

文章编号: 1000-5862(2014)04-0403-06

对流扩散问题非均匀网格上的部分半粗化多重网格方法

曹富军^{1,2,3}, 袁冬芳², 葛永斌⁴

(1. 中国科技大学数学科学学院, 安徽 合肥 230000; 2. 内蒙古科技大学数理与生物工程学院, 内蒙古 包头 014010;
3. 北京应用物理与计算数学研究所计算物理实验室, 北京 100088; 4. 宁夏大学数学计算机学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 结合非均匀网格上的 HOC 格式与部分半粗化的多重网格方法对具有边界层的 2 维对流扩散问题进行了求解, 并基于面积率构造了部分半粗化多重网格方法的插值算子和限制算子. 数值实验表明: 对于只需要在 1 个方向进行网格加密的边界层问题, 基于部分半粗化的网格分布策略及多重网格算法可以大大减少无边界层方向的网格数, 从而较完全粗化的网格分布策略及多重网格算法具有更高的计算精度和求解效率.

关键词: 非均匀网格; 高精度紧致格式; 部分半粗化; 多重网格; 边界层对流扩散

中图分类号: O 241

文献标志码: A

0 引言

考虑具有如下形式的 2 维对流扩散方程:

$$-au_{xx} - bu_{yy} + c(x, y)u_x + d(x, y)u_y = f(x, y),$$

其中 $u(x, y)$ 是未知量, $c(x, y)$ 和 $d(x, y)$ 分别为 x 和 y 方向的对流系数, $f(x, y)$ 为计算域上足够光滑的函数.

求解对流扩散方程的方法较多, 如传统的中心差分格式、迎风格式等, 然而, 它们都不能够满足实际计算所需要的精度. 紧致差分格式由于精度高并且具有小的离散子域、对单元的敏感性小和对边界单元的处理无特殊困难等特点越来越受到人们的重视^[1-3]. 然而, 大多数紧致格式是基于均匀网格上提出的, 对于求解大梯度或者边界层问题, 均匀网格上的紧致格式很难得到理论上的高精度数值解. 因此, J. C. Kalita 等^[4]直接在物理区域上建立了求解 2 维定常对流扩散方程非均匀网格的高精度紧致差分格式, 由于该方法在物理区域上直接离散偏微分方程, 没有采用坐标变换, 因此减少了坐标变换带来的额外计算量, 并且数值结果表明该方法具有 4 阶精度.

另一方面, 多重网格方法已经从理论上被证明至少对于求解线性椭圆型问题是一种最优化的数值计算方法^[5, 8-11]. 许多学者致力于高精度紧致差分格式与多重网格方法相结合求解偏微分方程并做出了

不少有意义的工作. 文献 [2] 提出了非等距网格上 2 维泊松方程的网格部分半粗化策略(网格粗化过程仅在主控方向上进行, 而在非主控方向上的网格步长则保持不变), 数值实验表明: 对于各向异性问题, 由于减少了非主控方向的网格数, 该策略下的多重网格算法比网格完全粗化策略下的多重网格算法, 在不损失精度的前提下, 大大节约了计算时间, 提高了计算效率. 文献 [6] 将部分半粗化策略推广到非等距网格上 3 维泊松方程的求解; 文献 [10] 基于 J. C. Kalita 等提出的求解 2 维对流扩散方程的高精度紧致格式, 提出相应的完全粗化的多重网格算法, 并通过对边界层问题的求解, 展现了非均匀网格上多重网格算法的效率. 文献 [11] 将该方法推广到 3 维, 建立了 3 维非均匀网格上完全粗化多重网格算法的插值算子和限制算子, 并求解了 3 维泊松方程. 该方法的缺点是在所有坐标轴方向上采用相同的网格数, 这对于边界层或大梯度仅在 1 个方向的问题, 无疑会浪费计算量, 因为在该方向并不需要网格加密. 基于此, 本文将设计一种非均匀网格上的网格部分半粗化策略, 并建立其相应的多重网格算法, 然后通过数值算例验证方法的精确性和可靠性.

1 HOC 格式

考虑矩形区域 $\Omega = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, 将求解区

收稿日期: 2014-05-10

基金项目: 国家自然科学基金(11061025, 61263015)和内蒙古科技大学校内创新基金(2011NCL019, 2011NCL031)资助项目.

作者简介: 曹富军(1984-), 男, 宁夏中宁人, 讲师, 博士, 主要从事偏微分方程数值解方面的研究.

