第 38 卷 第 4 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 4
2014 年 7 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2014

文章编号:1000-5862(2014)04-0395-04

涉及重整化变换的有理函数族的 Fatou 集

高军杨,马庆文

(中国矿业大学(北京)理学院,北京 100083)

摘要: 主要研究了涉及重整化变换的一族有理函数 $T_{n\lambda}$ Fatou 分支的拓扑性质. 事实上,若 D 是有理函数 $T_{n\lambda}$ 的任意 1 个 Fatou 分支,对任意的参数 $\lambda \in \mathbf{R}$ 与 $n > 1$,探讨了 D 与 John 区域的联系. 所得结果给出了重整化变换的 Julia 集 $J(T_{n\lambda})$ 拓扑复杂性的一个详细刻画.

关键词: John 区域; Fatou 分支; Julia 集; 尖点; 重整化变换

中图分类号: O 174.5 **文献标志码:** A

0 引言与主要结论

平衡统计力学的主要任务是解释相与相变的本质[1]. 统计力学中的 Yang-Lee 理论[2-3] 把自由能量拓广为复温度的函数,继而把物理相位的概念描述为它的解析区域. 这些区域的边界是自由能量的奇点. 因此,研究自由能量的奇点在复平面上的分布以及整体结构就成为一个重要的问题. 然而,自 Yang-Lee 理论提出以来,这些区域的拓扑结构很少为人们所了解. 考虑类金刚石型等级晶格上 λ-态 Potts 模型,文献 [4-5] 证明了其配分函数零点的极限集合就是经过重整化变换后的有理映照族 $T_{n\lambda}$ 的 Julia 集 $J(T_{n\lambda})$. 这里

$$T_{n\lambda}(z) = \left(\frac{z^2 + \lambda - 1}{2z + \lambda - 2}\right)^2, \lambda \in \mathbf{R}, \qquad (1)$$

其中 $n > 1$ 是同所考虑的类金刚石型等级晶格的分叉度相关联的自然数,$J(T_{n\lambda})$ 是 $T_{n\lambda}$ 的斥性周期点集的闭包,Fatou 集 $F(T_{n\lambda})$ 即为复球面 $\overline{\mathbf{C}}$ 上 $J(T_{n\lambda})$ 的余集. 因此,对重整化变换 $J(T_{n\lambda})$ 的 Fatou 集和 Julia 集的拓扑性质进行研究,不仅在复动力系统中有重要的理论意义,而且对统计力学也有重要的应用价值. 首先,称单连通区域 G 是 John 区域是指: 存在常数 $M_1 > 0$,使得 $\forall a, b \in \partial G$ 且直线段 $[a, b] \subseteq G$,满足

$$d_{iam} H \leqslant M_1 |a - b|,$$

其中,H 是 $\partial G \backslash \{a, b\}$ 的 2 个分支中较小的分支. 若 $\infty \in \partial G$ 或者 $\infty \in G$,用球面距离代替欧氏距离[6].

本文将详细刻画 $T_{n\lambda}$ 的 Fatou 分支与 John 区域的联系. 为导出本文的主要结论,对任意的自然数 $n > 1$,定义 2 个常数:

$$\alpha_n = 2 + \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} \frac{t^{2n} - 2t^{n+1} + 1}{t - 1},$$

$$\beta_n = 2 + \min_{-2 \leqslant t \leqslant 0} \frac{t^{2n} - 2t^{n+1} + 1}{t - 1}.$$

定理 1 $T_{n\lambda}(z)$ 如(1)式定义,则有如下结论:

(i) 若 $\lambda \in \mathbf{R} \backslash \{\alpha_n, \beta_n\}$,则 $T_{n\lambda}$ 的每个 Fatou 分支都是 John 区域;

(ii) 若 $\lambda = \alpha_n$,则 $T_{n\lambda}$ 存在抛物不变域 $L_{\alpha_n}(q)$,其任意的逆象分支 $L_{\alpha_n}^{-k}(q)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 都是 John 区域,但 $T_{n\alpha_n}$ 其它的 Fatou 分支都不是 John 区域;

(iii) 若 $\lambda = \beta_n$,则当 n 为偶数时,$T_{n\beta_n}$ 的每个 Fatou 分支都是 John 区域; 当 n 为奇数时,除了超吸性不变域 $A_{\beta_n}(\infty)$ 及其任意的逆象分支 $A_{\beta_n}^{-k}(\infty)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 不是 John 区域外,$T_{n\beta_n}$ 的其它 Fatou 分支都是 John 区域.

