文章编号:1000-5862(2014)04-0399-04

一类高阶线性微分方程解的增长级

钟文波,易才凤*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:运用 Nevanlinna 值分布的基本理论和整函数的相关性质,研究了一类高阶齐次线性微分方程解的增长性,在假设其系数均为整函数,且有 1 个满足杨-张不等式的极端情况的条件下,证明了方程的每 1 个非零解均具有无穷级.

关键词:整函数;杨-张不等式;微分方程;无穷级

中图分类号:O 174.52 **文献标志码**:A

0 引言和主要结果

本文假定读者熟悉 Nevanlinna 值分布的基本理论和标准记号[1-2],用 $T(r,f)$ 表示亚纯函数 f 的特征函数,$\rho(f)$ 表示亚纯函数 f 的增长级,$\mu(f)$ 表示 f 的下级,$n(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon,r),f=a)$ 表示 $f-a$ 在角域 $\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon,r)=\{z:\theta-\varepsilon<\arg z<\theta+\varepsilon,0<|z|<r\}$ 内的零点(计重数)个数.

定义 1[3] 设 $f(z)$ 是 $\lambda(0<\lambda\leqslant\infty)$ 级亚纯函数,1 条从原点出发的射线 $\arg z=\theta$ 称为 f 的 1 条 λ 级 Borel 方向,如果

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon,r),f=a)}{\log r}=\lambda$$

至多除去 2 个例外的复数 a.

定义 2[4] 设 $f(z)$ 是下级为 $\mu(f)(0<\mu(f)<\infty)$ 的亚纯函数,λ 为一有限常数且满足 $\mu(f)\leqslant\lambda\leqslant\rho(f)$,1 条从原点出发的射线 $\arg z=\theta$ 称为 f 的 1 条级 $\geqslant\lambda$ 的 Borel 方向,如果

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon,r),f=a)}{\log r}\geqslant\lambda$$

至多除去 2 个例外的复数 a.

众所周知,关于 2 阶线性微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0, \qquad (1)$$

当 $A(z)$,$B(z)$ 是整函数时,方程(1)的解都是整函数,并且如果 $B(z)$ 是超越的,而 f_1,f_2 是方程(1)的 2 个线性无关解,则 f_1,f_2 中至少有 1 个是无穷级.一个很自然的问题:当 $A(z)$,$B(z)$ 满足什么条件时,会使得方程(1)的所有非零解都是无穷级?1988 年,G. G. Gundersen 在文献[5]中假定 $A(z)$,$B(z)$ 为整函数并满足 $\rho(A)<\rho(B)$,以及 1991 年 S. Hellerstein 等在文献[6]中假定 $A(z)$ 是多项式,$B(z)$ 是超越的或 $\rho(B)<\rho(A)\leqslant 1/2$,在这些条件下证明了方程(1)的所有非零解均为无穷级.关于方程解的无穷级讨论,还有一些有趣的结论,详见文献[7-10].

熟知,亏值和 Borel 方向是亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论中的 2 个不同概念,而杨乐和张广厚却惊奇地发现 2 者之间有直接联系,即下面定理 A.

定理 A 假设 f 是具有有限下级 $\mu(\mu>0)$ 的整函数,q 为 f 的级 $\geqslant\mu$ 的 Borel 方向的条数,p 为 f 的有限亏值的个数,则 $p\leqslant q/2$.

本文中称定理 A 中的"$p\leqslant q/2$"为杨-张不等式,如果 f 满足极端情况 $p=q/2$,则称 f 满足杨-张不等式的极端情况.2013 年,龙见仁等在文献[11]中,运用杨-张不等式的极端情形进一步研究了方程(1)的相关问题,得出下面的结论.

定理 B 假设 $A(z)$ 是满足杨-张不等式的极端情况 $p=q/2$ 的整函数,$B(z)$ 为一超越整函数且 $\rho(A)\neq\rho(B)$,则方程(1)的所有非零解 f 都具有无穷级.

