

文章编号: 1000-5862(2014)03-0261-04

求解对流扩散方程的 Pade'逼近格式

开依沙尔·热合曼, 努尔买买提·黑力力*

(新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 对空间变量应用中心差分格式离散, 时间变量采用指数函数的 Pade' [2/1] 逼近, 构造了对流扩散方程的精度为 $O(\tau^3 + h^2)$ 的绝对稳定的隐式差分格式, 并对其稳定性进行了讨论, 将数值实验结果与 Crank-Nicholson 格式进行比较, 验证了文中方法的有效性.

关键词: 对流扩散方程; Pade'逼近; 2层隐格式; Crank-Nicolson 格式

中图分类号: O 241.82

文献标志码: A

0 引言

对流扩散方程是 1 类在物理上有着重要意义的抛物型方程, 通常将对流方程和扩散方程的差分方法结合起来就可以得到对流扩散方程的差分方法, 当扩散系数极小时, 方程反映对流方程的特征; 当对流系数极小时, 方程反映扩散方程的特征. 另一方面, 对流扩散方程也有其独特的特点, 在自然科学中很多现象是用对流扩散方程或方程组描述的, 由于物理问题本身的复杂性, 其精确解往往不容易求得, 因此研究其数值求解方法无疑具有非常重要的理论意义和工程应用价值. 由于差分方法理论上较成熟, 使用起来简便、灵活, 有高度的操作性和通用性, 差分方法广泛应用于热传导方程^[1]、Schrödinger 方程^[2]、泊松方程^[3]、对流扩散方程等各类偏微分方程的数值计算^[4-10].

本文采用差分格式对对流扩散问题进行求解, 目前主要差分格式有中心显式格式、Dufort-Frankel 差分格式、指数型差分格式、Samarski 差分格式、Crank-Nicholson 差分格式等^[4-8]. 文献[6] 对对流扩散方程 4 种常用差分格式进行了比较, 并对各种差分格式的适用范围进行了详细讨论; 文献[7] 利用直线方法对对流扩散方程得到了时间 2 阶、空间 7 阶精度的差分格式; 文献[8] 利用修正局部 Crank-Nicholson 方法对问题进行求解得到了对流

扩散方程的绝对稳定的显式差分格式并对稳定性进行详细讨论; 文献[9-10] 对空间变量中心差分格式离散、时间变量分别应用 Gear 公式和指数函数的 Pade' 逼近公式构造了避免数值震荡的 L 稳定差分格式.

本文对对流扩散方程中的空间导数项用 2 阶中心差分离散, 时间利用指数函数的 Pade' [2/1] 逼近方法^[11] 得到精度为 $O(\tau^3 + h^2)$ 的 2 层绝对稳定的隐式差分格式, 并证明了稳定性, 通过数值算例验证了本文格式的有效性.

1 格式的构造

考虑如下对流扩散方程初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \Omega = [a, b] \times [0, T], \\ u(x, 0) = f(x), & a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1)$$

将区间 $[a, b]$ 作 M 等分, 将区间 $[0, T]$ 作 N 等分, 且记 $h = (b - a) / M$, $\tau = T / N$, $x_i = ih$ ($0 \leq i \leq M$), $t_n = n\tau$ ($0 \leq n \leq N$). 分别称 h 和 τ 为空间步长和时间步长, 称 (x_i, t_n) 为网格结点, 网格函数 $u(x_i, t_n)$ 记作 u_i^n .

对方程 (1) 的对流项和扩散项分别应用 2 阶中心差分格式离散:

收稿日期: 2013-11-25

基金项目: 国家自然科学基金(11261057), 新疆维吾尔自治区教育厅高校科研计划(XJEDU2012101) 和新疆大学创新课题(XJU-SRT-13017) 资助项目.

通信作者: 努尔买买提·黑力力(1976-), 男, 维吾尔族, 新疆库车人, 副教授, 博士, 主要从事信息安全与数值计算的研究.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_{i+1}, t) - u(x_{i-1}, t)}{2h},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2}. \quad (2)$$

将(2)式代入方程(1)得到常微分方程组

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU(t), \quad (3)$$

其中 $U(t) = (u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_{n-2}(t) \ u_{n-1}(t))^T$,

$$A = \begin{pmatrix} \eta & \mu_2 & & & \\ \mu_1 & \eta & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_1 & \eta & \mu_2 \\ & & & \mu_1 & \eta \end{pmatrix},$$

这里 $\eta = -2\alpha/h^2$, $\mu_1 = \alpha/h^2 + \beta/(2h)$, $\mu_2 = \alpha/h^2 - \beta/(2h)$.