1 预备知识

定义 1 有理映照 $f: \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ $(\deg f \geqslant 2)$ 称为双曲的,如果 f 的每个临界点的正向轨道收敛于某个吸性或超吸性周期轨道; f 称为次双曲的,是指每个属于 $J(f)$ 的临界轨道是最终周期的且每个属于 $F(f)$ 的临界轨道收敛于吸性或超吸性周期轨道; f 称为临界非回归的,如果对每个临界点 $c \in J(f)$,$c \notin w(c)$,这里,$w(c)$ 是 c 的临界轨道的极限点集;

收稿日期: 2014-03-17

基金项目: 国家自然科学基金(11371363,11261002)和中央高校基本科研业务费专项基金(2009QS15)资助项目.

作者简介: 高军杨(1975-),男,湖北嘉鱼人,副教授,博士,主要从事复动力系统的研究.

f 称为半双曲的,是指 f 没有抛物周期点且 Julia 集上的临界点都是非回归的.

对于涉及上述定义的经典复动力学结论,可参见文献[7-9].

定义 2[5] 若 $\alpha \in J(f)$,如果 $\exists p(<\infty)$ 对互不相同的光滑弧 $\gamma_j(t)$,$\gamma_j^*(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 它们仅在 $\alpha = \gamma_j, \gamma(0) = \gamma_j^*(0)(j = 1,2,\cdots,p)$ 处相交,γ_j 与 γ_j^* 在 α 点相切,而当 $i \neq j$ 时,γ_j 与 γ_j^* 在 α 点不相切. 当 $\delta > 0$ 充分小时,把 $\Delta_\delta(\alpha) \backslash (\gamma_j \cup \gamma_j^*)$ 较小的那个分支记为 $L_j(\delta)$,称之为 γ_j 和 γ_j^* 的尖角域. 如果 δ 充分小,

$$J(f) \cap (\Delta_\delta(\alpha) \backslash \{\alpha\}) \subset \bigcup_{j=1}^{p} L_j(\delta),$$
$$L_j(\delta) \cap J(f) \neq \varnothing, j = 1,2,\cdots,p,$$

则称 α 为具有 p 个花瓣的花核点,仅有 1 个花瓣的花核点就是 Julia 集 $J(f)$ 的 1 个尖点. 这里,$\Delta_\delta(\alpha) = \{z: |z-\alpha| < \delta\}$.

记 $\Lambda(f) = \{\alpha \in J(f) \mid \alpha$ 是 1 个花核点$\}$,再记 $\Lambda_0(f) = \{z_0 \in J(f) \mid$ 对某个 $n \in \mathbf{N}, f^n(z_0)$ 为 f 的有理中性周期点$\}$.

引理 1 若 f 是临界非回归的有理函数,则 $\Lambda(f) \neq \Lambda_0(f)$ 当且仅当 $J(f)$ 为圆周、圆弧或者有限条互不交解析弧上的 Cantor 集.

引理 2[10] 若 f 是半双曲的有理映照,则 f 的每个 Fatou 分支都是 John 区域.

2 定理的证明

为证明定理 1,先证明下面的 2 个引理.

引理 3 若 $\lambda = \alpha_n$,则 $T_{n\alpha_n}$ 存在抛物不变域 $L_{\alpha_n}(q)$,其任意的逆象分支 $L_{\alpha_n}^{-k}(q)(k = 1,2,\cdots)$ 都是 John 区域,但 $T_{n\alpha_n}$ 的其它 Fatou 分支都不是 John 区域.

