文章编号: 1000-5862(2014)03-0250-04

# 一类亚纯系数高阶线性微分方程解的增长性

艾丽娟,易才凤*
(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

**摘要**: 运用 Nevanlinna 值分布的理论和方法,研究了微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=0(k\geqslant 2)$ 解的增长性,其中 $A_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是亚纯函数,通过给定 $A_j$ 的不同条件,证明了齐次线性微分方程的任一非零解均为无穷级.

**关键词**: 微分方程; 亚纯函数; 亏值; 无穷级
**中图分类号**: O 174.52　　**文献标志码**: A

## 0　引言与结果

本文假定读者熟悉亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论的标准记号和基本内容[1-2]. 特别地,用 $\rho(f)$ 和 $\mu(f)$ 分别表示函数 $f$ 的增长级与下级,用 $\lambda(f)$ 和 $\lambda(1/f)$ 依次表示 $f(z)$ 的零点和极点的收敛指数.

为更精确地估计亚纯函数的增长性,还需要下面超级的定义.

**定义 1**　设 $f(z)$ 为复平面 C 上的亚纯函数. 定义 $f(z)$ 的超级 $\rho_2(f)$ 为

$$\rho_2(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+\log^+T(r,f)}{\log r}.$$

关于高阶线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=0(k\geqslant 2)\quad(1)$$

解的增长性,文献[3]证明了以下结论.

**定理 A**　设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数,并假设下面的(i)或(ii)成立:

(i) $\rho(A_j)<\rho(A_0)<\infty(j=1,2,\cdots,k-1)$;

(ii) $A_0$ 是有限级超越整函数,$A_1,\cdots,A_{k-1}$ 为多项式,则微分方程(1)的所有非零解具有无穷级.

**定理 B**[4]　设 $A_j(z)(j=0,\cdots,k-1)$ 为满足下列条件的整函数,假设存在 1 个整数 $j\in\{1,2,\cdots,k-1\}$,使得 $A_j(z)$ 具有 1 个有穷亏值,$A_0(z)$ 是满足 $\mu(A_0)<1/2$ 的超越整函数,$\rho(A_i)<\mu(A_0)$,$i\neq j(1\leqslant i\leqslant k-1)$,则方程(1)的每 1 个非零解 $f$ 满足 $\rho(f)=\infty$ 并且 $\rho_2(f)\geqslant\mu(A_0)$.

在文献[5]中,朱军等讨论了亚纯系数 2 阶线性微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0\quad(2)$$

解的增长性,证明了

**定理 C**　假设 $A(z)$ 是 1 个具有有穷亏值的亚纯函数,$B(z)$ 是 1 个满足 $\lambda(1/B)<\rho(B)\leqslant 1/2$ 的超越亚纯函数,则方程(2)的每 1 个非零解是无穷级.

关于系数具有亏值的线性微分方程解的增长性的讨论,文献[6-7]也得到了有趣的结果,本文利用亏值理论进一步研究了方程(1)解的增长性与超级,主要结果如下.

**定理 1**　假设 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,k-1)$ 为满足下列条件的有限级亚纯函数,存在 1 个整数 $j\in\{1,2,\cdots,k-1\}$,使得 $A_j(z)$ 具有 1 个有穷亏值,$A_0(z)$ 是满足 $\lambda(1/A_0)<\rho(A_0)\leqslant 1/2$ 的超越亚纯函数,$\rho(A_i)<\rho(A_0)(i\neq j,1\leqslant i\leqslant k-1)$,并且 $\forall\varepsilon>0$,$\varepsilon_1>0$,对所有满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E$ 的 $z$ 有 $|A_i(z)|\leqslant\exp\{r^{\rho(A_i)+\varepsilon}\}$ 成立,其中 $E$ 的线测度 $mE<e^{-r^{\varepsilon_1}}$,则方程(1)的所有非零亚纯解 $f$ 满足 $\rho(f)=\infty$.