域 $[b_1, a_2]$ 和 $[b_1, b_2]$ 分别剖分 $a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = a_2, b_1 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = b_2$. 并且定义: $x_f = x_{i+1} - x_i, x_b = x_i - x_{i-1}, y_f = y_{j+1} - y_j, y_b = y_j - y_{j-1}, 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1$. 记 $x_i - x_{i-1} = \theta_{lx} h_x, x_{i+1} - x_i = \theta_{rx} h_x, y_j - y_{j-1} = \theta_{ly} h_y, y_{j+1} - y_j = \theta_{ry} h_y$, 其中 $h_x = (a_2 - a_1)/n, h_y = (b_2 - b_1)/m$. 进一步地, 记 $\beta_{\wedge} = \theta_{r\wedge} + \theta_{l\wedge}, \gamma_{\wedge} = \theta_{r\wedge} - \theta_{l\wedge}, \alpha_{\wedge} = \theta_{l\wedge} \theta_{r\wedge}, \wedge$ 代表 x 或 y . 当且仅当 $\theta_{l\wedge} = \theta_{r\wedge} = 1$ 时网格剖分为均匀剖分.

通过以上的标记, x 和 y 方向上的 1 阶和 2 阶差分算子可以写为

$$\begin{aligned}\delta_x u_{ij} &= \frac{(\theta_{lx}^2 u_{i+1,j} + \beta_x \gamma_x u_{i,j} - \theta_{rx}^2 u_{i-1,j})}{\alpha_x \beta_x h_x}, \\ \delta_x^2 u_{ij} &= \frac{2(\theta_{lx} u_{i+1,j} - \beta_x u_{i,j} + \theta_{rx} u_{i-1,j})}{\alpha_x \beta_x h_x^2}, \\ \delta_y u_{ij} &= \frac{(\theta_{ly}^2 u_{i,j+1} + \beta_y \gamma_y u_{i,j} - \theta_{ry}^2 u_{i,j-1})}{\alpha_y \beta_y h_y}, \\ \delta_y^2 u_{ij} &= \frac{2(\theta_{ly} u_{i,j+1} - \beta_y u_{i,j} + \theta_{ry} u_{i,j-1})}{\alpha_y \beta_y h_y^2}.\end{aligned}$$

将文献 [1] 中给出的非均匀网格上的紧致差分格式改写为 $[-A_{ij}\delta_x^2 - B_{ij}\delta_y^2 + C_{ij}\delta_x + D_{ij}\delta_y + G_{ij}\delta_x\delta_y - H_{ij}\delta_x\delta_y^2 - K_{ij}\delta_x^2\delta_y - L_{ij}\delta_x^2\delta_y^2]\Phi_{ij} = F_{ij}$, 其中各项系数 $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, G_{ij}, H_{ij}, K_{ij}, L_{ij}$ 和 F_{ij} 如下:

$$\begin{aligned}A_{ij} &= 1 - [H_1 + H_2 c_{ij}] c_{ij} + 2H_2 (\delta_x c_{ij} - 0.5\gamma_x h_x \delta_x^2 c_{ij})] + 0.5\gamma_x h_x c_{ij}, \\ B_{ij} &= 1 - [K_1 + K_2 d_{ij}] d_{ij} + 2K_2 (\delta_y d_{ij} - 0.5\gamma_y h_y \delta_y^2 d_{ij})] + 0.5\gamma_y h_y d_{ij}, \\ C_{ij} &= \{1 + (H_1 + H_2 c_{ij}) \delta_x + (K_1 + K_2 d_{ij}) \delta_y + [H_2 - 0.5h_x \gamma_x (H_1 + H_2 c_{ij})] \delta_x^2 + [K_2 - 0.5h_y \gamma_y (K_1 + K_2 d_{ij})] \delta_y^2\} c_{ij}, \\ D_{ij} &= \{1 + (H_1 + H_2 c_{ij}) \delta_x + (K_1 + K_2 d_{ij}) \delta_y + [H_2 - 0.5h_x \gamma_x (H_1 + H_2 c_{ij})] \delta_x^2 + [K_2 - 0.5h_y \gamma_y (K_1 + K_2 d_{ij})] \delta_y^2\} d_{ij}, \\ G_{ij} &= (H_1 + H_2 c_{ij}) d_{ij} + (K_1 + K_2 d_{ij}) c_{ij} + 2H_2 \delta_x d_{ij} + 2K_2 \delta_y c_{ij} - (H_2 h_x \gamma_x \delta_x^2 d_{ij} + K_2 h_y \gamma_y \delta_y^2 c_{ij}), \\ H_{ij} &= H_1 + H_2 c_{ij} - K_2 c_{ij}, \\ K_{ij} &= K_1 + K_2 d_{ij} - H_2 d_{ij}, \\ L_{ij} &= H_1 + H_2, \\ F_{ij} &= \{1 + (H_1 + H_2 c_{ij}) \delta_x + (K_1 + K_2 d_{ij}) \delta_y + [H_2 - 0.5h_x \gamma_x (H_1 + H_2 c_{ij})] \delta_x^2 + [K_2 - 0.5h_y \gamma_y (K_1 + K_2 d_{ij})] \delta_y^2\} f_{ij},\end{aligned}$$