定理 C 设 $A(z)$ 是满足杨-张不等式的极端情况 $p_1=q_1/2$ 的整函数,$B(z)$ 也满足杨-张不等式的极端情况 $p_2=q_2/2$,若有下列条件之一成立:

(i) $q_1\neq q_2$;

(ii) $q_1=q_2$ 且 $A(z)$ 的 Borel 方向的集合不同于

收稿日期:2013-12-23

基金项目:国家自然科学基金(11171170)资助项目.

通信作者:易才凤(1955-),女,江西吉安人,教授,主要从事复分析方向研究.

$B(z)$ 的 Borel 方向的集合，
则方程(1) 的所有非零解 f 都具有无穷级.

本文主要从杨-张不等式的极端情况来研究高阶线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=0 \qquad (2)$$

解的增长性,证明了以下结论.

定理1 假设 $A_j(z)\ (j=0,1,\cdots,k-1)$ 为整函数,其中存在1个 $A_i(z)\ (i\neq 0)$ 满足杨-张不等式的极端情况 $p=q/2$, $\rho(A_i)\neq\rho(A_0)$,且 $\rho(A_j)<\rho(A_0)\ (j\neq i)$,则方程(2) 的所有非零解 f 都具有无穷级,且超级满足

$$\rho(A_0)\leqslant\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_0),\rho(A_i)\}. \qquad (3)$$

定理2 假设 $A_j(z)\ (j=0,1,\cdots,k-1)$ 为整函数,其中存在1个 $A_i(z)\ (i\neq 0)$ 满足杨-张不等式的极端情况 $p_1=q_1/2$, $A_0(z)$ 也满足杨-张不等式的极端情况 $p_2=q_2/2$,且 $\rho(A_j)<\rho(A_0)\ (j\neq i)$,若下列条件之一成立:

(i) $q_1\neq q_2$;

(ii) $q_1=q_2$, $A_i(z)$ 的 Borel 方向的集合不同于 $A_0(z)$ 的 Borel 方向的集合,
则方程(2) 的所有非零解 f 都具有无穷级,且超级满足(3) 式.

注1 在定理1 和定理2 中,超级均满足(3)式,进一步,如果 $\rho(A_i)\leqslant\rho(A_0)$,则 $\rho_2(f)=\rho(A_0)$.

1 引理

引理1[12] 设 $A_j(z)\ (j=0,1,\cdots,k-1)$ 是整函数,且 $\rho(A_j)<\rho(A_0)<\infty\ (j=1,\cdots,k-1)$,则高阶线性方程(2) 的所有非零解 f 具有无穷级.

引理2[13] 假设 f 满足杨-张不等式的极端情况,则 $\mu(f)=\rho(f)$. 进一步,对于每1个亏值 $a_i\ (i=1,\cdots,p)$,都存在1个相应的角域 $\Omega(\theta_{k_i},\theta_{k_{i+1}})=\{z:\theta_{k_i}<\arg z<\theta_{k_{i+1}}\}$,使得对于每个 $\varepsilon>0$ 和 $z\in\Omega(\theta_{k_i}-\varepsilon,\theta_{k_{i+1}}+\varepsilon,r,\infty)$ 都有

$$\log\frac{1}{|f(z)-a_i|}>A(\theta_{k_i},\theta_{k_{i+1}},\varepsilon,\delta(a_i,f))T(|z|,f),$$

其中 $A(\theta_{k_i},\theta_{k_{i+1}},\varepsilon,\delta(a_i,f))$ 是仅依赖于 $\theta_{k_i},\theta_{k_{i+1}},\varepsilon$ 和 $\delta(a_i,f)$ 的正常数.

引理3 假设 f 满足杨-张不等式的极端情况,并且 $\exists\,\theta\in\Omega(\theta_j,\theta_{j+1})\ (1\leqslant j\leqslant q)$,使得

$$\limsup_{r\to\infty}\log^+\log^+|f(re^{i\theta})|/\log r=\rho(f),$$

则 $\theta_{j+1}-\theta_j=\pi/\rho(f)$.