用常数变易法解(3)得到

$$U_{n+1} = e^{A\tau} U_n. \quad (4)$$

由 $e^{A\tau}$ 的 Padé [2/1] [11] 逼近

$$e^{A\tau} \approx \frac{I + \frac{\tau}{3}A}{I - \frac{2}{3}\tau A + \frac{1}{6}\tau^2 A^2}. \quad (5)$$

把(5)式代入(4)式得到

$$u_{n+1} = (I - \frac{2}{3}\tau A + \frac{1}{6}\tau^2 A^2)^{-1} (I + \frac{\tau}{3}A) u_n. \quad (6)$$

定理1 差分格式(6)的精度为 $O(\tau^3 + h^2)$.

证 因为 Padé [2/1] 逼近对时间变量是3阶的. 又因为(2)式对空间变量是2阶的, 因此, 格式(6)是对时间变量是3阶, 对空间变量是2阶的, 即 $O(\tau^3 + h^2)$.

2 稳定性分析

引理1 若 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, N-1)$ 为矩阵 A 的特征值, x 为其相应的特征值向量, 则特征值 $\lambda_i \leq 0$.

证 下面先分析 A 的特征值, 假设 $x = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{N-2} \ x_{N-1})^T$, 由于 λ_i 为 A 的特征值, 则 $Ax = \lambda_i x$, 两边乘 x^T 得 $x^T Ax = x^T \lambda_i x$, 从而

$$x^T Ax = -\frac{2\alpha}{h^2} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{N-1}^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \cdots - x_{N-1} x_{N-2}) = -\frac{\alpha}{h^2} (x_1^2 + x_{N-1}^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{N-2} - x_{N-1})^2). \quad (7)$$

因为 $\alpha \geq 0$, 由此推出 $\lambda_i \leq 0$.

定理2 差分格式(6)是绝对稳定的.

证 λ_i 为 A 的特征值, 记格式(6)的特征值为 $\lambda_{(6)}$, 则格式(6)的特征值为

$$\lambda_{(6)} = \frac{1 + \frac{\tau}{3}\lambda_i}{1 - \frac{2}{3}\tau\lambda_i + \frac{1}{6}\tau^2\lambda_i^2}. \quad (8)$$

由引理1有 $\lambda_i \leq 0$, (8)式的特征值 $\lambda_{(6)}$ 按模不大于1, 因此迭代格式(6)的谱半径不大于1, 即迭代格式(6)绝对稳定的.

3 数值实验与结果分析

下面给出2个数值例子来说明格式(6)的有效性.

$$\text{例1} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 0.10 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.01 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = e^{0.25x} \sin \pi x, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = 0, \mu(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

该方程的准确解为 $u(x, t) = e^{0.25x - (0.125 + 0.2\pi^2)t} \sin \pi x$, 其中最大误差为 $L_\infty = \|U - U_{exact}\| = \max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq T} |U_i^n - U_{i, exact}^n|$, 对 h 收敛阶为 $\log(E(h, \pi)/E(h/2, \pi))/\log 2$, 对 τ 收敛阶为 $\log(E(h, \pi)/E(h, \tau/2))/\log 2$, E 可以为最大误差或其它误差. 本文中 E 取为最大误差.

表1给出了当 $h = 0.1$, $\pi = 0.1$, $T = 20$ 时的 Crank-Nicolson 格式和格式(6)的各个节点上的绝对误差比较, 最后1行给出了最大误差, 从表1可以看出格式(6)误差比 Crank-Nicolson 格式小.

表2给出了当 $\tau = 0.05$, $T = 20$ 时 Crank-Nicolson 格式和格式(6)对空间变量 h 的收敛阶和最大误差比较, 从表2可以看出 Crank-Nicolson 格式和格式(6)同样对空间变量2阶.

表3给出了当 $h = 0.01$, $T = 20$ 时对时间变量的收敛阶和最大误差比较, 由表3可以看出 Crank-Nicolson 格式和对时间变量2阶, 而格式(6)对时间变量具有3阶精度. 从表2和表3可看出格式(6)对时间变量3阶, 对空间变量具有2阶精度, 这个理论和计算相符合. 图1给出了 $h = 0.1$, $\pi = 0.1$, $T = 20$ 时的 Crank-Nicolson 格式, 格式(6)和准确解比较图, 从图1中可以看出格式(6)比 Crank-Nicolson 格式更接近于准确解.