其中 $H_1 = (2h_x \gamma_x - c_{ij} h_x^2 \alpha_x)/6, H_2 = [\bar{h}_x^2 (\beta_x^2 - 3\alpha_x) - c_{ij} h_x^3 \alpha_x \gamma_x]/24, K_1 = (2h_y \gamma_y - d_{ij} h_y^2 \alpha_y)/6, K_2 =$

$$[\bar{h}_y^2 (\beta_y^2 - 3\alpha_y) - d_{ij} h_y^3 \alpha_y \gamma_y]/24.$$

2 部分半粗化多重网格方法

文献 [2] 采用非等距网格离散 2 维泊松方程并提出 2 种多重网格方法: (i) 在主方向上使用线松弛方法代替点松弛迭代, 因为主控方向上节点多计算量大, 线松弛可以快速消除高频误差; (ii) 采用部分半粗化的多重网格方法. 由于 HOC 格式在不同方向上网格数也不一样, 所以粗化过程仅在主控方向上进行实施, 而非主控方向上网格数保持不变. 数值实验表明该方法对于求解各向异性问题表现出极高的效率. 文献 [1] 将该方法推广到 3 维 Poisson 方程各向异性问题的求解. 本文利用文献 [2] 提出的部分半粗化多重网格方法的思想, 结合非均匀网格上的 HOC 格式来求解带边界层的 2 维对流扩散问题. 对于传统的多重网格方法, 限制算子和插值算子都是基于完全粗化过程, 在均匀网格上提出的. 然而, 当采用非均匀网格时, 传统基于均匀网格上的限制算子和插值算子不再使用, 因此, 文献 [1] 构造了非均匀网格上的限制算子和插值算子, 并建立了相应的多重网格算法. 但是该方法只适用于所有空间方向网格数相同的情形, 如果不同空间方向网格数不同, 则需要重新构造限制算子和插值算子, 并建立部分半粗化的多重网格算法. 下面先建立部分半粗化网格策略下多重网格方法的限制算子和插值算子.

首先, 假设 N_x 和 N_y 分别为 x 和 y 方向的网格数且 $N_x > N_y$. 对于部分半粗化过程而言, 需要在细网格上在 x 方向从第 1 条边开始每隔 1 个删除 1 条线进行粗化. 由于在进行 x 方向的粗化过程中 y 方向的网格数不变. 因此, 当 $N_x = N_y$ 时, 采用完全粗化过程. 整个过程为部分半粗化. 标准的完全粗化和部分半粗化过程分别如图 1 和图 2 所示.

为了便于表述, 记 u_{ij} 为方程的近似解, Ω_h 和 Ω_H 分别为细网格和粗网格. I_h^H 为细网格到粗网格上的限制算子, I_H^h 为从粗网格到细网格上的插值算子, $\bar{r}_{ij}$ 和 r_{ij} 分别为粗网格和细网格上对应的残差. 由于 x 和 y 方向的网格数不同, 需要针对不同情况构造限制算子.