**定理 2**　设 $\alpha>0$,$\beta>0$ 为给定的 2 个常数,设 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,k-1)$ 为满足下列条件的亚纯函数,假设存在 1 个整数 $j\in\{1,2,\cdots,k-1\}$,使得 $A_j(z)$ 有 1 个有穷亏值,并且对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 2 个实数集 $\{\varphi_l\}$,$\{\theta_l\}$ 满足 $\varphi_1<\theta_1<\varphi_2<\theta_2<\cdots<\varphi_m<\theta_m<\varphi_{m+1}$,其中 $\varphi_{m+1}=\varphi_1+2\pi$,且

$$\sum_{l=1}^{m}(\varphi_{l+1}-\theta_l)<\varepsilon,$$

收稿日期: 2014-01-06
基金项目: 国家自然科学基金(11171170)资助项目.
通信作者: 易才凤(1955-),女,江西吉安人,教授,主要从事复分析方向研究.

使得当 $z \to \infty$ 时,有

$$|A_0(z)| \geqslant \exp\{(1+o(1))\alpha|z|^\beta\}$$

和

$$|A_i(z)| \leqslant \exp\{o(1)|z|^\beta\}\ (i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant k-1)$$

在 $\varphi_l \leqslant \arg z \leqslant \theta_l (l = 1,2,\cdots,m)$ 中成立,则方程(1)的所有非零解 $f$ 满足 $\rho(f) = \infty$ 并且 $\rho_2(f) \geqslant \beta$.

# 1　引理

定理的证明需要用到下列引理.

**引理 1**[8]　假设 $f(z)$ 是开平面上的超越亚纯函数,$\Gamma = \{(k_1,j_1),(k_2,j_2),\cdots,(k_q,j_q)\}$ 是由不同整数对所构成的有限集合,满足 $k_i > j_i \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,q)$,又设 $\alpha(\alpha > 1)$ 是实常数及 $\varepsilon > 0$ 是任意给定的正数,则

(i) 存在零测度集 $E_1 \subset [0,2\pi)$ 和仅依赖于 $\Gamma$,$\alpha$ 的常数 $C > 0$,使得如果 $\varphi_0 \in [0,2\pi) \setminus E_1$,则存在常数 $R_0 = R_0(\varphi_0) > 1$,对满足 $\arg z = \varphi_0$ 及 $|z| = r \geqslant R_0$ 的所有的 $z$ 及所有的 $(k,j) \in \Gamma$,都有

$$\left(\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right) \leqslant C\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^\alpha r\log T(\alpha r,f)\right)^{k-j}. \quad (3)$$

特别地,当 $f(z)$ 的级 $\rho(f) = \rho < \infty$ 时,(3)式可由下式代替:

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \quad (4)$$

(ii) 存在有限对数测度集 $E_2 \subset (1,\infty)$ 和仅依赖于 $\Gamma$,$\alpha$ 的常数 $C > 0$,使得当 $z$ 满足 $|z| \notin E_2 \cup [0,1]$ 及 $(k,j) \in \Gamma$ 时,(3)式成立.

特别地,当 $f(z)$ 的级 $\rho(f) = \rho < \infty$ 时,(4)式成立.

(iii) 存在有限对数测度集 $E_3 \subset [0,\infty)$ 和仅依赖 $\Gamma$,$\alpha$ 的常数 $C > 0$,使得当 $z$ 满足 $|z| \notin E_3$ 和 $(k,j) \in \Gamma$ 时,都有

$$\left(\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right) \leqslant C(T(\alpha r,f)r^\varepsilon\log^\alpha r\log T(\alpha r,f))^{k-j}. \quad (5)$$

特别地,当 $f(z)$ 的级 $\rho(f) = \rho < \infty$ 时,(5)式可用下面的(6)式代替:

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho+\varepsilon)}. \quad (6)$$

为了叙述后面的引理,定义集合 $E \subset [1,\infty)$ 的上对数密度和下对数密度如下:

$$\overline{\log d_{ens}}E = \varlimsup_{r\to\infty} m_l(E \cap [1,r])/\log r,$$

$$\underline{\log d_{ens}}E = \varliminf_{r\to\infty} m_l(E \cap [1,r])/\log r,$$

其中 $m_l(E \cap [1,r]) = \int_{E\cap[1,r]} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