引理4[14] 设 $f(z)$ 是开平面上的超越亚纯函数,$\Gamma=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),\cdots,(k_q,j_q)\}$ 是由不同整数对组成的有限集合,满足 $k_i>j_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,q)$,又设 $\alpha\ (\alpha>1)$ 是给定的实常数及 $\varepsilon>0$ 为任意给定的正数,则存在零测度集 $E_1\subset[0,2\pi)$ 和仅依赖于 Γ 和 α 的常数 C,使得如果 $\varphi_0\in[0,2\pi)\setminus E_1$,则存在常数 $R_0=R_0(\varphi_0)>1$,对满足 $\arg z=\varphi_0$ 及 $|z|=r\geqslant R_0$ 的所有的 z 及所有的 $(k,j)\in\Gamma$,都有

$$\left(\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right)\leqslant C\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha}r\log T(\alpha r,f)\right)^{k-j}. \qquad (4)$$

特别地,当 $f(z)$ 的级 $\rho(f)=\rho<\infty$ 时,(4) 式可由下面的(5) 式代替:

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)|\leqslant|z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \qquad (5)$$

引理5[15] 设 $f(z)$ 是具有无穷级的整函数,其超级 $\rho_2(f)=\rho$,令 $\upsilon(r)$ 为 f 的中心指标,则

$$\limsup_{r\to\infty}\log\log\upsilon(r)/\log r=\rho.$$

引理6 设 $A_j(z)\ (j=0,1,\cdots,k-1)$ 满足定理1(或定理2) 的条件,且方程(2) 的非零解 f 具有无穷级,则超级 $\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_0),\rho(A_i)\}$.

证 由 Wiman-Valiron 理论可知,存在1个具有有穷对数测度的集合 $E_2\subset(1,+\infty)$,使得当 z 满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$ 和 $|f(z)|=M(r,f)$ 时,有

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\upsilon(r)}{z}\right)^j(1+o(1))\ (j=1,2,\cdots,k). \qquad (6)$$

记 $\rho_1=\max\{\rho(A_0),\rho(A_i)\}$,显然 $\rho(A_j)\leqslant\rho_1\ (j=0,1,\cdots,k-1)$. $\forall\,\varepsilon>0$,当 r 充分大时,有

$$|A_j|\leqslant\exp\{r^{\rho_1+\varepsilon}\}\ (j=0,1,\cdots,k-1). \qquad (7)$$

方程(2) 可变形为

$$f^{(k)}/f=-(A_{k-1}(z)f^{(k-1)}/f+\cdots+A_0(z)). \qquad (8)$$

把(6) 式和(7) 式代入(8) 式,则当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$ 且 r 充分大和 $|f(z)|=M(r,f)$ 时,有

$$\left(\frac{\upsilon(r)}{r}\right)^k(1+o(1))\leqslant\exp\{r^{\rho_1+\varepsilon}\}\left(\left(\frac{\upsilon(r)}{r}\right)^{k-1}\cdot(1+o(1))+\cdots+\left(\frac{\upsilon(r)}{r}\right)(1+o(1))+1\right),$$

即

$$\left(\frac{\upsilon(r)}{r}\right)^k(1+o(1))\leqslant\left(\frac{\upsilon(r)}{r}\right)^{k-1}\exp\{r^{\rho_1+\varepsilon}\}(1+o(1)).$$

从而 $\limsup\limits_{r\to\infty}\log\log\upsilon(r)/\log r\leqslant\rho_1+\varepsilon$.

由引理5 和 ε 的任意性得

$$\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_0),\rho(A_i)\}.$$

2 定理的证明

定理1 的证明 当 $\rho(A_i)<\rho(A_0)$ 时,由引理1 可知方程(2) 的所有非零解 f 具有无穷级. 当 $\rho(A_i)>\rho(A_0)$ 时,若假设(2) 式存在1个非零解 f,

其增长级 $\rho(f) < \infty$，下面导出矛盾.