证 (i) 注意到 $\alpha_2 = 0$ 且 $T_{20}(z) = (z+1)^2/4$, $T'_{20}(z) = (z+1)/2$, T_{20} 仅有 1 个有限的临界点 $z = -1$. 显然,$z = 1$ 是 T_{20} 的抛物不动点,且当 $x \in [-1,1)$ 时,$0 \leqslant T_{20}(x) < T_{20}(1) = 1$. 另一方面,$\forall x \in [0,1)$ 有 $T_{20}(x) > x$,并且当 $k \to +\infty$ 时,$T_{20}^k(x) \to 1$. 因此,$[-1,1) \subset F(T_{20})$. 记抛物不动点 $z = 1$ 的直接抛物域为 $L_0(1)$. 因为 $T_{20}{}^{-1}(0) = \{-1\} \subseteq L_0(1)$. 所以 $L_0(1)$ 是 $F(T_{20})$ 的完全不变域. 易见 $F(T_{20})$ 由 2 个完全不变域 $L_0(1)$ 和 $A_0(\infty)$ 组成. 因此,抛物不动点 1 处仅有 1 个抛物吸性花瓣. 由 Leau-Fatou 花瓣定理知,抛物完全不变域 $L_0(1)$ 在抛物不动点 1 处与实轴 $\mathbf{R}$ 的夹角是 2π. 即 $z = 1$ 是抛物完全不变域 $L_0(1)$ 的内部尖点,从而 $L_0(1)$ 是 John 区域. 因此 $z = 1$ 是 $\partial A_0(\infty)$ 的外部尖点,故 $A_0(\infty)$ 不是 John 区域. 显然,引理 3 的结论成立.

(ii) 当 $n(>2)$ 为偶数时,由文献[5]中的命题 6.2 知,$T_{n\alpha_n}$ 仅有 3 个实不动点 $q_1, 1, q_2(0 < q_1 < 1 < q_2)$. 由文献[5]中定理 6.16 的证明知,$A_{\alpha_n}(\infty)$ 是单连通完全不变域,故 $T_{n\alpha_n}$ 的每个 Fatou 分支都是单连通区域. 易见 $[1-\lambda/2, +\infty) \subset A_{\alpha_n}(\infty)$,并且当 $k \to \infty$ 时,$T_{n\alpha_n}^k(\mp\sqrt{1-\lambda}) \to q_1$,因此 q_1 是吸性或抛物不动点. 易证 $T_{n\alpha_n}$ 在 $(q_1, 1)$ 上是严格单调递增的且 $T_{n\alpha_n}(x) > x$,注意到 $z = 1$ 是吸性不动点,从而 $(q_1, 1] \subset A_\lambda(1)$. 这说明 q_1 是抛物不动点并且在 q_1 处仅有 1 个抛物吸性花瓣. 由于 $A_{\alpha_n}(\infty)$ 包含 3 个临界点 $1-\lambda/2, 1-\lambda, \infty$,临界点 $\mp\sqrt{1-\lambda}$ 收敛于抛物不动点 $q_1, 1 \in A_\lambda(1)$,故 $F(T_{n\alpha_n})$ 仅有 3 个周期域 $A_{\alpha_n}(1)$,$A_{\alpha_n}(\infty)$ 和 $L_{\alpha_n}(q_1)$.

由定义 2 可知,抛物不动点 q_1 是 Julia 集 $J(T_{n\alpha_n})$ 上的尖点. 再由 Leau-Fatou 花瓣定理知,抛物不变域 $L_\lambda(q_1)$ 在 q_1 处与实轴 $\mathbf{R}$ 的夹角是 2π. 因此,q_1 是抛物不变域 $L_{\alpha_n}(q_1)$ 的内部尖点. 由引理 1 知,q_1 的所有逆象点 $T_{n\alpha_n}^{-k}(q_1)(k = 1,2,\cdots)$ 也是 $J(T_{n\alpha_n})$ 上的尖点. 易见 $T_{n\beta_n}$ 的临界点都在 Fatou 集 $F(T_{n\alpha_n})$ 中. 既然 $T_{n\alpha_n}$ 在 q_1 的每 1 个逆象点 $T_{n\alpha_n}^{-k}(q_1)$ 的充分小的邻域内是共形的,所以 $T_{n\alpha_n}^{-k}(q_1)$ 都是内部尖点. 因此,$L_{\alpha_n}(q_1)$ 是 John 区域. 由 Riemann-Hurwitz 公式

$$T_{n\alpha_n}: L_{\alpha_n}^{-k}(q_1) \to L_{\alpha_n}^{-k+1}(q_1)(k = 1,2,\cdots) \quad (2)$$