**引理 2**[9]　假设 $f(z)$ 是 1 个具有有穷 $\rho$ 级的亚纯函数,对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 及 $0 < l < 1/2$,则存在常数 $K(\rho,\varepsilon)$ 及集合 $E(\varepsilon) \subset [0,\infty)$,其下对数密度 $\underline{\log d_{ens}}E(\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon$,使得当 $r \in E(\varepsilon)$ 及对于每 1 个长度为 $l$ 的区间 $J$,总有

$$r\int_J \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|\mathrm{d}\theta < K(\rho,\varepsilon)\left(l\log\frac{1}{l}\right)T(r,f).$$

**引理 3**　假设 $f(z)$ 是 1 个亚纯函数,满足 $\lambda(1/f) < \rho(f) \leqslant 1/2$,则如下的 2 个论断必有 1 个成立:

(i) 对每 1 个 $\eta < \rho(f)$,存在点列 $r_n = r_n(\eta)$,使得对所有满足 $|z| = r_n$ 的 $z$,有

$$\log|f(z)| > r_n^\eta;$$

(ii) 对每 1 个 $\eta < \rho(f)$,定义集合

$$K_r = \{\theta \in [0,2\pi]: \log|f(re^{i\theta})| < r^\eta\},$$

则必存在集合 $E = E(\eta) \subset [0,\infty]$,$\overline{\log d_{ens}}E = 1$,使得

$$mK_r \to 0, r \to \infty, r \in E.$$

**引理 4**　假设 $f(z)$ 是 1 个亚纯函数且满足 $\rho(f) = \rho < \rho_1 < \infty$,则 $\forall \varepsilon > 0$,存在 1 个集合 $E(\varepsilon) \subset [1,\infty)$,满足

$$m(E(\varepsilon) \cap [r/e, er]) < e^{-r^\varepsilon}, r > r_0(\varepsilon), \quad (7)$$

使得当 $|z| = r \notin E(\varepsilon)$ 时,有

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < e^{r^{3\varepsilon}}, \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < e^{r^{3\varepsilon}}, r > r_0(\varepsilon)$$

成立. 特别地,$\overline{\log d_{ens}}E(\varepsilon) = 0$.

注 1　根据引理 4 的证明易知,当 $|z| = r \notin E_1(\varepsilon)$,$r > r_0(\varepsilon)$ 时,有 $|f^{(i)}(z)/f^{(i-1)}(z)| < e^{r^{3\varepsilon}}$ $(2 < i \leqslant k)$,此时的例外集为 $E_1(\varepsilon) = E(\varepsilon) \cup E$ 也满足(7)式,其中 $E(\varepsilon)$ 为引理 4 中的 $E(\varepsilon)$,$E$ 为定理 1 中的例外集 $E$.

**引理 5**[10]　假设 $g(z)$ 是 1 个整函数,满足 $\rho(g) < 1$,设 $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \min\{\rho(g)/2, 1-\rho(g)\}$,存在 1 个 $r$ 的无界集,使得当 $\theta \in [0,2\pi]$ 时,有

$$\log|g(re^{i\theta})| > r^{\rho(g)-\varepsilon}.$$

进一步假设 $E_3 \subset [1,\infty)$ 满足

$$m(E_3 \cap [r/e, er]) < e^{-r^{6\varepsilon}}, r > r_0(\varepsilon),$$

则存在无界的 $s$ 值集,使得当 $s \notin E_3$ 时,有 $\log|g(se^{i\theta})| > s^{\rho(g)-2\varepsilon}$ 对所有的 $\theta \in [0,2\pi]$ 均成立.

注 2　如果 $f(z)$ 是满足 $\lambda(1/f) < \rho(f) < 1$ 的亚纯函数,则当 $0 < \varepsilon < \min\{(\rho(f)-\lambda(1/f))/2, 1-\rho(f)\}$ 时,上述引理 5 的结论依然成立.

