2}\|v\|^2.$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[y(t)\mathrm{e}^{\sigma t}]\leqslant\sigma\mathrm{e}^{\sigma t}y(t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sigma t}\|f(t)\|^2+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sigma t}\|v\|^2.\tag{14}$$

对(14)式在 (s,τ) 上积分，且 $\tau-1\leqslant s\leqslant\tau$，可以得到：

$$\mathrm{e}^{\sigma\tau}y(\tau)\leqslant\mathrm{e}^{\sigma s}y(s)+\int_s^\tau\sigma\mathrm{e}^{\sigma\xi}y(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_s^\tau\mathrm{e}^{\sigma\xi}\cdot\|f(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_s^\tau\mathrm{e}^{\sigma\xi}\|v(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi\leqslant\mathrm{e}^{\sigma s}y(s)+\int_{\tau-1}^\tau\sigma\mathrm{e}^{\sigma\xi}y(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\tau\mathrm{e}^{\sigma\xi}\|f(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\tau\mathrm{e}^{\sigma\xi}\cdot\|v(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi.\tag{15}$$

对(15)式关于 s 在 $(\tau-1,\tau)$ 上积分得

$$\mathrm{e}^{\sigma\tau}y(\tau)\leqslant\int_{\tau-1}^\tau\mathrm{e}^{\sigma s}y(s)\,\mathrm{d}s+\int_{\tau-1}^\tau\sigma\mathrm{e}^{\sigma\xi}y(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\tau\mathrm{e}^{\sigma\xi}\|f(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\tau\mathrm{e}^{\sigma\xi}\|v(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi.$$

由引理 1 和引理 2 知，

$$\int_{\tau-1}^\tau\mathrm{e}^{\sigma s}y(s)\,\mathrm{d}s\leqslant M\int_{-\infty}^\tau\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)\,\mathrm{d}\xi+C.$$

故有 $\mathrm{e}^{\sigma\tau}y(\tau)\leqslant M\int_{-\infty}^\tau\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)\,\mathrm{d}\xi+C.$

因此，$\|\nabla u(\tau,\tau-t;u_{\tau-t}(x))\|^2\leqslant$

$$M\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\int_{-\infty}^\tau\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)\,\mathrm{d}\xi+C.$$

为得到 v 的紧性，如同文献[12,15]中，分解 $v=v_1+v_2$，其中 v_1，v_2 分别满足

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+\varepsilon\gamma v_1=0,\ v_1(s)=v_\tau,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+\varepsilon\gamma v_2-\varepsilon u=\varepsilon g(t),\ v_2(s)=0.$$

易知 v_1 满足

$$\|v_1(\tau)\|=\mathrm{e}^{-2\varepsilon\gamma(\tau-s)}\|v_1(s)\|,\ \forall\tau\geqslant s.$$

给定 $\tau\in\mathbf{R}$，$t\geqslant 0$，令 $s=\tau-t$，则

$$\|v_1(\tau)\|=\mathrm{e}^{-2\varepsilon\gamma\tau}\mathrm{e}^{2\varepsilon\gamma(\tau-t)}\|v_\tau(\tau-t)\|.$$

故当 $t\to\infty$ 时，v_1 收敛到 0. 下面对 v_2 在 $H^1(\mathbf{R}^n)$ 中作一致估计. 如同文献[12]中引理 4 的证明，有如下引理.

引理 4　假设 $(H_1)\sim(H_3)$ 和(5)式成立，那么对每个 $\tau\in\mathbf{R}$，$D=\{D(t)\}_{t\in\mathbf{R}}\in\mathscr{D}_\sigma$，使得对所有 $t\geqslant T$，$T>0$ 如同引理 1 中，当初值 $(u_{\tau-t}(x),0)\in D(\tau-t)$ 时，有

$$\|\nabla v_2(\tau,\tau-t;0)\|^2\leqslant M\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\int_{-\infty}^\tau\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2_{H^1})\,\mathrm{d}\xi+C,$$

其中 M 是依赖于 $v,\lambda,\varepsilon,\gamma$ 的常数.

