文章编号:1000-5862(2014)03-0254-04

含凹凸非线性的 $p(x)$-Laplace 方程多正解的存在性

熊 辉,杨 光

(东莞理工学院数学教研室,广东 东莞 523808)

摘要: 利用基于临界点理论的变分方法和 Ekeland 变分原理,研究含凹凸非线性的参数型 $p(x)$-Laplace 方程的 Dirichlet 问题的正解的存在性. 在该方程中,超线性项不需要满足 Ambrosetti-Rabinowitz 条件,对于取值较小的参数,证明了所研究的问题至少有 2 个非平凡的光滑正解.

关键词: 凹凸非线性;正解存在性;山路原理;Ekeland 变分原理

中图分类号: O 175.24;O 411.3 **文献标志码:** A

0 引言

本文研究如下的非线性待定参数与各向异性的椭圆型 Dirichlet 边界问题

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u(x) = \lambda u(x)^{q(x)-1} + f(x,u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

的多个正解的存在性,其中 $\lambda > 0$ 为常数,$q \in C(\overline{\Omega})$,$\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$ 是 1 个有界区域,且边界 $\partial\Omega \subset C^2$,$x$ 为 N 维自变量;$\Delta_{p(x)}$ 为变化的 p-Laplace 算子,其定义为

$$\Delta_{p(x)} = \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p(x)-1})\nabla u, p \in C^1(\overline{\Omega}).$$

$f(x,u)$ 为 Carathéodory 函数,并设

$$p_- = \min_{x\in\Omega} p(x) > 1, p_+ = \max_{x\in\Omega} p(x);$$

$$q_- = \min_{x\in\Omega} q(x), q_+ = \max_{x\in\Omega} q(x) < p_-.$$

由于 $q_- \leqslant q_+ < p_- \leqslant p_+$,所以在方程组(1)中,$(q_+-1)$ 是次线性(凹)的,而(p_+-1) 是超线性(凸)的.

当 p,q 为常数或变动的常数时,已经有很多丰富的研究,典型的如 $p = 2$ 的情形[1-2],$p > 1$ 的情形[3],$p \geqslant 2$ 的情形[4] 等. 文献[5] 研究了 1 类含凹凸非线性项的拟线性椭圆方程,利用三临界点定理,得到了该类方程多重解的存在性.

不同于以往研究的是,本文的 p,q 是关于自变量 x 的函数,且凸项更一般,即不需要 $f(x,u)$ 满足 Ambrosetti-Rabinowitz(AR) 条件,且对于超线性项要求在无穷远处增长变慢. 本文拟采用临界点理论,应用 Ekeland 变分原理,证明存在某个 $\lambda^* > 0$,使得 $\forall \lambda \in (0,\lambda^*)$,问题(1) 至少存在 2 个非平凡的光滑正解. 对于常数型 p,q,相应的结论已经大量存在,如文献[6] 证明了正解的存在性,文献[7-11] 证明了多解的存在性,文献[12-13] 研究了含非光滑位势的 Dirichlet 问题的非平凡解. 将研究推广到变量参数是很有意义的,特别是变量型指数与非标准增长条件等问题,大量地出现于物理领域(如弹性材料的分析、流体力学、图像恢复等) 与变分领域,文献[14] 曾对这些应用做了比较详细的总结.

为了解决本文的问题,还需要引入关于变量型指数 Lebesgue 与 Sobolev 空间. 设

$$L_1^\infty(\Omega) = \{p \in L^\infty(\Omega): \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} p(x) \geqslant 1\},$$

并设 $\mathscr{L}(\Omega)$ 为所有可测函数 $u:\Omega\to\mathbf{R}$ 组成的向量空间,则对于 $p \in L_1^\infty(\Omega)$,定义变量型指数的 Lebesgue 空间为

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \in \mathscr{L}(\Omega): \int_\Omega |u|^{p(x)}\mathrm{d}x < +\infty\},$$

其范数定义为

$$\|u\|_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0: \int_\Omega \left(\frac{|u|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x \leqslant 1\right\}. \tag{2}$$

而变量型指数的 Sobolev 空间定义为

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega): |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\},$$

其范数为

$$\|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{p(x)} + |\nabla u|,$$

等价范数可写为

$$\|u\| = \inf\left\{\lambda > 0: \int_\Omega \left[\left(\frac{\|\nabla u\|}{\lambda}\right)^{p(x)} + \left(\frac{|u|}{\lambda}\right)^{p(x)}\right]\mathrm{d}x \leqslant 1\right\}. \tag{3}$$

收稿日期:2014-01-15

基金项目:国家自然科学基金(11271069) 资助项目.