都是共形映射. 既然 John 区域是共形不变的,所以 $L_{\alpha_n}^{-k}(q_1)(k = 1,2,\cdots)$ 都是 John 区域. 由于 $q_1 \in J(T_{n\alpha_n}) = \partial A_\lambda(\infty)$,$q_1 \in \partial A_\lambda(1)$. 所以,$q_1$ 是 $A_\lambda(1)$ 和 $A_\lambda(\infty)$ 的外部尖点. 由于 John 区域不存在外部尖点. 因此,$A_\lambda(1)$ 和 $A_\lambda(\infty)$ 都不是 John 区域. 由于 $A_{\alpha_n}(1)$ 与它的任意逆象分支共形,故 $A_{\alpha_n}(1)$ 的所有逆象分支 $A_{\alpha_n}^{-k}(q_1)(k = 1,2,\cdots)$ 都不是 John 区域.

(iii) 当 $n(>2)$ 为奇数时,完全类似于 n 为偶数的情况,可证 $F(T_{n\alpha_n})$ 仅有 3 个周期域 $A_{\alpha_n}(1)$,$A_{\alpha_n}(\infty)$ 和 $L_{\alpha_n}(q_2)$,其中抛物不变域 $L_{\alpha_n}(q_2)$ 及其逆象分支都是 John 区域,但 $A_{\alpha_n}(1)$ 和 $A_{\alpha_n}(\infty)$ 及它们的逆象分支都不是 John 区域. 引理 3 得证.

引理 4 若 $\lambda = \beta_n$,则

(i) 当 n 为偶数时,$T_{n\beta_n}$ 的每个 Fatou 分支都是 John 区域;

(ii) 当 n 为奇数时,$T_{n\beta_n}$ 的每个 Fatou 分支都是

John 区域，除了超吸性不变域 $A_{\beta_n}(\infty)$ 及其任意的逆象分支 $A_{\beta_n}^{-k}(\infty)(k=1,2,\cdots)$ 都不是 John 区域.

证　(i) 当 n 为偶数时，由文献[5]中定理 6.16 的证明知，$T_{n\beta_n}$ 仅有 3 个实不动点 $q_1, 1, q_2(0<q_1<1<q_2)$，且 q_1 是抛物不动点与抛物不变域 $L_{\beta_n}(q_1)$ 单连通完全不变域. 注意到 $1-\lambda, \mp\sqrt{1-\lambda}\,\mathrm{i} \in L_{\alpha_n}(q_1)$，则 $F(T_{n\beta_n})$ 仅有 3 个周期域 $A_{\beta_n}(1)$，$A_{\beta_n}(\infty)$ 和 $L_{\beta_n}(q_1)$. 易见 $(q_2^{*1}, q_2) \subset A_{\beta_n}(1)$，这里，$q_2^{*1}$ 是斥性不动点 q_2 在区间 $(1-\lambda/2, 1)$ 的 1 个逆像，并且，$(-\infty, q_2^{*2}) \cup (q_2, +\infty) \subset A_{\beta_n}(\infty)$，这里，$q_2^{*2}$ 是斥性不动点 q_2 在区间 $(-\infty, 1-\lambda)$ 的 1 个逆像. 由文献[5]中的定理 8.22 的结论(也可以见文献[11])，易见 $A_{\beta_n}(1)$，$A_{\beta_n}(\infty)$ 都是 Jordan 区域并且它们都关于实轴 $\mathbf{R}$ 对称. 所以 $\partial A_{\beta_n}(1) \cap \overline{\mathbf{R}} = \{q_2^{*1}, q_2\}$，$\partial A_{\beta_n}(\infty) \cap \overline{\mathbf{R}} = \{q_2^{*2}, q_2\}$，这里，$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. 所以，$q_1$ 和它的任意逆象点 $T_{n\beta_n}^{-k}(q_1)(k=1,2,\cdots)$ 都不在 $\partial A_{\beta_n}(1)$ 和 $\partial A_{\beta_n}(\infty)$ 上.