引理 5　假设 $(H_1)\sim(H_3)$ 和(5)～(6)式成立，则对每个 $\eta>0$，$\tau\in\mathbf{R}$，$D=\{D(t)\}_{t\in\mathbf{R}}\in\mathscr{D}_\sigma$，则 $\exists K=K(\tau,\eta)>0$，使得对所有 $t\geqslant T$，$k\geqslant K$，有

$$\int_{|x|\geqslant k}(|u(x,\tau;u_{\tau-t}(x))|^2+|v(x,\tau;v_{\tau-t}(x))|^2)\,\mathrm{d}x\leqslant\eta,$$

其中 $(u_{\tau-t}(x),v_{\tau-t}(x))\in D(\tau-t)$，$K(\tau,\eta)$ 依赖于 $\tau,\eta,\gamma,\lambda,\varepsilon,v,T=T(\tau,D,\eta)$ 如同引理 1 中.

证　令 $\theta(s)$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的光滑函数，且当 $0\leqslant s\leqslant 1$ 时，$\theta(s)=0$；当 $s\geqslant 2$ 时，$\theta(s)=1$，则存在常数 C，使得 $|\theta'(s)|\leqslant C$. 分别用 $\varepsilon\theta(|x|^2/k^2)u$ 与(1)式，$\theta(|x|^2/k^2)v$ 与(2)式在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中作内积，并相加得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\theta\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(\varepsilon|u|^2+|v|^2)+\varepsilon\int\theta\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)(\lambda|u|^2+\gamma|v|^2)\leqslant\varepsilon v\int\theta\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)u\Delta u-\varepsilon\int\theta\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)a(x)h_2(u)u+\varepsilon\int\theta\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)uf(t)+\varepsilon\int\theta\Big(\frac{|x|^2}{k^2}\Big)vg(t).\tag{16}$$

因为 $a(x)\in L^1(\mathbf{R}^n)$，则 $\exists K_1>0$，$\sigma>0$，$\forall\eta>0$，当 $k\geqslant K_1$ 时，有 $\int_{|x|\geqslant k}a(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sigma\eta/(\varepsilon\beta_2)$.

对(16)式右边作估计,又由 $0 \leqslant \theta(s) \leqslant 1$ 和(H_2)可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(\varepsilon|u|^2+|v|^2)+\sigma\int_{\mathbf{R}^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(\varepsilon|u|^2+|v|^2)\leqslant\frac{\varepsilon}{\lambda}\int_{|x|\geqslant k}|f(x,t)|^2\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{\gamma}\int_{|x|\geqslant k}|g(x,t)|^2\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon M}{k}(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2)+2\varepsilon\beta_2\int_{|x|\geqslant k}a(x)\,\mathrm{d}x. \quad (17)$$

用 $\mathrm{e}^{\sigma t}$ 与(17)式作乘积,在$(\tau-t,\tau)$上求积分,$t\geqslant T_1$,有

$$\int_{\mathbf{R}^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(\varepsilon|u(x,\tau)|^2+|v(x,\tau)|^2)\mathrm{d}x\leqslant \mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{e}^{\sigma(\tau-t)}(\varepsilon\|u_{\tau-t}(x)\|^2+\|v_{\tau-t}(x)\|^2)+\frac{\varepsilon}{\lambda}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\cdot\int_{-\infty}^{\tau}\int_{|x|\geqslant k}\mathrm{e}^{\sigma\xi}|f(x,\xi)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi+\frac{\varepsilon}{\gamma}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}\int_{|x|\geqslant k}\mathrm{e}^{\sigma\xi}\cdot|g(x,\xi)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi+\frac{\varepsilon M}{k}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|u(\xi)\|^2+\|\nabla u(\xi)\|^2)\mathrm{d}\xi+2\eta,k\geqslant K_1. \quad (18)$$