作者简介:熊 辉(1978-),男,江西余江人,副教授,博士,主要从事非线性偏微分方程和数学哲学的研究.

1　相关引理

为了得到问题(1)的正解,需要对各参数做一些基本假设:

(C1) 设 $p \in L_1^{\infty}(\Omega)$, $q \in C(\overline{\Omega})$,且

$$1 < q_- \leqslant q_+ < p_- \leqslant p_+ < N;$$

(C2) 由于 $f(x,u)$ 为 Carathéodory 函数,故 $f(x,0) = 0$,且 $\forall u \geqslant 0$,都有 $f(x,u) \geqslant 0$;由于只考虑正解,所以还可以假设 $\forall u < 0$,都有 $f(x,u) = 0$. 设 $a \in L^{\infty}(\Omega)$, $c > 0$, $r \in C(\overline{\Omega})$,若几乎 $\forall x \in \Omega$ 都有 $|f(x,u)| \leqslant a(x) + c|u|^{r(x)-1}$,则

$$p_+ < r_+ = \max_{x \in \overline{\Omega}} r(x) < \tilde{p}^* = \frac{Np_-}{N - p_-};$$

(C3) 设 $F(x,u) = \int_0^u f(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi$,则对几乎所有 $x \in \Omega$,当 $|u| \to +\infty$ 时,$F(x,u)/|u|^{p_+}$ 一致收敛于 $+\infty$;当 $|u| \to 0^+$ 时,$f(x,u)/|u|^{p_+-1}$ 一致收敛于 0.

假设(C3)意味着 $F(x,\cdot)$ 在无穷远附近是 p_+ 超线性的. 在引言中曾减弱了 $f(x,u)$ 的强制性条件,即不需要其满足 Ambrosetti-Rabinowitz(AR) 条件,且对于超线性项要求在无穷远处增长变慢. 在此可举 1 例,如

$$f(x,u) = u^{p_+-1}\left(u\ln u + \frac{u}{1+u}\right), \forall u \geqslant 0.$$

这是由于 Ambrosetti-Rabinowitz 条件要求存在某个 $\alpha > p$, $K > 0$,使得

$$0 < \alpha F(x,u) \leqslant uf(x,u), \text{a. e. }, x \in \Omega, u \geqslant K,$$

这意味着

$$cu^{\alpha} \leqslant F(x,u), a. e. , x \in \Omega, u \geqslant K.$$

根据变分原理,寻求问题(1)的解等价于求泛函

$$E_\lambda(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x, u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

的临界点,其中 $E_\lambda(u): W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbf{R}$, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 为 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 的紧支集按范数(2)的闭包. 由假设(C1)知 $E_\lambda(u) \in C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega))$.

引理 1　若假设(C1) ~ (C3)成立,则存在某个 $\lambda^* > 0$, $\forall \lambda \in (0,\lambda^*)$,都存在某个 $\rho = \rho(\lambda) > 0$,使得

$$\inf\{E_\lambda(u): \|u\| = \rho\} = \eta_\lambda^+ > 0,$$

其中范数 $\|u\|$ 见等价范数(3).