当 $N_x \neq N_y (N_x > N_y)$ 时, 只需要在 x 方向根据相邻点进行加权平均就可构造限制算子 (见图 3):

$$\begin{aligned}I_h^H r_{ij} &= r_{2i,2j} = \bar{r}_{ij}, \\ I_H^h r_{ij} &= \frac{1}{L} (L_1 r_{2i-1,2j} + L_0 r_{2i,2j} + L_3 r_{2i+1,2j}).\end{aligned}$$

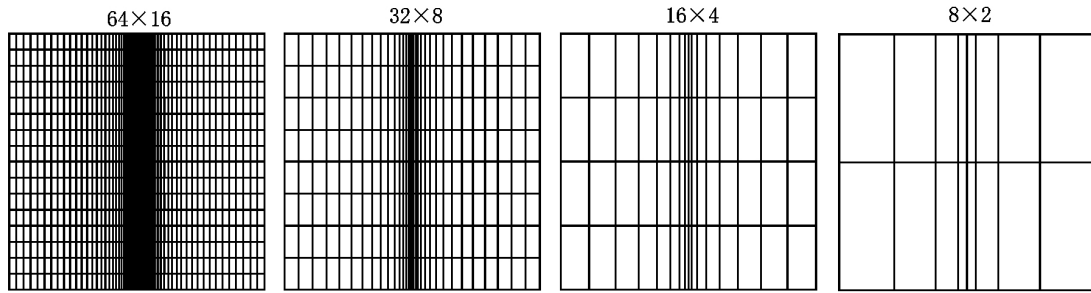
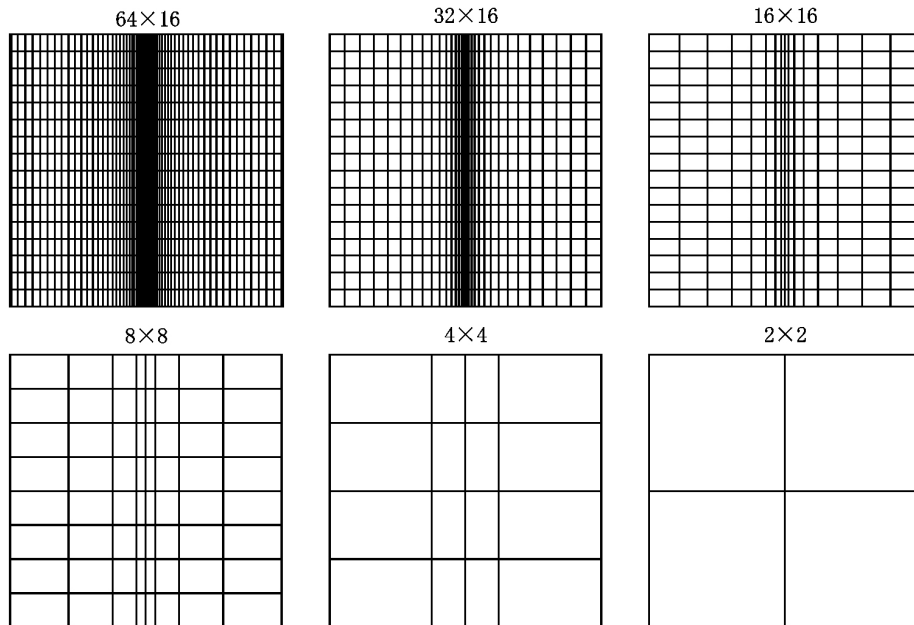


图1 2个方向完全粗化

图2 x 方向部分半粗化

当 $N_x \neq N_y$ 时,只需要在 x 方向上构造插值算子 (见图4):

$$I_H^h \bar{r}_{i,j} = \bar{r}_{i,j} = r_{2i,2j},$$

$$I_H^h \bar{r}_{\bar{i},j} = \frac{1}{L_x} (L_{rx} \bar{r}_{\bar{i}-1,j} + L_{lx} \bar{r}_{\bar{i}+1,j}) = r_{2i-1,2j},$$

其中较大的黑点表示粗网格上的网格点,较小的黑点表示细网格上的网格点,且 $\bar{i}$ 表示 $2i$, $\bar{j}$ 表示 $2j$.

