第 38 卷 第 4 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 4
2014 年 7 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2014

文章编号:1000-5862(2014)04-0409-04

一类带 Holling-IV 型反应函数的捕食-食饵模型的全局分岐

薛 盼,贾云锋*

(陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)

摘要:研究了一类带 Holling-IV 型反应函数的捕食-食饵模型在齐次 Neumann 边界条件下的平衡态解的存在性. 首先,通过谱分析法得到常数平衡解的稳定性结论;其次,在 1 维的情况下,利用局部分歧理论得出在常数解处可以产生局部分歧;最后,利用全局分歧理论证明该局部分歧可以延拓为全局分歧,其连通分支伸向无穷.

关键词:捕食-食饵模型;平衡解;Holling-IV 型;全局分歧

中图分类号:O 175.2 **文献标志码**:A

0 引言

近年来,在生态学研究中广泛采用反应扩散方程,通过建立生物数学模型分析和解决一些实际问题,这已成为生态学研究领域中热门的课题. 本文将考虑如下带 Holling-IV 反应函数的捕食-食饵系统:

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = ru\left(1 - \dfrac{u}{k}\right) - \dfrac{uv}{a + u^2}, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - d_2\Delta v = v\left(-b + \dfrac{cu}{a + u^2}\right), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) \geqslant 0, v(x,0) \geqslant 0, & x \in \Omega, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Δ 为 Lapalce 算子,Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中具有光滑边界的有界开区域,u,v 分别表示食饵和捕食者的种群密度. $d_1 \geqslant 0$,$d_2 \geqslant 0$ 为扩散系数,r,k,a,b,c 均为正常数,r,k 分别表示在没有捕食者的情况下食饵的固有生长率和生存能力,b 表示在缺少食饵的情况下捕食者的最大死亡率. 文献[1]提出功能反应函数 $p(u) = mu/(a + bu + u^2)$,被称作 Monod-Haldane 函数,在低浓度时,它与 Holling-II 类型功能反应函数类似,但在高浓度时,它表现出一种“抑制”效果. 文献[2]也使用上述的反应函数,并且把它称作 Holling-IV 反应函数;随后 W. Sokol 等[3]建议取 $p(u) = mu/(a + u^2)$,得到简化的 Monod-Haldane 或者 Holling-IV 反应函数. 他们发现该函数不仅更容易研究,而且更符合实验数据.

文献[4]利用度理论和分歧理论讨论了系统(1)正解的存在性及在常数平衡解处的分歧,文献[5]研究了系统(1)具有强耦合项时非常数正解的存在性和稳定性,文献[6]在齐次 Dirichlet 边界条件下,利用谱分析法和分歧理论研究了分歧解的存在性及稳定性,并且利用度理论讨论了正平衡态解的存在性和不存在性. 本文利用与文献[4]不同的方法讨论系统(1)平衡解的性质,即考虑椭圆:

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = ru\left(1 - \dfrac{u}{k}\right) - \dfrac{uv}{a + u^2}, & x \in \Omega, \\ -d_2\Delta v = v\left(-b + \dfrac{cu}{a + u^2}\right), & x \in \Omega, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

显然,系统(2)有平凡解(0,0),半平凡解$(k,0)$. 当满足下列条件时,系统(2)存在正常数平衡解:

(i) 若 $c^2 = 4ab^2$ 且 $k > c/(2b)$,则系统(2)存在唯一的常数平衡解(u_0,v_0),其中 $u_0 = c/(2b)$,$v_0 = r(1 - u_0/k)(a + u_0^2)$;

(ii) 若 $c^2 > 4ab^2$,则当 $u_1 < k \leqslant u_2$ 时,系统(2)有唯一常数平衡解(u_1,v_1),当 $k > u_2$ 时,系统(2)存在 2 个正常数平衡解(u_1,v_1),(u_2,v_2),其中

$u_1 = (c - \sqrt{c^2 - 4ab^2})/(2b)$,

收稿日期:2014-04-25

基金项目:国家自然科学基金(11271236),教育部“新世纪优秀人才支持计划”(NCET-12-0894)和中央高校基本科研业务费专项资金(GK201303008,GK201302025)资助项目.