证　根据已知条件,对于任意足够小的正数 $\varepsilon > 0$,都存在常数 $c(\varepsilon)$,使得

$$f(x,u) \leqslant \varepsilon u^{p_+-1} + c(\varepsilon)u^{r_+-1}, \text{a. e. }, x \in \Omega, u \in \mathbf{R}^+,$$

从而,由积分可得

$$F(x,u) \leqslant \frac{\varepsilon}{p_+}u^{p_+} + \frac{c(\varepsilon)}{r_+}u^{r_+}, \text{a. e. }, x \in \Omega, u \in \mathbf{R}^+.$$

$\forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,且 $\|u\| \leqslant 1$,可得

$$E_\lambda(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\|\nabla u\|^{p(x)}\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{1-\varepsilon c_1}{p_+}\|u\|^{p_+} - \lambda c_2\|u\|^{q_-} - c_3\|u\|^{r_+}n =$$

$$(c_4 - \lambda c_2\|u\|^{q_- - p_+} - c_3\|u\|^{r_+ - p_+})\|u\|^{p_+}, \quad (4)$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为正的常系数,以下类同. 考虑函数

$$g(\xi) = \lambda c_2\xi^{q_- - p_+} + c_3\xi^{r_+ - p_+}, \forall \xi > 0,$$

由于 $q_- < p_+ < r_+$,则不难推出

$$\lim_{\xi \to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} g(\xi) = +\infty$$

由于函数 g 在 $\xi > 0$ 时连续,则 $\exists \xi_0 > 0$,使得

$$0 < g(\xi_0) = \inf_{\xi \in \mathbf{R}^+} g(\xi).$$

令

$$g'(\xi_0) = \lambda c_2(q_- - p_+)\xi_0^{q_- - p_+ - 1} + c_3(r_+ - p_+)\xi_0^{r_+ - p_+ - 1} = 0,$$

可得

$$\xi_0 = \left[\frac{\lambda c_2(p_+ - q_-)}{c_3(r_+ - p_+)}\right]^{1/(r_+ - q_-)}.$$

考虑 $g(\xi_0)$,显然 $\exists \lambda^* > 0$,使得 $\forall \lambda \in (0,\lambda^*)$,都有 $g(\xi_0) < c_4$. 因此,由(4)式的最后 1 个等式,若 $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 且 $\|u\| = \rho(\lambda) \leqslant 1$,则可以推出

$$E_\lambda(u) \geqslant \eta_\lambda^+ > 0.$$

引理 1 得证.

引理 2　若假设(C1) ~ (C3)成立,$u > 0$ 且 $\|u\| \geqslant 1$,则 $\lim\limits_{t \to +\infty} E_\lambda(tu) = -\infty$

证　根据已知条件可知,给定 $\varepsilon > 0$,存在相关的正数 $c_\varepsilon > 0$,使得

$$F(x,u) \geqslant \frac{1}{p_+\varepsilon}(u^+)^{p_+} - c_\varepsilon, u \in \mathbf{R}; \text{a. e. }, x \in \Omega.$$

从而,对于 $t \geqslant 1$,根据文献[9]的结论,有

$$F(x,tu(x)) \geqslant \frac{|tu(x)|^{p_+}}{p_+\varepsilon} - c_\varepsilon, \text{a. e. }, x \in \Omega.$$

两边同除以 t^{p_+},并注意到 $\|u\|_{p_+} \leqslant 1$,则

$$\int_\Omega \frac{F(x,tu(x))}{t^{p_+}}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega \frac{|u|^{p_+}}{p_+\varepsilon}\,\mathrm{d}x - \frac{c_\varepsilon}{t^{p_+}}|\Omega|_N.$$

不难看出,当 $t \to +\infty$ 且 ε 接近 0^+ 时,有

$$\lim_{t \to +\infty}\int_\Omega \frac{F(x,tu(x))}{t^{p_+}}\,\mathrm{d}x = +\infty \quad (5)$$

因此,

$$E_\lambda(tu)=\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla(tu)|^{p(x)}\mathrm{d}x-$$
$$\lambda\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|tu|^{q(x)}\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,tu)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{t^{p_+}}{p_+}c_5\|u\|^{p_-}-\frac{t^{q_-}}{p_+}\lambda c_6\|u\|^{q_+}-\int_\Omega F(x,tu)\mathrm{d}x, \quad (6)$$

其中常系数 $c_5,c_6>0$. (6) 式两边同除以 t^{p_+} 并利用(5) 式,则可推出

$$\lim_{t\to+\infty}E_\lambda(tu)/t^{p_+}=-\infty$$

这意味着必然有 $\lim\limits_{t\to+\infty}E_\lambda(tu)=-\infty$ 引理 2 得证.