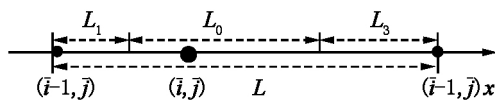


图3 单个方向的限制算子

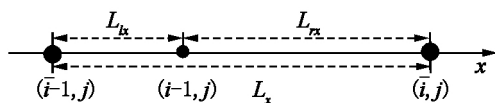


图4 单个方向的插值算子

当 $N_x = N_y$ 时,需要同时考虑 x 和 y 方向的8个网格点进行加权平均构造完全粗化限制算子(见图5):

$$I_H^h r_{ij} = r_{2i,2j} = \bar{r}_{ij},$$

$$I_H^h r_{i,j} = C_7 r_{2i-1,2j+1} + C_2 r_{2i,2j+1} + C_5 r_{2i+1,2j+1} +$$

$$C_3 r_{2i-1,2j} + C_0 r_{2i,2j} + C_1 r_{2i+1,2j} + C_6 r_{2i-1,2j-1} +$$

$$C_4 r_{2i,2j-1} + C_8 r_{2i+1,2j-1} = \bar{r}_{\bar{i},\bar{j}}.$$

$$\text{其中 } \begin{bmatrix} C_6 & C_2 & C_5 \\ C_3 & C_0 & C_1 \\ C_7 & C_4 & C_8 \end{bmatrix} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} S_8 & S_4 & S_7 \\ S_1 & S_0 & S_3 \\ S_5 & S_2 & S_6 \end{bmatrix}, S = \sum_{i=0}^8 S_i,$$

S_i 为虚线部分围成的面积.

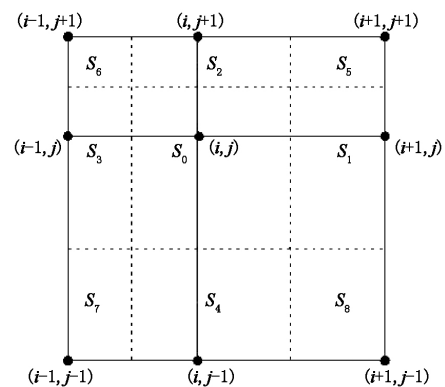


图5 非均匀网格限制算子面积率系数示例

当 $N_x = N_y$ 时,考虑 x 和 y 方向的点构造完全粗化插值算子(见图6):

$$\begin{aligned}
 I_{ij}^h \bar{r}_{ij} &= \bar{r}_{ij} = r_{2i,2j}, \\
 I_{ij}^h \bar{r}_{i,j} &= \frac{1}{L_x} (L_{rx} \bar{r}_{i-1,j} + L_{lx} \bar{r}_{i,j}) = r_{2i-1,j}, \\
 I_{ij}^h \bar{r}_{i,\bar{j}} &= \frac{1}{L_y} (L_{ry} \bar{r}_{i,\bar{j}-1} + L_{ly} \bar{r}_{i,\bar{j}}) = r_{i,2j-1}, \\
 I_{ij}^h \bar{r}_{i,\bar{j}} &= \frac{1}{S} (S_4 \bar{r}_{i-1,\bar{j}} + S_3 \bar{r}_{i,\bar{j}} + S_1 \bar{r}_{i-1,\bar{j}-1} + \\
 &\quad S_2 \bar{r}_{i,\bar{j}-1}) = r_{2i-1,2j-1}.
 \end{aligned}$$

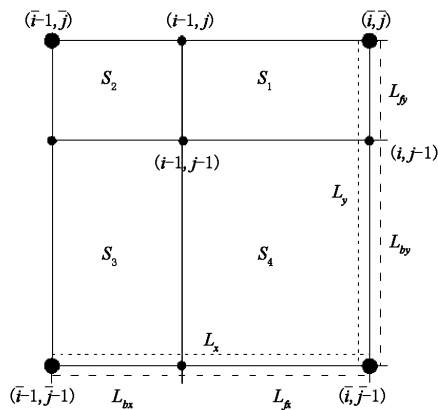


图6 非均匀网格插值算子面积率系数示例

3 数值算例

例1 考虑2维对流扩散方程^[1]:

$$-(u_{xx} + u_{yy}) + c(x, y)u_x + d(x, y)u_y = f(x, y),$$

其中 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $c(x, y) = \text{Re}x(x - 1)(1 - 2y)$, $d(x, y) = \text{Re}y(y - 1)(1 - 2x)$. 该方程的精确解为 $u(x, y) = e^{-\sigma(x-0.5)^2 - y^2}$.

该问题在 $x = 0.5$ 处有陡峭的边界层, 因此, 考虑 x 方向为主方向, 采用如下的伸缩函数生成非均匀网格:

$$x_i = \frac{i}{i_{\max}} + \frac{\lambda_x}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi i}{i_{\max}}\right), y_j = \frac{j}{j_{\max}} (\lambda_y = 0),$$

其中 λ_x ($-1 < \lambda_x < 1$) 为伸缩系数, 控制 x 方向网格的分布. 比如, 当 $-1 < \lambda_x < 0$ 时, 网格在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 附近分布密集, λ_x 越小, $x = 0$ 和 $x = 1$ 附近的网格点越密; 当 $0 < \lambda_x < 1$ 时, 网格在 $x = 0.5$ 附近分布密集, 且 λ_x 越大, $x = 0.5$ 附近的网格点越密. 当 $\lambda_x = 0$ 时, 得到物理区域上的均匀网格.