**引理 6**[11]　设 $g(z)$ 是满足 $0 < \mu(g) < 1/2$ 的整函数,$A(z)$ 是满足 $\rho(A) < \infty$ 的亚纯函数,如果

$A(z)$ 有 1 个有穷亏值 $a$，亏量 $\delta = \delta(a, A)$，则对任意给定的常数 $\varepsilon > 0$，存在序列 $\{r_n\}$，其中 $r_n < r_{n+1}$，$r_n \to \infty(n \to \infty)$，使得下面 2 个不等式

$$|g(r_n e^{i\varphi})| > \exp\{r_n^{\mu(g)-\varepsilon}\}, \varphi \in [0, 2\pi]$$

和

$$m_{eas}(F_n) =: m_{eas}\{\theta \in [0, 2\pi]: \log|A(r_n e^{i\theta}) - a| \leqslant -\frac{\delta}{4}T(r_n, A)\} \geqslant d > 0 \quad (8)$$

当 $n$ 充分大时成立，其中 $d$ 是常数，其取值仅依赖于 $\rho(A)$，$\mu(g)$ 和 $\delta$.

## 2 定理的证明

**定理 1 的证明** 假设 $f$ 是方程(1)的级为 $\rho(f) < \infty$ 的任一超越亚纯解，下面将导出矛盾.

设 $a$ 为 $A_j(z)$ 的有穷亏值，由方程(1)有

$$|A_0(z)| \leqslant \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_{j+1}(z)|\left|\frac{f^{(j+1)}(z)}{f(z)}\right| + (|A_j(z) - a| + |a|)\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + |A_{j-1}(z)|\left|\frac{f^{(j-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|. \quad (9)$$

由引理 1 知，存在对数测度有限的集合 $E_1 \subset [1, \infty)$，使得

$$\left|\frac{f^{(m)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant |z|^{k\rho(f)}, m = 1, 2, \cdots, k \quad (10)$$

对所有满足 $|z| = r \notin E_1 \cup [0, l_0](l_0 > 1)$ 的 $z$ 成立.

假设亏量 $\delta(a, A_j(z)) = 2\delta > 0$，由亏量的定义，对所有的 $r > r_0$，$m(r, 1/(A_j(z) - a)) \geqslant \delta T(r, A_j)$ 总成立. 因此当 $r > r_0$ 时，必然存在点 $z_r$ 满足 $|z_r| = r$ 及

$$\log|A_j(z_r) - a| \leqslant -\delta T(r, A_j). \quad (11)$$

取定 $\varepsilon_0 = \rho(A_0)/2 > 0$，对 $A_j(z) - a$ 应用引理 2，并选取 $l_0 = l_0(\rho(A_j), \rho(A_0), \delta) > 0$ 充分小使得 $K(\rho(A_j), \varepsilon_0) l_0 \log(1/l_0) < \delta/4$，于是对每个长度为 $l_0$ 的区间 $J$，并且对所有 $r > r_1 > r_0$，$r \in E(\varepsilon_0)$，有

$$r\int_J \left|\frac{A_j'(re^{i\theta})}{A_j(re^{i\theta}) - a}\right| d\theta < \frac{\delta}{2}T(r, A_j), \quad (12)$$

其中 $E(\varepsilon_0)$ 是一个由引理 2 确定的下对数密度 $\underline{\log d_{ens}}E(\varepsilon_0) \geqslant 1 - \varepsilon_0$ 的集合.

现设 $z_r = re^{i\theta_r}$，选取 $\varphi_0 = l_0/4 > 0$，由(11)~(12)式可知对所有的 $|z_r| = r \in E(\varepsilon_0) \setminus [0, r_1]$ 及所有的 $\theta \in [\theta_r - \varphi_0, \theta_r + \varphi_0]$，总有

$$\log|A_j(re^{i\theta}) - a| = \log|A_j(re^{i\theta_r}) - a| + \int_{\theta_r}^{\theta}\frac{d}{dt}\log|A_j(re^{it}) - a|dt \leqslant -\delta T(r, A_j) + r\int_{\theta_r}^{\theta}\left|\frac{A_j'(re^{it})}{A_j(re^{it}) - a}\right|dt \leqslant -\frac{\delta}{2}T(r, A_j) \leqslant 0.$$

因此，当 $|z_r| = r \in E(\varepsilon_0) \setminus [0, r_1]$，并且 $\theta \in [\theta_r - \varphi_0, \theta_r + \varphi_0]$ 时，有

$$|A_j(re^{i\theta}) - a| \leqslant 1. \quad (13)$$

由定理 1 的假设 $\rho(A_i) < \rho(A_0)(i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant k-1)$，并且 $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon_1 > 0$，有 $|A_i(z)| \leqslant \exp\{r^{\rho(A_i)+\varepsilon}\}$ 对所有满足 $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ 的 $z$ 成立，其中 $E$ 的线测度 $mE < e^{-r\varepsilon_1}$，所以对任意给定的常数 $\alpha$，其中 $\max\{\rho(A_i), i \neq j\} < \alpha < \rho(A_0)$，存在常数 $R_1 > 0$，使得

$$|A_i(z)| \leqslant \exp(r^{\alpha}) \quad (14)$$

对 $|z| = r > R_1$，$|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ 的 $z$ 成立.