2 正解的存在性

定理 1 若假设(C1) ~ (C3) 成立,则存在某个 $\lambda^*>0$, $\forall\lambda\in(0,\lambda^*)$,问题(1) 都至少存在 2 个正的光滑解.

证 由引理1、引理2及山路原理可知,$\forall\lambda\in(0,\lambda^*)$,$\exists\hat{u}\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,使得 $E'_\lambda(\hat{u})=0$ 时,有

$$E_\lambda(0)=0<\eta_\lambda^+\leqslant E_\lambda(\hat{u}),E'_\lambda(\hat{u})=0. \quad (7)$$

这说明 $\hat{u}\neq 0$. 由非线性正则理论可知,$\hat{u}$ 为问题(1) 的 1 个正解.

又由引理 1 知,$\forall\lambda\in(0,\lambda^*)$,$\exists\rho=\rho(\lambda)\leqslant 1$,使得

$$\inf_{\|u\|=\rho}E_\lambda(u)>0. \quad (8)$$

为了找到问题(1) 的第 2 个正解,还需证明

$$\inf_{\|u\|\leqslant\rho}E_\lambda(u)<0. \quad (9)$$

鉴于此,令 $u\in C_+\backslash\{0\}$,且 $\|u\|\leqslant 1$,$t\in(0,1)$. 根据假设(C2)、(C3) 可知 $F\geqslant 0$,故

$$E_\lambda(tu)=\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\|\nabla(tu)\|^{p(x)}\mathrm{d}x-$$
$$\lambda\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|tu|^{q(x)}\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,tu(x))\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{t^{p_-}}{p_-}c_{13}\|u\|^{p_-}-\frac{\lambda t^{q_+}}{q_+}\int_\Omega u^{q(x)}\mathrm{d}x.$$

由于 $q_+<p_-$,故对于足够小的 $t\in(0,1)$,有

$$E_\lambda(tu)\leqslant 0,t\|u\|\leqslant\rho.$$

故(9) 式成立.

设 $B_\rho=\{u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega):\|u\|<\rho\}$,并取 $\varepsilon\in(0,\inf\limits_{\partial B_\rho}E_\lambda-\inf\limits_{\overline{B_\rho}}E_\lambda)$. 根据 Ekeland 变分原理,可知存在某个 $u_\varepsilon\in\overline{B_\rho}$,使得

$$E_\lambda(u_\varepsilon)<\inf_{\overline{B_\rho}}E_\lambda+\varepsilon, \quad (10)$$

且 $\forall v\in\overline{B_\rho}$,有

$$E_\lambda(u_\varepsilon)\leqslant E_\lambda(v)+\varepsilon\|v-u_\varepsilon\|. \quad (11)$$

由于 $\inf\limits_{\partial B_\rho}E_\lambda-\inf\limits_{\overline{B_\rho}}E_\lambda>0$,根据(10) 式可推出

$$E_\lambda(u_\varepsilon)<\inf_{\overline{B_\rho}}E_\lambda. \quad (12)$$

结合(8) 式和(12) 式,有 $u_\varepsilon\in B_\rho$. 构造 Lipschitz 函数

$$L_\lambda(u)=E_\lambda(v)+\varepsilon\|v-u_\varepsilon\|,$$

则由(11) 式可知,u_ε 是 $L_\lambda(u)$ 在 $\overline{B_\rho}$ 上的 1 个极小点. 由于 $u_\varepsilon\in B_\rho$,则 $0\in\partial L_\lambda(u)$(其中 $\partial L_\lambda(u)$ 表示 Lipschitz 函数 $L_\lambda(u)$ 在 Clarke 意义下的广义次微分[15]). 因此,$\forall h\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$,有

$$-\varepsilon\|h\|\leqslant\langle E'_\lambda(u_\varepsilon),h\rangle.$$

因此,$\|E'_\lambda(u_\varepsilon)\|=\varepsilon$. 令 $\varepsilon_n=1/n$ 且 $u_n=u_{\varepsilon_n}$,$n\geqslant 1$,则有

$$\lim_{n\to+\infty}E_\lambda(u_n)=\inf_{\overline{B_\rho}}E_\lambda,\lim_{n\to+\infty}E'_\lambda(u_n)=0, \quad (13)$$

其中 $E'_\lambda(u_n)\in W^{-1,p'(x)}(\Omega)$. 因此,可以推出

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\tilde{u}\in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$
$$\lim_{n\to+\infty}E_\lambda(u_n)=E_\lambda(\tilde{u})=\inf_{\overline{B_\rho}}E_\lambda<0.$$

不难看出,$\tilde{u}\neq 0$.