表1给出了当 $\sigma = 1 \times 10^3$ 时均匀网格和非均匀网格上的最大绝对误差、迭代次数和CPU时间比较. 从表1中可以看出, 非均匀网格上在从方向上网格数较少的情况下得到的结果比均匀网格从方向上网格大时还精确. 比如, 网格数为 256×32 的非均匀网格上计算结果比网格数为 256×256 的均匀网格上计算结果更精确. 同时, 在非均匀网格上计算迭代步数和CPU时间都基本与均匀网格上的保持一致. 因此, 在非均匀网格上采用部分半粗化方法能够在不增加计算消耗的情况下提高问题求解的精度.

表1 均匀和非均匀网格、迭代次数和CPU时间比较($\text{Re} = 1000, \sigma = 1 \times 10^3$)

网格数	均匀网格($\lambda_x = 0$)			非均匀网格($\lambda_x = 0.6$)		
	迭代次数	CPU	最大误差	迭代次数	CPU	最大误差
256 × 256	7	1.047	4.975(-5)	7	1.063	1.584(-6)
256 × 128	7	0.609	4.949(-5)	7	0.610	1.582(-6)
256 × 64	5	0.234	4.883(-5)	5	0.234	3.740(-6)
256 × 32	3	0.078	5.121(-5)	3	0.078	1.473(-5)
128 × 128	7	0.250	8.062(-4)	7	0.250	2.555(-5)
128 × 64	6	0.125	7.843(-4)	6	0.110	2.505(-5)
128 × 32	4	0.031	8.256(-4)	3	0.031	5.966(-5)
128 × 16	16	0.078	7.944(-4)	5	0.015	2.334(-4)
64 × 64	8	0.063	1.230(-2)	8	0.062	4.136(-4)
64 × 32	4	0.015	1.274(-2)	4	0.031	4.304(-4)
64 × 16	3	0	1.217(-2)	4	0.016	9.465(-4)
64 × 8	7	0	1.158(-2)	6	0.015	3.338(-3)
32 × 32	9	0.016	1.587(-1)	8	0.015	7.015(-3)
32 × 16	4	0	1.544(-1)	6	0	6.556(-3)
32 × 8	5	0	1.375(-1)	6	0	1.395(-3)

表2给出了当 $\sigma = 1 \times 10^4$ 时非均匀网格和均匀网格上计算误差、迭代步和CPU时间比较. 从2表中可以看出, 非均匀网格上的计算结果精度远远高于均匀网格. 对于 x 方向的网格数64和32来说, 由于边界层的存在, 结果在边界层附近变得非常陡峭, 均匀网格上的计算结果精度较差, 然而非均匀网格

上仍然能够得到较精确的结果. 从结果来看, 非均匀网格得到比均匀网格上更精确的结果且所需CPU时间仅为均匀网格上的1/8.

为了展示部分半粗化方法在整个区域上的求解精度和效率, 图7给出当网格数为 64×16 , $\sigma = 1 \times 10^5$ 时, 方程的精确解(见图7(b)), 均匀网格上的

数值解(见图 7(c)) 及非均匀网格上数值解(见图 7(d)) 的比较. 从图 7(a) 中可以看出非均匀网格在边界层附近分布了足够的网格, 因此, 其计算结果与精确解吻合的很好. 然而, 均匀网格上由于在边界层附近的网格数不足, 数值结果与精确解比较, 表现出了很大的计算误差.