对 $\eta>0$,$\exists T_2=T_2(\tau,D,\eta)>0$,使得对所有 $t\geqslant T_2$,有

$$\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{e}^{\sigma(\tau-t)}(\varepsilon\|u_{\tau-t}(x)\|^2+\|v_{\tau-t}(x)\|^2)\leqslant\eta. \quad (19)$$

由(7)式有 $K_2=K_2(\tau,\eta)>0$,使得对所有 $k\geqslant K_2$,有

$$\frac{\varepsilon}{\lambda}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}\int_{|x|\geqslant k}\mathrm{e}^{\sigma\xi}|f(x,\xi)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi+\frac{\varepsilon}{\gamma}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\cdot\int_{-\infty}^{\tau}\int_{|x|\geqslant k}\mathrm{e}^{\sigma\xi}|g(x,\xi)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\leqslant\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\gamma}\right)\varepsilon\eta. \quad (20)$$

由引理1,有 $T_3=T_3(\tau,D)>0$,使得对所有 $t\geqslant T_3$,有

$$\frac{\varepsilon M}{k}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|u(\xi)\|^2+\|\nabla u(\xi)\|^2)\mathrm{d}\xi\leqslant\frac{\varepsilon C}{k}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|f(\xi)\|^2+\|g(\xi)\|^2)\mathrm{d}\xi+\frac{C}{k},$$

因此,$\exists K_3=K_3(\tau,\eta)>0$,使得对所有 $k\geqslant K_3$,$t\geqslant T_3$,有

$$\frac{\varepsilon M}{k}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\int_{\tau-t}^{\tau}\mathrm{e}^{\sigma\xi}(\|u(\xi)\|^2+\|\nabla u(\xi)\|^2)\mathrm{d}\xi\leqslant\eta+\frac{C}{k}. \quad (21)$$

令 $K=\max\{K_1,K_2,K_3\}$,$T=\max\{T_1,T_2,T_3\}$. 由(18)~(21)式知,存在一正常数 M_1(与 η 无关),使得对所有 $k\geqslant K$,$t\geqslant T$,有

$$\int_{\mathbf{R}^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(\varepsilon|u(x,\tau;u_{\tau-t}(x))|^2+|v(x,\tau;v_{\tau-t}(x))|^2)\mathrm{d}x\leqslant M_1\eta.$$

故有

$$\int_{|x|\geqslant\sqrt{2}k}(\varepsilon|u(x,\tau;u_{\tau-t}(x))|^2+|v(x,\tau;v_{\tau-t}(x))|^2)\mathrm{d}x\leqslant\int_{R^n}\theta\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)(\varepsilon|u(x,\tau;u_{\tau-t}(x))|^2+|v(x,\tau;v_{\tau-t}(x))|^2)\mathrm{d}x\leqslant M_1\eta.$$

4 拉回吸引子的存在性

应用引理1~引理4,如文献[12]中引理5.1的证明,有

引理6 假设(H_1)~(H_3)和(5)~(7)式成立,则 $U(t,\tau)$ 在 $L^2(\mathbf{R}^n)\times L^2(\mathbf{R}^n)$ 中是拉回 $\mathscr{D}_\sigma$ 渐近紧的,即对每个 $\tau\in\mathbf{R}$,$D=\{D(t)\}_{t\in\mathbf{R}}\in\mathscr{D}_\sigma$,$t_n\to\infty$,$(u_{\tau,n},v_{\tau,n})\in D(\tau-t_n)$,序列$\{U(t_n,\tau-t_n)(u_{\tau,n},v_{\tau,n})\}$在 $L^2(\mathbf{R}^n)\times L^2(\mathbf{R}^n)$ 中有收敛子序列.

定理3 假设(H_1)~(H_3)和(5)~(7)式成立,则(1)~(3)式所对应的过程在 $L^2(\mathbf{R}^n)\times L^2(\mathbf{R}^n)$ 中有唯一的拉回 $\mathscr{D}_\sigma$ 吸引子$\{A(\tau)\}_{\tau\in\mathbf{R}}$存在.