由定理 1 的假设，$A_i(z)$ 满足杨-张不等式的极端情况，不妨设 $a_i(i=1,\cdots,p)$ 是 $A_i(z)$ 的所有有限亏值，$\arg z=\theta_j(j=1,2,\cdots,2p)$ 是 $A_i(z)$ 的 $\rho(A_0)$ 级 Borel 方向，故存在 $2p$ 个角域 $S_j=\{z\mid\theta_j<\arg z<\theta_{j+1}\}(j=1,\cdots,2p)$，由引理 2、引理 3 和 Borel 方向的定义可以知道 $A_i(z)$ 有如下性质：

在每个角域 S_j 中，或者存在一些 a_i，使得当 $z\in\Omega(\theta_j-\varepsilon,\theta_{j+1}+\varepsilon,r,\infty)$ 时，有

$$\log(1/|A_i(z)-a_i|)>C(\theta_{k_i},\theta_{k_{i+1}},\varepsilon,\delta(a_i,A_i))T(|z|,A_i),\tag{9}$$

其中 $C(\theta_{k_i},\theta_{k_{i+1}},\varepsilon,\delta(a_i,A_i))$ 是仅依赖于 $\theta_{k_i},\theta_{k_{i+1}},\varepsilon$ 和 $\delta(a_i,A_i)$ 的正常数；或者 $\exists\theta\in S_j$，使得

$$\limsup_{r\to\infty}\log^+\log^+|A_i(re^{i\theta})|/\log r=\rho(A_i).\tag{10}$$

为方便起见，记 $C(\theta_{k_i},\theta_{k_{i+1}},\varepsilon,\delta(a_i,f))$ 为 C，注意到若存在某些 a_i 在 S_j 中满足(9)式，则在 S_{j-1} 和 S_{j+1} 中 $\exists\theta$ 使得(10)式成立；若 $\exists\theta\in S_j$ 满足(10)式，则分别有某些 a_i 或 a_i' 在 S_{j-1} 和 S_{j+1} 上满足(9)式.

不失一般性，假设在 S_1 中 $\exists\arg z=\theta$ 满足(10)式，故在 $S_3,S_5,\cdots,S_{2p-1}$ 中均存在相应的 1 条射线满足(10)式. 由引理 3 可知，这些角域的张角均为 $\pi/\rho(A_i)$.

下面分 2 种情形讨论.

情形1　当 $\rho(A_0)\geqslant 1/2$ 时，由 Phragman-lindelof 定理可知，存在 1 个角域 $\Omega(\alpha,\beta)(0\leqslant\alpha<\beta<2\pi)$，使得 $\beta-\alpha\geqslant\pi/\rho(A_0)$，并且对于所有的 $\arg z=\theta(\alpha<\theta<\beta)$，有

$$\limsup_{r\to\infty}\log^+\log^+|A_0(re^{i\theta})|/\log r=\rho(A_0).$$

注意到 $\rho(A_i)>\rho(A_0)$，不难知道存在角域 $\Omega(\alpha',\beta')(\alpha<\alpha'<\beta'<\beta)$ 和 a_{j_0}，使得 $\forall\theta(\alpha'\leqslant\theta\leqslant\beta')$ 有

$$\log(1/|A_i(re^{i\theta})-a_{j_0}|)>CT(r,A_i).\tag{11}$$

由引理 4 可知，$\exists\theta_0(\alpha'\leqslant\theta_0\leqslant\beta')$ 和 $R_1>0$，使得对 $j=1,\cdots,k$，当 $r>R_1$ 时，有

$$|f^{(j)}(re^{i\theta_0})/f(re^{i\theta_0})|\leqslant r^{k\rho(f)}.\tag{12}$$

又由于

$$\limsup_{r\to\infty}\log^+\log^+|A_j(re^{i\theta})|/\log r=\rho(A_j)(j=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,k-1),$$

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists R_2>0$，对所有的 $r>R_2$，有

$$|A_j(re^{i\theta_0})|\leqslant\exp(r^{\rho(A_j)+\varepsilon}).\tag{13}$$

记 $l=\max\{\rho(A_j)\}(j\neq i)$，显然 $l<\rho(A_0)$.