表 1 当 $h = 0.1$ $\tau = 0.1$ $T = 20$ 时各个节点上的误差和准确解的比较

x	C-N 格式	C-N 格式的误差	格式 (6)	格式 (6) 的误差	准确解
0.1	3.628 4e - 04	1.140 3e - 04	3.631 0e - 04	1.137 6e - 04	4.768 6e - 04
0.3	2.848 4e - 03	5.452 1e - 04	2.850 5e - 03	5.431 0e - 04	3.393 6e - 03
0.5	1.055 5e - 02	8.480 0e - 04	1.056 2e - 02	8.412 1e - 04	1.140 3e - 02
0.7	2.559 7e - 02	5.212 2e - 04	2.561 5e - 02	5.390 0e - 04	2.507 6e - 02
0.9	2.931 8e - 02	3.281 8e - 03	2.933 9e - 02	3.303 0e - 03	2.603 6e - 02
最大误差		3.2818e - 003		3.3030e - 03	

表 2 当 $\tau = 0.05$ $T = 20$ 时对空间变量 h 的收敛阶和最大误差比较

h	C-N 格式		格式 (6)	
	最大误差	收敛阶	最大误差	收敛阶
0.04	4.864 8e - 004		4.915 2e - 004	
0.02	1.173 3e - 004	2.05	1.220 0e - 004	2.01
0.01	2.581 6e - 005	2.18	3.057 4e - 005	2.00
0.005	3.602 4e - 006	2.84	7.629 3e - 006	2.00

表 3 当 $h = 0.01$ $T = 20$ 时对时间变量 τ 的收敛阶和最大误差比较

τ	C-N 格式		格式 (6)	
	最大误差	收敛阶	最大误差	收敛阶
4	2.445 8e - 002		5.888 4e - 003	
2	7.954 9e - 003	1.62	8.414 4e - 004	2.81
1	2.095 9e - 003	1.92	1.079 3e - 004	2.96
0.5	5.261 3e - 004	1.99	1.021 8e - 005	3.08

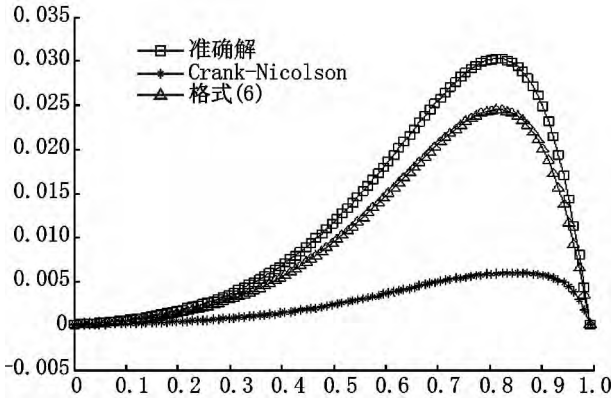


图 1 当 $h = 0.1$ $\tau = 0.1$ $T = 20$ 时
C-N 格式、格式 (6) 和准确解比较

例 2 给出下面的对流扩散方程初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \\ (x, t) \in [0, L] \times [0, T], \\ \varphi(x) = 3 \sin(4\pi x), \\ g(t) = 0, g_1(t) = 0. \end{cases}$$

该方程的准确解

$$u(x, t) = \exp\left(\frac{\beta}{2\alpha}\left(x - \frac{\beta}{2}t\right)\right) \cdot$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\alpha n^2 \pi^2 t) \sin(n\pi x),$$

其中

$$B_n = \frac{3\beta}{2\alpha} \left[1 + (-1)^{n+1} \exp\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) \right] \cdot$$

$$\left[\frac{1}{(\beta/2\alpha)^2 + (n-4)^2 \pi^2} - \frac{1}{(\beta/2\alpha)^2 + (n+4)^2 \pi^2} \right],$$

取 $\alpha = 1$ $\beta = 0.1$.