显然，$T_{n\beta_n}$ 是临界非回归的有理函数，并且 $J(T_{n\beta_n}) = \partial L_{\beta_n}(q_1)$. 易证在抛物不动点 q_1 处仅有 1 个抛物吸性花瓣. 由引理 1 知，抛物不动点 q_1 和它的逆象点都是 Julia 集 $J(T_{n\beta_n})$ 上的尖点，考虑到 $F(T_{n\beta_n})$ 仅有 3 个周期域 $A_{\beta_n}(1)$，$A_{\beta_n}(\infty)$ 和 $L_{\beta_n}(q_1)$，从而除了抛物不动点 q_1 和它的所有逆象点之外，$J(T_{n\beta_n})$ 上不再存在其它的尖点. 再由 Leau-Fatou 花瓣定理知，抛物完全不变域 $L_{\beta_n}(q_1)$ 在 q_1 处与实轴 $\mathbf{R}$ 的夹角是 2π. 因此，q_1 是抛物完全不变域 $L_{\beta_n}(q_1)$ 的内部尖点. 完全类似于引理 3 的讨论，能够得到 q_1 的所有逆象点 $T_{n\beta_n}^{-k}(q_1)(k=1,2,\cdots)$ 也是 $J(T_{n\beta_n})$ 上的内部尖点. 因此，$L_{\beta_n}(q_1)$ 是 John 区域. 由于 q_1 和它的所有逆象点都不在 $\partial A_{\beta_n}(1)$ 和 $\partial A_{\beta_n}(\infty)$ 上，所以 $A_{\beta_n}(1)$ 和 $A_{\beta_n}(\infty)$ 都是 John 区域. 显然 q_1 和它的所有逆象点都不在 $A_{\beta_n}(1)$ 和 $A_{\beta_n}(\infty)$ 的逆象分支 $A_{\beta_n}^{-k}(1)(k=1,2,\cdots)$ 与 $A_{\beta_n}^{-k}(\infty)(k=1,2,\cdots)$ 上. 因此，这些逆象分支也都是 John 区域. 所以当 n 为偶数时，$T_{n\beta_n}$ 的每个 Fatou 分支都是 John 区域.

(ii) 当 n 为奇数时，由文献[5]中定理 6.16 的证明知，$T_{n\beta_n}$ 仅有 3 个实不动点 $q_1, 1, q_2(q_1<-1, q_2>1)$ 且 q_1 是抛物不动点. $(q_1, 1-\lambda] \subset L_{\beta_n}(q_1)$，$[1-\lambda/2, +\infty] \cap L_{\beta_n}(q_1) = \varnothing$ 并且 $F(T_{n\beta_n})$ 仅有 3 个单连通的周期域 $A_{\beta_n}(1)$，$A_{\beta_n}(\infty)$ 和 $L_{\beta_n}(q_1)$. 易见 $(-\infty, q_1) \cup (q_2, +\infty) \subset A_{\beta_n}(\infty)$，$q_2$ 是斥性不动点，则 $q_1 \in \partial A_{\beta_n}(\infty)$，从而在抛物不动点 q_1 处仅有 1 个抛物花瓣. 易证 $T_{n\beta_n}$ 在 $(1-\lambda/2, 1)$ 上是严格单调递增的且 $T_{n\beta_n}(x) > x$，$T_{n\beta_n}$ 在 $(1, q_2)$ 上是严格单调递增的，且 $T_{n\beta_n}(x) < x$. 注意到 $z=1$ 是吸性不动点，因此 $(q_2^*, q_2) \in A_{\beta_n}(1)$，其中，$q_2^*$ 是 q_2 在区间 $(1-\lambda/2, 1)$ 内的逆象，由文献[5]中的定理 8.22 的结论知道，$T_{n\beta_n}$ 的每个 Fatou 分支都是 Jordan 区域，并且它们都关于实轴 $\mathbf{R}$ 对称. 故 $\partial A_{\beta_n}(1) \cap \overline{\mathbf{R}} = \{q_2^*, q_2\}$，所以，$q_1$ 和它的所有逆象都不在 $\partial A_{\beta_n}(1)$ 上.