由假设 $\lambda(1/A_0) < \rho(A_0) \leqslant 1/2$，根据引理 3，可将定理的证明分成 2 种情形.

情形 1 假设引理 3 中的(i)成立，也即是对 $0 < \varepsilon_1 < (\rho(A_0) - \alpha)/2$，存在序列 $\{r_n\}$，$r_n \to \infty$，使得当 $z$ 满足 $|z| = r_n$ 时，有

$$\log|A_0(z)| > r_n^{\rho(A_0)-\varepsilon_1}.$$

对 $f(z)$ 关于 $\varepsilon_1$ 应用引理 4 及注 1，则存在集合 $E_1(\varepsilon_1) \subset [1, \infty)$，满足

$$m(E_1(\varepsilon_1) \cap [r/e, er]) < e^{-r\varepsilon_1}, r > r_0(\varepsilon_1)$$

并且使得当 $|z| = r \notin E_1(\varepsilon_1)$ 时，有

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant e^{r^{3\varepsilon_1}}, \left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| = \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant e^{2r^{3\varepsilon_1}}, \cdots, \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant e^{kr^{3\varepsilon_1}} \quad (15)$$

及(14)成立.

再对 $A_0(z)$ 应用引理 5 及注 2，存在序列 $s_n \to \infty$，$s_n \notin E_1(\varepsilon_1)$，使得当 $\theta \in [0, 2\pi]$ 时，

$$\log|A_0(s_n e^{i\theta})| > s_n^{\rho(A_0)-2\varepsilon_1}, \quad (16)$$

联合(9)式，(13)~(16)式导出在点 $z_r$，$|z_r| = s_n$ 处，有 $s_n \to \infty$ 且

$$e^{\{s_n^{\rho(A_0)-2\varepsilon_1}\}} \leqslant e^{ks_n^{3\varepsilon_1}}(2 + (k-2)\exp(s_n^{\alpha}) + |a|), \quad (17)$$

由 $\varepsilon_1$ 的取法知 $\rho(A_0) - 2\varepsilon_1 > \alpha$，所以当 $n$ 充分大时，(17)式是矛盾的.

情形 2 令 $K_r = \{\theta \in [0, 2\pi]: \log|A_0(re^{i\theta})| < r^{\rho(A_0)-\varepsilon_1}\}$，则 $\exists E_2 \subset [0, \infty)$，$\overline{\log d_{ens}}E_2 = 1$，使得当 $r \to \infty$ 时，$m(K_r) \to 0$，则由引理 1(ii)，存在集合 $E_1 \subset [0, \infty)$，其对数测度 $m_l(E_1) < \infty$，使得当 $z$ 满足 $|z| = r \notin E_1 \cup [0, r_1]$ 时，有

$$|f^{(k)}(z)/f(z)| \leqslant |z|^{k(\rho(f)+1)}. \quad (18)$$

记 $E_3 = (E(\varepsilon_0) \cap E_2) \setminus (E_1 \cup [0, r_1] \cup E)$，经简单计算可知 $\overline{\log d_{ens}} E_3 \geqslant 1 - \varepsilon_0$，因此存在序列 $\{r_n\} \subset E_3$ 及 $\theta_n \in [\theta_{r_n} - \varphi_0, \theta_{r_n} + \varphi_0] - K_{r_n}$，令 $z_n = re^{i\theta_n}$，由(9)式，(13)~(14)式，(18)式以及 $\log|A_0(z_n)| \geqslant r_n^{\rho(A_0)-\varepsilon_1}$ 同时成立，可得 $e^{\{r_n^{\rho(A_0)-\varepsilon_1}\}} \leqslant |z|^{k(\rho(f)+1)}(2 + (k-2)\exp\{r_n^{\alpha}\} + |a|)$.