表 2 均匀和非均匀网格最大误差、迭代次数和 CPU 时间比较($Re = 1\,000, \sigma = 1 \times 10^4$)

网格数	均匀网格($\lambda_x = 0$)			非均匀网格($\lambda_x = 0.8$)		
	迭代次数	CPU	最大误差	迭代次数	CPU	最大误差
256 × 256	7	1.016	1.551(-3)	8	1.187	3.433(-6)
256 × 128	7	0.594	1.547(-3)	7	0.610	3.412(-6)
256 × 64	5	0.234	1.606(-3)	5	0.219	3.544(-6)
256 × 32	3	0.078	1.655(-3)	3	0.078	1.459(-5)
128 × 128	7	0.250	2.201(-2)	7	0.250	5.540(-5)
128 × 64	6	0.125	2.245(-2)	6	0.125	5.734(-5)
128 × 32	3	0.031	2.328(-2)	3	0.046	6.037(-5)
128 × 16	5	0.015	2.334(-2)	3	0.016	2.314(-4)
64 × 64	8	0.063	5.619(+0)	8	0.078	9.628(-4)
64 × 32	5	0.031	5.626(+0)	4	0.031	1.008(-3)
64 × 16	4	0.015	5.634(+0)	4	0.015	9.983(-4)
64 × 8	9	0.016	5.235(+0)	5	0.016	3.334(-3)
32 × 32	9	0.016	6.336(+1)	10	0.016	1.992(-2)
32 × 16	6	0.015	6.337(+1)	6	0.015	1.760(-2)
32 × 8	7	0	5.948(+1)	6	0	1.833(-2)