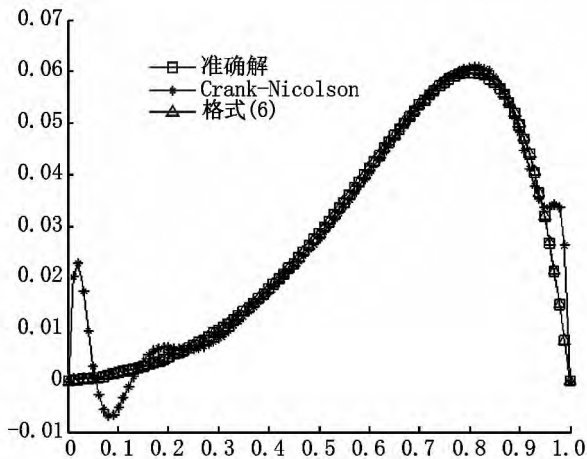
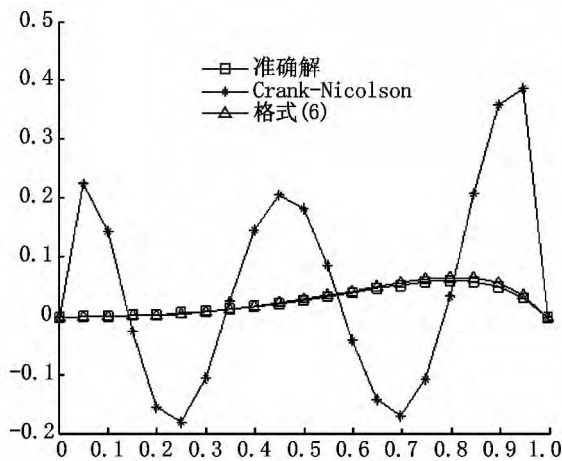
图 2 分别给出了当 $T = 1$ 时 $h = 0.01$ $\tau = 0.10$ 和 $h = 0.05$ $\tau = 0.25$ 的 Crank-Nicolson 格式、格式 (6) 和准确解比较图,从图 2 可以看出边界上 Crank-Nicolson 偏离准确解,而格式 (6) 更接近于准确解.

4 结论

1) 由表 2、表 3 可看出格式 (6) 空间方向具有 2 阶,时间方向具有 3 阶精度,即 $O(h^2 + \tau^3)$,而 Crank-Nicolson 只有 $O(h^2 + \tau^2)$ 这个理论和数值试验相符合.

2) 从图 1 和图 2 可看出,格式 (6) 边界上无出现数值振荡,而 Crank-Nicolson 方法边界上出现数值振荡,格式 (6) 特别适用于初始边界条件间断问题和长时间步长问题.

3) 格式 (6) 利用局部 1 维方法可以推广到 2 维和 3 维对流扩散方程的初边值问题的数值计算.

(a) $h=0.01$ $\sigma=0.10$ (b) $h=0.05$ $\sigma=0.25$ 图2 当 $T=1$ 时 不同的空间和时间步长
下 C-N 格式、格式(6) 和准确解比较

5 参考文献

- [1] 田巧娴, 杨国锋, 葛永斌. 3 维热传导方程恒稳定的高精度半显式差分方法 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2009, 33(1): 56-60.
- [2] 符芳芳, 孔令华, 王兰, 等. 一类新的含双幂非线性项的 Schrodinger 方程的差分格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(1): 22-26.
- [3] 陈建华, 赵飞, 葛永斌. 求解 3 维泊松方程的一种新方法 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37(4): 411-415.
- [4] 陆金甫, 关治. 偏微分方程数值解法 [M]. 2 版, 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [5] Smith G D. Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods [M]. Oxford: Oxford University Press, 1985.
- [6] 何文平, 封国林, 董文杰, 等. 求解对流扩散方程的四种差分格式的比较 [J]. 物理学报, 2004, 53(10): 3258-3264.
- [7] 吴雄华, 谭志海. 对流占优扩散问题的高精度直线法 [J]. 计算物理, 1999, 16(2): 211-216.
- [8] 开依沙尔·热合曼, 阿不都热西提·阿不都外力. 对流扩散方程新的数值解法及其应用 [J]. 新疆师范大学学报: 自然科学版, 2005, 24(3): 47-50.
- [9] 开依沙尔·热合曼. 求解一维热传导方程的一种半离散差分格式 [J]. 新疆师范大学学报: 自然科学版, 2007, 26(3): 142-46.
- [10] 祖丽胡玛尔·卡迪尔, 艾合麦提尼亚孜·艾合麦提江, 开依沙尔·热合曼. 求解扩散方程的 Pade'逼近方法 [J]. 河南科学, 2012, 30(5): 534-539.
- [11] 马振华. 现代应用数学手册: 计算与数值分析卷 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

The Pade' Approximation Scheme for Solving Convection-Diffusion Equation

KAYSAR Rahman, NURMAMAT Helil*

(College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

Abstract: By a central finite difference approximation of second-order for discretizing spatial derivatives and a Pade' [2/1] approximation method of third-order for the time integration are proposed second-order accuracy in space and third-order accuracy in time for solving convection-diffusion equation. The stability is discussed. Numerical experiments are compared with Crank-Nicolson scheme to confirm the validity of the proposed method.

Key words: convection-diffusion equation; Pade' approximation; two level implicit scheme; Crank-Nicolson method

(责任编辑: 曾剑锋)