证 由引理1知,U 在 $L^2(\mathbf{R}^n)\times L^2(\mathbf{R}^n)$ 中有1个拉回 $\mathscr{D}_\sigma$ 吸收集,由引理5知,U 是拉回 $\mathscr{D}_\sigma$ 渐近紧的. 因此,由定理2,U 在 $L^2(\mathbf{R}^n)\times L^2(\mathbf{R}^n)$ 中存在拉回 $\mathscr{D}_\sigma$ 吸引子.

5 参考文献

[1] Abergel F. Existence and finite dimensionality of the global attractor for evolution equations on unbounded domains [J]. J Differential Equations,1990,83(1):85-108.

[2] Liu Weishi,Wang Bixiang. Asymptotic behavior of the FitzHugh-Nagumo system [J]. International J Evolution Equations,2007,2(2):129-163.

[3] Robinson J C. Infinite-dimensional dynamical systems an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors [M]. Cambridge:Cambridge University Press,2001.

[4] Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics [M]. 2nd ed. New York:Springer,1997.

[5] Chenpyzhov V V,Vishik M I. Attractors for equations of mathematical physics [M]. Rhode Island:Amer Math Soc Colloq Publ,2002.

[6] Cheban D N,Kloeden P E,Schmalfuss B. The relationship between pullback forward and global attractors of non-autonomous dynamical systems [J]. Nonlinear Dyn Syst

Theory,2002,2(2):9-28.
[7] Marín-Rubio P,Real J. On the relation of between two different concepts of pullback attractors for non-autonomous dynamical systems [J]. Nonlinear Anal,2009,71(9):3956-3963.
[8] Caraballo T,Lukaszewicz G,Real J. Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems [J]. Nonlinear Anal,2006,64(3):484-498.
[9] García-Luengo J,Marín-Rubio P,Real J. Pullback attractors in V for non-autonomous 2D-Navier-Stokes equations and their tempered behavior [J]. J Differential Equations,2012,252(8):4333-4356.
[10] Babin A V,Vishik M I. Attractors of partial differential equations in an unbound domain [J]. Proc Roy Soc Edinburgh,1990,116 A:221-243.
[11] Wang Bixiang. Attractors for reaction-diffusion equation in unbounded domains [J]. Physica D,1999,128(1):41-52.
[12] Wang Bixiang. Pullback attractors for the non-autonomous FitzHugh-Nagumo system on unbounded domains [J]. Nonlinear Anal,2009,70(11):3799-3915.
[13] Song Haitao. Pullback attractors of non-autonomous reaction-diffusion equations in H_0^1 [J]. J Differential Equations,2010,249(10):2357-2376.
[14] Zhang Yanhong,Zhong Chengkui,Wang Suyun. Attractors in $L^2(R^N)$ for a class of reaction-diffusion equations [J]. Nonlinear Anal,2009,71(5/6):1901-1908.
[15] Marion M. Finite-dimensional attractors associated with partly dissipative reaction-diffusion systems [J]. SIAM J Math Anal,1989,20(4):816-844.

The Pullback Attractors for the Singularly Perturbed Non-Autonomous FitzHugh-Nagumo System on Unbounded Domains

WU Ya-jun,LI Xiao-jun *
(School of Science,Hehai University,Nanjing Jiangsu 210098,China)

Abstract: The dynamical behavior of the singularly perturbed non-autonomous FitzHugh-Nagumo systems defined on unbounded domains is studied,where nonlinear terms are depending on the space variable x. In order to overcome the lacking compact of Sobolev imbedding,it is proved the process associated with the system is pullback asymptotic compactness by using uniform estimates on the tails of solutions,and show the existence of a pullback attractor.

Key words: non-autonomous equation; asymptotic compactness; pullback attractor

(责任编辑: 曾剑锋)