注意到

$$\limsup_{r\to\infty}\log^+\log^+|A_0(re^{i\theta})|/\log r=\rho(A_0).$$

因此存在 1 列 $\{r_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\infty$，$\forall\varepsilon(0<\varepsilon<(\rho(A_0)-l)/2)$，有

$$|A_0(r_ne^{i\theta_0})|\geqslant\exp(r_n^{\rho(A_0)-\varepsilon}).\tag{14}$$

再由

$$-A_0(z)=\frac{f^{(k)}}{f}+A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+A_1(z)\frac{f'}{f}\tag{15}$$

及(11)～(14)式可知

$$\exp(r_n^{\rho(A_0)-\varepsilon})\leqslant|A_0(r_ne^{i\theta_0})|\leqslant\left|\frac{f^{(k)}(r_ne^{i\theta_0})}{f(r_ne^{i\theta_0})}\right|+|A_{k-1}(r_ne^{i\theta_0})|\left|\frac{f^{(k-1)}(r_ne^{i\theta_0})}{f(r_ne^{i\theta_0})}\right|+\cdots+(|A_i(r_ne^{i\theta_0})-a_{j_0}|+|a_{j_0}|)\left|\frac{f^{(i)}(r_ne^{i\theta_0})}{f(r_ne^{i\theta_0})}\right|+\cdots+|A_1(r_ne^{i\theta_0})|\cdot\left|\frac{f'(r_ne^{i\theta_0})}{f(r_ne^{i\theta_0})}\right|\leqslant r_n^{k\rho(f)}\exp(r_n^{l+\varepsilon})(k-1+\exp(-CT(r_n,A_i))).$$

当 n 充分大时，上式显然矛盾.

情形2　当 $\rho(A_0)<1/2$ 时，由于 $A_0(z)$ 是 1 个超越的整函数，由文献[16-17]的结果可知，$\forall\theta\in[0,2\pi)$，有 $\limsup\limits_{r\to\infty}\log|A_0(re^{i\theta})|/\log r=\infty$.

类似于情况 1 的讨论，可得到矛盾.

综合情形 1 和情形 2 可知，已经证明了方程(2)的所有非零解均具有无穷级，由引理 6 可知 $\rho_2(f)\leqslant\max\{\rho(A_0),\rho(A_i)\}$. 下面证明 $\rho_2(f)\geqslant\rho(A_0)$，也分 2 种情形讨论.

(i) $\rho(A_0)\geqslant 1/2$.

由引理 4 可知，存在 1 个零测度集合 $E_1\subset[0,2\pi)$ 和 2 个常数 $B>0$，$R_3>0$，当 $|z|=r>R_3$ 及 $\arg z=\theta\notin E_1$ 时，有

$$|f^{(j)}(z)/f(z)|\leqslant BT(r,f)^{k+1}(j=1,\cdots,k-1).\tag{16}$$

对每个 $\varepsilon>0(0<\varepsilon<(\rho(A_0)-l)/2)$，取满足(14)式的 1 列 $\{r_n\}$，当 $z=r_ne^{i\theta_1}$，且 $r_n>\max(R_2,R_3)$，$\theta_1\in\Omega(\alpha',\beta')-E_1$ 时，有(11)、(13)～(14)和(16)式成立，将其代入(15)式，得

$$\exp(r_n^{\rho(A_0)-\varepsilon})\leqslant|A_0(r_ne^{i\theta_0})|\leqslant BT(2r_n,f)^{k+1}\cdot\exp(r^{l+\varepsilon})(k-1+\exp(-CT(r_n,A_i))).$$

故 $\limsup\limits_{n\to\infty}\log^+\log^+T(r,f)/\log r\geqslant\rho(A_0)-\varepsilon$.

由 ε 的任意性可知 $\rho_2(f)\geqslant\rho(A_0)$.

(ii) 当 $\rho(A_0)<1/2$ 时，类似于(i)的证明方法可得结论成立.

定理2 的证明　首先考虑 $A_i(z)$，$A_0(z)$ 满足条件(i)的情形，若 $\rho(A_i)\neq\rho(A_0)$，则由定理 1 可知方程(2)的所有非零解 f 满足 $\rho(f)=\infty$，且超级满足(3)式. 下面考虑 $\rho(A_i)=\rho(A_0)=\rho$ 的情况，将其分为 2 种情形 $q_1<q_2$ 和 $q_1>q_2$.