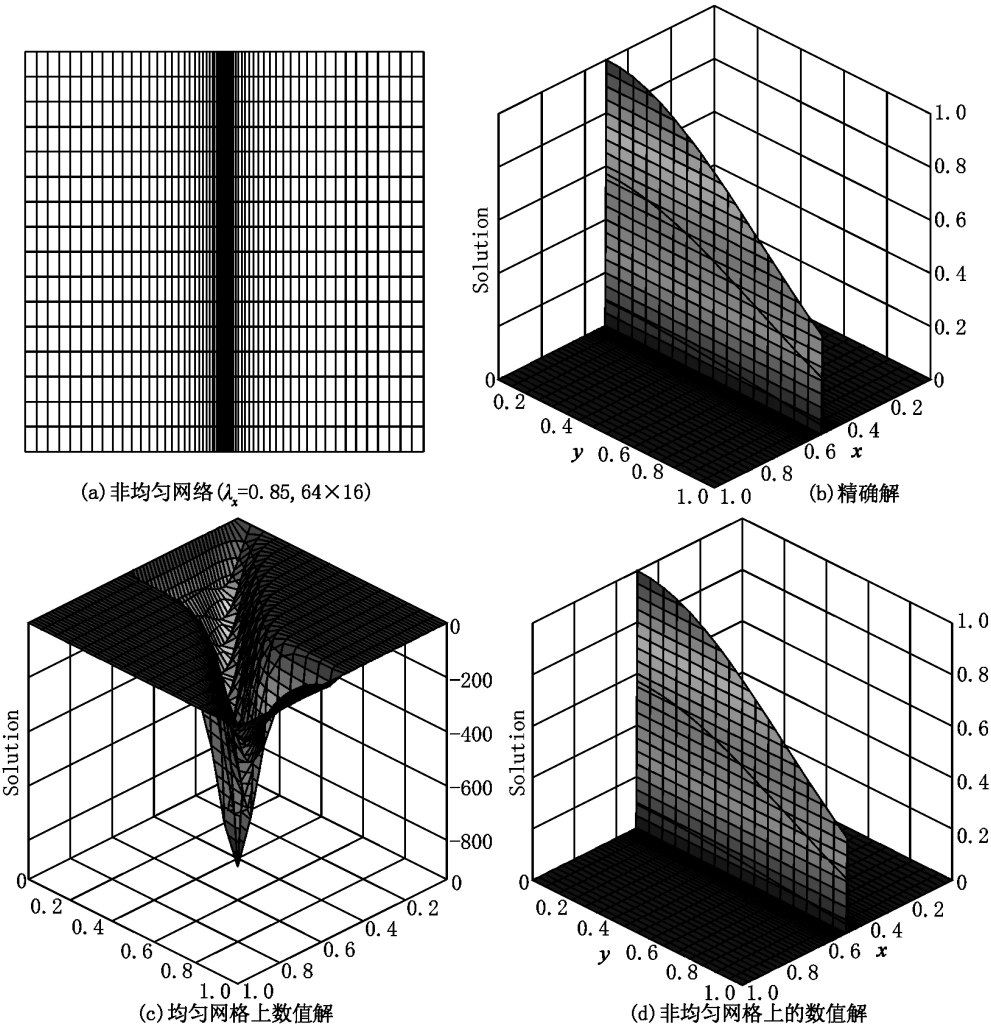


图 7 当 $\sigma = 1 \times 10^5, Re = 1\,000$ 时部分半粗化方法的精确解和数值解

4 结论

本文基于面积率公式构造了部分半粗化多重网格实施过程的插值算子和限制算子,并结合非均匀网格上的 HOC 格式与部分半粗化的多重网格方法对边界层 2 维对流扩散方程进行求解.部分半粗化的多重网格方法根据问题边界层所在的方向,允许不同方向上分布不同数目的网格,由于减少了无边界层方向的网格数,因此节约了计算量和计算时间.数值实验表明非均匀网格上的 HOC 格式和部分半粗化多重网格方法的结合对于带边界层的对流扩散方程的求解在精度和效率上表现出更大的优势.

5 参考文献

- [1] Kalita J C, Dass A K, Dalal D C. A transformation-free HOC scheme for steady convection-diffusion on non-uniform grids [J]. Int J Numer Meth Fluids, 2004, 44(1): 33-53.
- [2] Zhang Jun. Multigrid method and fourth-order compact scheme for 2D poisson equation with unequal grids size discretization [J]. J Comput Phys, 2002, 179(1): 170-179.
- [3] Tian Zhengfu, Dai Shiqiang. High-order compact exponential finite difference methods for convection-diffusion type problems [J]. J Comput Phys, 2007, 220(2): 952-974.
- [4] 曹莹, 孔令华, 王兰, 等. 3 维 Helmholtz 方程的 4 阶紧致有限差分格式 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2010, 34(6): 597-599.
- [5] 黄雪芳, 郭锐, 葛永斌. 一维非定常对流扩散方程非均匀网格上的高精度紧致差分格式 [J]. 工程数学学报, 2014(3): 371-380.
- [6] 袁冬芳, 曹富军, 石琳. 对流扩散方程非均匀网格上四阶紧致格式的预条件迭代法 [J]. 山西大学学报: 自然科学版, 2013(3): 379-388.
- [7] Wang Jie, Zhong Weijun, Zhang Jun. A general meshsize fourth-order compact difference discretization scheme for 3D poisson equation [J]. Appl Math Comput, 2006, 183(2): 804-812.
- [8] Ge Lixin, Zhang Jun. Accuracy, robustness and efficiency comparison in iterative computation of convection diffusion equation with boundary layers [J]. Numerical Methods of Partial Differential Eqs, 2000, 16(3): 379-394.
- [9] Ge Yongbin, Cao Fujun, Zhang Jun. A transformation-free HOC scheme and multigrid method for solving the 3D poisson equation on nonuniform grids [J]. J Comput Phys, 2013, 234(1): 199-216.
- [10] Ge Yongbin, Cao Fujun. Multigrid method based on the transformation-free HOC scheme on nonuniform grids for 2D convection diffusion problems [J]. J Comput Phys, 2011, 230(10): 4051-4070.
- [11] Ge Yongbin. Multigrid method and fourth-order compact difference discretization scheme with unequal meshsizes for 3D poisson equation [J]. J Comput Phys, 2010, 229(18): 6381-6391.

The Partial Semi-Coarse Multigrid Method on Nonuniform Grid for Convection Diffusion Problems

CAO Fu-jun^{1,2,3}, YUAN Dong-fang², GE Yong-bin⁴

- (1. School of Mathematical Science, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230000, China;
2. School of Mathematics, Physics and Biological Engineering, Inner Mongolia University of Science and Technology, Baotou, Inner Mongolia 014010, China; 3. National Key Laboratory of Science and Technology on Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China;
4. Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Ningxia University, Yinchuan Ningxia 750021, China)

Abstract: The two dimensional convection diffusion problems are solved by combining the HOC scheme on nonuniform grid with multigrid method in partial semi-coarse strategy. The projection operator and interpolation operator for partial semi-coarse multigrid method are reconstructed by area ratio. The numerical results show that for the boundary layer problems with boundary layer in only one direction, the partial semi-coarse mesh distribution strategy and corresponding multigrid method can greatly reduce the mesh number on the smooth solution direction. The multigrid method of partial semi-coarse strategy produces higher accuracy and costs less CPU time than that of full coarse mesh strategy.

Key words: nonuniform grid; HOC scheme; partial semi-coarse; multigrid; boundary layer convection diffusion

(责任编辑: 曾剑锋)