显然，$T_{n\beta_n}$ 是临界非回归的有理函数，并且 $J(T_{n\beta_n})$ 显然不是圆周、圆弧或者有限条互不交解析弧上的 Cantor 集，由定义 2 与引理 1 知，抛物不动点 q_1 和它的所有逆象点都是 $J(T_{n\beta_n})$ 上的尖点，考虑到 $F(T_{n\beta_n})$ 仅有 3 个周期域 $A_{\beta_n}(1)$，$A_{\beta_n}(\infty)$ 和 $L_{\beta_n}(q_1)$. 因此，除了抛物不动点 q_1 和它的所有逆象点之外，$J(T_{n\beta_n})$ 上不再有其它的尖点. 再由 Leau-Fatou 花瓣定理知，抛物不变域 $L_{\beta_n}(q_1)$ 在 q_1 处与实轴 $\mathbf{R}$ 的夹角是 2π. 因此，q_1 是抛物不变域 $L_{\beta_n}(q_1)$ 的内部尖点. 既然 $T_{n\beta_n}$ 在 q_1 的充分小的邻域内是共形的，则 q_1 的所有逆象点也是 $L_{\beta_n}(q_1)$ 的内部尖点. 因此，$L_{\beta_n}(q_1)$ 是 John 区域. 完全类似于(2)式的讨论，能够推出 $L_{\beta_n}(q_1)$ 的所有逆像分支 $L_{\beta_n}^{-k}(q_1)(k=1,2,\cdots)$ 都是 John 区域. 因为 q_1 和它的逆象都不在 $\partial A_{\beta_n}(1)$ 上. 所以，$\partial A_{\beta_n}(1)$ 上没有任何尖点. 因此，$A_{\beta_n}(1)$ 是 John 区域. 显然，q_1 和它的逆象都不在 $A_{\beta_n}(1)$ 的逆象分支上，故这些逆象分支也都是 John 区域. 因为 $q_1 \in \partial A_{\beta_n}(\infty)$，故 q_1 是 $A_{\beta_n}(\infty)$ 的外部尖点. 由于 John 区域没有外部尖点，所以 $A_{\beta_n}(\infty)$ 不是 John 区域. 既然 q_1 的逆象点都是 $J(T_{n\beta_n})$ 上的尖点，所以 $A_{\beta_n}(\infty)$ 的逆象分支都不是 John 区域. 引理 4 得证.

定理 1 的证明　从文献[5]的定理 7.22 知道，当 n 为偶数或者 $n=3$，且 $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\{\alpha_n, \beta_n\}$，或者 $n>3$ 为奇数且 $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\{(1,2), \alpha_n, \beta_n\}$ 时，$T_{n\lambda}$ 都是次双曲的. 因此也是半双曲的，由引理 2 知，$T_{n\lambda}$ 的每个 Fatou 分支都是 John 区域. 下面讨论当 $n>3$ 为奇数且 $\lambda \in (1,2)$ 时的情形.

注意到在这种情形下，$T_{n\lambda}$ 除了包含 2 个吸性不变域 $A_\lambda(1)$ 和 $A_\lambda(\infty)$ 外，至多包含另 1 个周期循环

域. 由于 $T_{n\lambda}$ 是实系数的有理函数,故 $T_{n\lambda}$ 没有 cremer 点,siegel 盘与 Herman 环. 若其仅包含 2 个吸性不变域,由引理 3 与引理 4 的讨论知,它们及其所有的逆像都是 John 域.