情形 1　当 $q_1 < q_2$ 时,从引理 2 和引理 3 可知,存在 $q_2/2$ 个张角为 π/ρ 的角域,使得

$$\limsup_{r\to\infty}\log^+\log^+|A_0(re^{i\theta})|/\log r=\rho \tag{17}$$

并有 $q_1/2$ 个张角为 π/ρ 的角域,使得

$$\limsup_{r\to\infty}\log^+\log^+|A_i(re^{i\theta})|/\log r=\rho. \tag{18}$$

由 $q_1 < q_2$ 不难看出,$\exists\,\alpha,\beta(0<\alpha<\beta<2\pi)$,使得 $\forall\,\theta\in(\alpha,\beta)$,$A_i(z)$ 有界,而 $A_0(z)$ 满足(17)式,类似证明定理 1 的方法可知,方程(2)的每个非零解 f 具有无穷级,且超级满足(3)式.

情形 2　当 $q_1 > q_2$ 时,也存在 1 个角域 $\Omega(\alpha,\beta)$,使得 $A_i(z)$ 有界,而 $A_0(z)$ 满足(18)式,也用类似证明定理 1 的方法可得结论.

当 $A_i(z)$,$A_0(z)$ 满足条件(ii)时,可看出存在 1 个角域,使得在该角域内 $A_i(z)$ 有界,而 $A_0(z)$ 满足(17)式,类似于前面的讨论,同样可得到结论.

3　参考文献

[1] Hayman W K. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press,1964.
[2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社,1982.
[3] 张广厚. 整函数和亚纯函数理论 [M]. 北京: 科学出版社,1986.
[4] Yang Le. Deficient values and angular distribution of entire functions [J]. Trans Amer Math Soc,1988,308(2):583-601.
[5] Gundersen G G. Finite order solution of second order linear differential equations [J]. Trans Amer Math Soc,1988,305(1):415-429.
[6] Hellerstein S,Miles J,Rossi J. On the growth of solutions of $f''+gf'+hf=0$ [J]. Trans Amer Math Soc,1991,324(2):693-705.
[7] Chen Zongxuan. The growth of solutions of $f''+e^{-z}f'+Q(z)f=0$ where the order$(Q)=1$ [J]. Science in China: A,2002,45(3):290-300.
[8] 刘旭强,易才凤. 关于 2 阶线性微分方程 $f''+Af'+Bf=0$ 解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2013,37(2):171-174.
[9] 石磊,易才凤. 一类高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2012,36(3):230-233.
[10] Wu Pengcheng,Zhu Jun. On the growth of solutions to the complex differential equation $f''+Af'+Bf=0$ [J]. Science China: Mathematics,2011,54(5):939-947.
[11] Long Jianren,Wu Pengcheng,Zhang Zheng. On the growth of solutions of second order linear differential equations with extremal coefficients [J]. Acta Mathematica Sinica,English Serier,2013,29(2):365-372.
[12] Chen Zongxuan,Gao Shian. The complex oscillation theory of certain non-homogemeous linear differential equations with transcendental entire coefficients [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1993,179(2):403-416.
[13] Wu Shengjian. Some results on entire functions of finite lower order [J]. Acta Math Ematica Sinica,English Series,1994,10(2):168-178.
[14] Gundersen G G. Estimate for the logarithmic derivative of a meromorphic function [J]. J London Math Soc,1988,37(1):88-104.
[15] Chen Zongxuan,Yang Chongjun. Quantitative estimates on the zeros and growth of entire solutions of linear differential equations [J]. Complex Variables,2000,42(1):119-133.
[16] Barry P D. On a theorem of besicovitch [J]. Quant J Math Oxford Ser,1963,14(2):293-302.
[17] Chen Zongxuan,Yang Chongjun. Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations [J]. Kodai Math J,1999,22(2):273-285.

On the Growth of Solutions of a Class of Higher Order Linear Differential Equations

ZHONG Wen-bo,YI Cai-feng*

(College of Mathematics and Informatics,,Jiangxi Normal University,Nanchang Jianxi 330022,China)

Abstract: By using the fundamental theory of value distribution of Nevanlinna and the property of entire function,the growth of solutions of the higher order linear differential equations is considered where coefficients are entire function. Assume that one of coefficients is extremal for Yang-Zhang inequality,it was proved that every nontrivial solution of the complex differential equation has infinite order.

Key words: entire function; Yang-Zhang inequality; differential equations; infinite order

(责任编辑: 王金莲)