此外,由(7) 式和(13) 式可知 $E_\lambda(\tilde{u})<0<\eta_\lambda^+\leqslant E_\lambda(\hat{u})$,因此,$\tilde{u}\neq\hat{u}$.

综上所述,找到了问题(1) 的第 2 个正解.

3 参考文献

[1] Ambrosetti A,Brézis H,Cerami G. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems [J]. J Funct Anal,1994,122(2):519-543.

[2] 张申贵. 局部超线性常微分 p-Laplacian 系统的多重周期解 [J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2013,37(3):240-243.

[3] García Azorero J,Manfredi J,Peral Alonso I. Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations [J]. Commun Contemp Math,2000,2(3):385-404.

[4] Guo Zongming,Zhang Zhitao. $W^{1,p}$ versus C^1 local minimizers and multiplicity results for quasilinear elliptic equations [J]. J Math Anal Appl,2003,286(1):32-50.

[5] Lü Dengfeng,Xiao Jianhai,Xu Guojin. Multiple solutions for a class of quasilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities [J]. Journal of Mathematics,2013,13(1):6-14.

[6] Filippakis M,Gasínski L,Papageorgiou,N S. On the existence of positive solutions for hemivariational inequalities driven by the p-Laplacian [J]. J Glob Optim,2005,31(1):173-189.

[7] Gasínski L. Multiplicity theorems for scalar periodic problems at resonance with p-Laplacian-like operator [J]. J

Glob Optim,2007,38(3):459-478.

[8] Kristaly A,Marzantowicz W,Varga C. A non-smooth three critical points theorem with applications in differential inclusions [J]. J Glob Optim,2010,46(1):49-62.

[9] Teng Kaimin. Multiple solutions for semilinear resonant elliptic problems with discontinuous nonlinearities via nonsmooth double linking theorem [J]. J Glob Optim,2010,46(1):89-110.

[10] Amrouss A R El,Kissi F. Multiplicity of solutions for a general $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem [J]. Arb Journal of Mathematical Sciences,2013,19(2):205-216.

[11] Shi Xiayang,Ding Xuanhao. Existence and multiplicity of solutions for a general $p(x)$ -Laplacian Neumann problem [J]. Nonlinear Analysis,2009,70(10):3715-3720.

[12] Gasinski L,Papageorgiou N S. Multiple solutions for semilinear hemivariational inequalities at resonance [J]. Publ Math Debrecen,2001,59(1/2):121-146.

[13] Gasinski L,Papageorgiou N S. A multiplicity result for nonlinear second order periodic equations with nonsmooth potential [J]. Bull Belge Math Soc ,2002,9(2):245-258.

[14] Harjulehto P,Hästö P,Lê U V,et al. Overview of differential equations with non-standard growth [J]. Nonlinear Analysis,2010,72(12):4551-4574.

[15] Clarke F H. Optimization andnonsmooth analysis [M]. New York: Wiley,1983.

The Existence of Multiple Positive Solutions for the $p(x)$ -Laplacian Equation with Concave and Convex Nonlinearities

XIONG Hui,YANG Guang

(Department of Mathematics,Dongguan University of Technology,Donguan Guangdong 523808,China)

Abstract: Using variational methods based on the critical point theory and the Ekeland variational principle,a nonlinear parametric Dirichlet problem,driven by the anisotropic $p(x)$ -Laplacian with the combined effects of concave and convex terms,is studied. In this problem,the superlinear nonlinearity does not need to satisfy the Ambrosetti-Rabinowitz condition. It is shown that for small values of the parameter,the problem has at least two nontrivial smooth positive solutions.

Key words: concave and convex nonlinearity; existence of positive solutions; mountain pass theorem; Ekeland variational principle

(责任编辑: 曾剑锋)