显然当 $n$ 充分大时，这是矛盾的.

容易知道方程(1)不存在有理函数解. 所以定理 1 成立.

**定理2 的证明**　首先证明方程(1)的任意非零解是无穷级，假设 $f(z)$ 是方程(1)的级为 $\rho(f) < \infty$ 的任一超越亚纯解，将导出矛盾.

运用引理 1，存在对数测度有限的集合 $E_4 \subset [1, \infty)$，使得(10)式对所有满足 $|z| = r \notin (E_4 \cup [0, l_1])$ $(l_1 > 1)$ 的 $z$ 成立，对 $A_j(z)$ 使用引理 6，存在序列 $\{r_n\}$ 使得(8)式成立. 令 $0 < \varepsilon < d/2$，则对每 1 个整数 $n$，可以选取 $\phi_n \in F_n \cap (\bigcup_{l=1}^{m} [\varphi_l, \theta_l])$. 所以存在 1 个整数 $l \in \{1, 2, \cdots, m\}$，使得对每 1 个整数 $n$，总有 $\phi_n \in F_n \cap [\varphi_l, \theta_l]$（否则，选取 $\phi_n$ 的子序列 $\phi_{n_j}$）. 由已知条件，当 $n \to \infty$ 时，有

$$|A_0(r_n e^{i\phi_n})| \geqslant \exp\{(1 + o(1))\alpha r_n^{\beta}\}, \quad (19)$$

$$|A_i(r_n e^{i\phi_n})| \leqslant \exp\{o(1) r_n^{\beta}\}. \quad (20)$$

结合(9)~(10)式，(13)式，(19)~(20)式有

$$\exp\{(1 + o(1))\alpha r_n^{\beta}\} \leqslant r_n^{k\rho(f)}\left(1 + |a| + (k-2)\exp(o(1) r_n^{\beta}) + \exp\left\{-\frac{\delta}{4}T(r_n, A_j)\right\}\right), n \geqslant n_0. \quad (21)$$

这显然是矛盾的，因此方程(1)的每 1 个非零解满足 $\rho(f) = \infty$.

下面证明 $\rho_2(f) \geqslant \beta$.

利用引理 1，存在对数测度有限的集合 $E_5 \subset (1, \infty)$，常数 $B > 0$，使得对所有满足 $|z| = r \notin E_5 \cup [0, 1]$ 的 $z$，有

$$|f^{(m)}(z)/f(z)| \leqslant BT(2r, f)^{2k}, m = 1, \cdots, k.$$

对 $A_j(z)$ 使用引理6，存在序列 $\{r_n\}$，其中 $r_n < r_{n+1}$ 及 $r_n \to \infty$ $(n \to \infty)$，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有(8)式成立. $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < d/2)$，令

$$G^* = \bigcup_{l=1}^{m} [\varphi_l, \theta_l],$$

则 $m_{eas}(G = F_n \cap G^*) > d/2$. 因此 $\exists \theta_n \in G$ 和常数 $R_3 > 0$，使得

$$|A_0(z)| \geqslant \exp\{(1 + o(1))\alpha r_n^{\beta}\} \quad (22)$$

和

$$|A_i(z)| \leqslant \exp\{o(1) r_n^{\beta}\} (i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant k-1) \quad (23)$$

对所有满足 $\arg z = \theta_n$ 和 $|z| = r > R_3$ 的 $z$ 成立.

选取点列 $z_n = r_n e^{i\theta_n}$，其中 $r_n \notin E_5 \cup [0, R_3]$，结合(9)式，(21)~(23)式，有

$$\exp\{(1 + o(1))\alpha r_n^{\beta}\} \leqslant BT(2r_n, f)^{2k}\left(1 + |a| + (k-2)\exp(o(1) r_n^{\beta}) + \exp\left\{-\frac{\delta}{4}T(r_n, A_j)\right\}\right),$$

$n \geqslant n_0$.

因此

$$\limsup_{r \to \infty} \log^+ \log^+ T(r, f)/\log r \geqslant \beta.$$

即 $\rho_2(f) \geqslant \beta$. 所以定理 2 成立.