若 $T_{n\lambda}$ 包含 1 个周期循环域$\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$,易见实临界点 $1-\lambda$ 必包含在循环$\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$之中. 如果$\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$是超吸性循环域或吸性循环域,易证 $T_{n\lambda}$ 是半双曲有理函数. 由引理 2,$T_{n\lambda}$ 的每个 Fatou 分支都是 John 区域. 如果$\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$是抛物循环域,断定这些抛物周期点及它们的逆像点都不在 $\partial A_\lambda(1)$ 与 $\partial A_\lambda(\infty)$ 上. 事实上,既然 $T_{n\lambda}$ 的每个 Fatou 分支都是 Jordan 区域(见文献[6]定理8.11),且 $T_{n\lambda}$ 是实系数的有理函数,因此 $\partial A_\lambda(1)$ 与 $\partial A_\lambda(\infty)$ 与实轴 R 仅有 2 个交点. 易见此时有斥性不动点 $q\in(1,+\infty)$ 且 $q\in\partial A_\lambda(1)$ 与 $q\in\partial A_\lambda(\infty)$,易证 $\exists q_1\in(1-\lambda/2,1)$ 与 $q_2\in(-\infty,0)$ 使得 $(q_1,q)\subset A_\lambda(1)$ 与 $(-\infty,q_2)\subset A_\lambda(\infty)$,故 $q_1\in\partial A_\lambda(1)$ 与 $q_2\in\partial A_\lambda(\infty)$. 所以 $\partial A_\lambda(1)$ 与 $\partial A_\lambda(\infty)$ 不包含抛物循环域上的抛物周期点. 进一步地,$\partial A_\lambda(1)$ 与 $\partial A_\lambda(\infty)$ 也不包含尖点与它们的逆像点. 既然 $T_{n\lambda}$ 是实系数的有理函数,易证 $T_{n\lambda}$ 是临界非回归的有理函数. 由引理 1,$\partial A_\lambda(1)$ 与 $\partial A_\lambda(\infty)$ 没有另外的尖点,故 $A_\lambda(1)$ 与 $A_\lambda(\infty)$ 都是 John 区域. 显然,它们的任何逆像 Fatou 也都是 John 区域. 当这些抛物周期点不是 $J(T_{n\lambda})$ 的尖点时,易见 $A_\lambda(1)$ 与 $A_\lambda(\infty)$ 以及它们的任何逆像 Fatou 都是 John 区域. 当这些抛物周期点是 $J(T_{n\lambda})$ 的尖点时,由引理 3 或引理 4 的讨论知,每 1 个$\{U_i(i=1,2,\cdots,k)\}$及它们的任何逆像 Fatou 都不是 John 区域.

结合引理 3 与引理 4,完成了定理 1 的证明.

3 参考文献

[1] Ruelle D. Thermodynamic formalism: encyclopedia of mathematics and its applications [M]. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company,1978.

[2] Yang Chenning,Lee T D. Statistical theory of equations of state and phase transitions. Ⅰ. theory of condensation [J]. Phys Rev,1952,87(3):410-414.

[3] Lee T D,Yang Chenning. Statistical theory of equations of state and phase transitions. Ⅱ. lattice gas and ising model [J]. Phys Rev,1952,87(3):415-419.

[4] Qiao Jianyong. Julia sets and complex singularities in diamond-like hierarchical Potts models [J]. Science in China: A,2005,48(3):388-412.

[5] 乔建永. 重整化变换的复动力学 [M]. 北京:科学出版社,2010.

[6] Pommerenke C. Boundary behaviour of conformal maps [M]. Berlin: Springer,1991.

[7] Beardon A F. Iteration of rational functions [M]. Berlin: Springer,1991.

[8] McMullen C T. Complex dynamics and renormalization [M]. Princeton: Princeton University Press,1994.

[9] Milnor J. Dynamics in one complex variable [M]. Princeton: Princeton University Press,2006.

[10] 尹永成. 半双曲有理映射的 Julia 集 [J]. 数学年刊,1999,20A(5):559-567.

[11] Qiao Jianyong,Gao Junyang. Jordan domain and Fatou set concerning diamond-like hierarchical Potts models [J]. Nonlinearity,2007,20(1):119-131.

Fatou Sets of a Family of Rational Maps Concerning Renormalization Transformation

GAO Jun-yang,MA Qing-wen
(School of Science,China University of Mining and Technology,Beijing 100083,China)

Abstract: The topological properties about the Fatou sets of a family of rational maps $T_{n\lambda}$ concerning renormalization transformation are mainly studied. In fact,let D be any Fatou component of $T_{n\lambda}$ the relations between the John domain and D are investigated. Hence a perfect topological description of the Julia sets $J(T_{n\lambda})$ about the topological complexity is given.

Key words: John domain; Fatou component; Julia set,cusp; renormlization transformation

(责任编辑:王金莲)