## 3　参考文献


[1] Hayman W. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社. 1982.

[3] Chen Zongxuan, Gao Shian. Some oscillation theorems of higher order non-homogeneous linear differential equations with transcendental meromorphic coefficents [J]. Ann of diff Eqs, 1996, 12: 28-39.

[4] 龙见仁，朱军，李晓曼. 一类高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 数学物理学报. 2013, 33A(3): 401-408.

[5] 朱军，伍鹏程. 关于复微分方程 $f'' + Af' + Bf = 0$ 解的增长性(2)* [J]. 数学年刊. 2011, 32 A(5): 531-538.

[6] 刘旭强，易才凤. 关于 2 阶线性微分方程 $f'' + Af' + Bf = 0$ 解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37(2): 171-174.

[7] 杨碧珑，易才凤. 一类亚纯系数高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(5): 477-481.

[8] Gundersen G G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. J London Math Soc, 1988, 37(2): 88-104.

[9] Fuchs W. Proof of a conjectrue of G Polya concerning gaps series [J]. Illinois J Math, 1963, 7: 661-667.

[10] Hellenstein S, Miles J, Rossi J. On the growth of solutions of certain linear differential equations [J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1992, 17: 343-365.

[11] Zhu Jun, Wu Pengcheng. On the growth of solutions of the complex differential equation $f'' + Af' + Bf = 0$ [J]. Science in China Ser A, 2011, 54(5): 939-947.


（下转第 260 页）

[12] Hmidi T,Keraani S. On the global well-posedness result for two-dimensional Boussinesq system with a zero diffusivity [J]. Adv Diff Equations,2007,12(4):461-480.
[13] Hmidi T,Keraani S. On the global well-posedness result for two-dimensional Boussinesq system with zero viscosity [J]. Indiana Univ Math J,2009,58(4):1591-1618.
[14] Hou Thomas Y,Li Congming. Global well-posedness of the viscous Boussinesq equations [J]. Discrete Contin Dyn Syst,2005,12(1):1-12.
[15] Ishimura N,Morimoto H. Remarks on the blow-up criterion for the 3D Boussinesq equations [J]. Math Meth Appl Sci,1999,9(9):1323-1332.
[16] Qiu Hua,Du Yi,Yao Zheng'an. Serrin-type blow-up criteria for three-dimensional Boussinesq equations [J]. Appl Anal,2010,89(10):1603-1613.
[17] Lemarie´e-Rieusset P G. The Navier-Stokes equations in the critical Morrey-Campanato space [J]. Rev Mat Iberoam,2007,23(3):897-930.
[18] Chen Xiaochun,Gala S. Remarks on logarithmically regularity criteria for the 3D viscous MHD equations [J]. J Korean Math Soc,2011,48(3):465-474.

# A Note on Regularity Criterion for 3D Boussinesq Equations

FANG Ping[1],WANG Xia[1*],SONG Rui-feng[2]
(1. Department of Applied Mathematics,South China Agricultural University,Guangzhou Guangdong 510642,China;
2. College of Agriculture,South China Agriculatural University,Guangzhou Guangdong 510642,China)

**Abstract:** The three-dimensional Boussinesq equations with the incompressibility condition is considered by the singular integrals theory and the generalized energy inequality. And one regularity criterion for the 3D Boussinesq equations is obtained,which extend the known results.
**Key words:** Boussinesq equations; regularity criterion; Morrey-Campanato spaces

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 253 页)

# The Growth for Solutions of a Class of Higher Order Linear Differential Equations with Meromorphic Coefficients

AI Li-juan,YI Cai-feng*
(College of Mathematics and Informatics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

**Abstract:** The growth of solutions of the differential equation $f^{(k)}+\cdots+A_0f=0(k\geqslant 2)$ is investigated by using the fundamental theory of Nevanlinna value distribution,where $A_j(0\leqslant j\leqslant k-1)$ are meromorphic functions. It is proved that every nontrivial solution $f$ of the equation is of infinite order with giving some different condition on $A_j$ $(0\leqslant j\leqslant k-1)$.
**Key words:** differential equation; meromorphic function; deficient value; infinite order

(责任编辑:王金莲)