通信作者:贾云锋(1972-),男,陕西洛南人,副教授,博士,主要从事偏微分方程的研究.

$v_1 = r(1 - u_1/k)(a + u_1^2) = \frac{cru_1}{b}(1 - u_1/k)$,

$u_2 = (c + \sqrt{c^2 - 4ab^2})/(2b)$,

$v_2 = r(1 - u_2/k)(a + u_2^2) = \frac{cru_2}{b}(1 - u_2/k)$.

1 主要结论

首先利用谱分析方法得到常数平衡解(u_1,v_1)的稳定性结论;其次,在1维的情况下,利用分歧理论得出在$(d_2^j,(u_1,v_1))$点可以产生局部分歧,最后,证明该局部分歧可以延拓为全局分歧,其连通分支Γ_j伸向无穷.

利用极大值原理和Harnack不等式易证定理1成立.

定理1[4] 设d是给定的正常数,若(u,v)是系统(2)的非负解,则存在正常数$C = C(a,b,c,k,r,d)$,使得当$d_2 > d$时,$\max\limits_{\bar\Omega} u(x) \leqslant k$,$\max\limits_{\bar\Omega} v(x) \leqslant C$.

下面在1维条件下考虑系统(2)非常数正解(u_1,v_1)的稳定性.

设$\Omega = (0,l)$. $-\Delta$在齐次Neumann边界条件下的特征值$\lambda_i = (\pi i/l)^2 (i \geqslant 0)$,且所有的特征值均为单重特征值. 相应的特征函数记作$\varphi_0(x) = 1/\sqrt{l}$,$\varphi_i = \sqrt{2/l}\cos(\pi i x/l)(i > 0)$,则所有的特征函数构成$L^2(0,l)$空间中的1组正规正交基. 令

$$f(u,v) = ru\left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{uv}{a + u^2},$$

$$g(u,v) = v\left(-b + \frac{cu}{a + u^2}\right),$$

通过计算可得

$$f_u(u_1,v_1) = u_1\left(-\frac{r}{k} + \frac{2u_1v_1}{(a + u_1^2)^2}\right) := \alpha,$$

$$f_v(u_1,v_1) = -\frac{u_1}{a + u_1^2} = -\frac{b}{c} := \beta < 0,$$

$$g_u(u_1,v_1) = \frac{r}{k}(k - u_1)\sqrt{c^2 - 4ab^2} := \gamma,$$

$$g_v(u_1,v_1) = \frac{cu_1}{a + u_1^2} - b := \theta = 0.$$

由于$r(1 - u_1/k) - v_1/(a + u_1^2) = 0$,且$-b + cu_1/(a + u_1^2) = 0$,因此,

$$\frac{\alpha}{u_1} = -\frac{r}{k} + \frac{2ru_1}{a + u_1^2}\left(1 - \frac{u_1}{k}\right) = -\frac{r}{k} + \frac{2br}{c}\left(1 - \frac{u_1}{k}\right) = \frac{r}{k}[-1 + 2b(k - u_1)/c] = \frac{r}{ck}[2b(k - u_1) - c] = \frac{r}{ck}[2(bk - c) + \sqrt{c^2 - 4ab^2}].$$

定理2 当$k \in (u_1,k^*)$,系统(2)的常数平衡解(u_1,v_1)是局部渐进稳定的;当$k \in (k^*,u_2)$时,常数平衡解(u_1,v_1)是不稳定的,其中

$$k^* = (2c - \sqrt{c^2 - 4ab^2})/2b.$$

证 设μ是线性化算子L的特征值,其中$L = \begin{bmatrix} d_1\Delta + \alpha & \beta \\ \gamma & d_2\Delta \end{bmatrix}$,相应的特征函数为$(\varphi,\psi)$,则有

$$(d_1\Delta\varphi + (\alpha - \mu)\varphi + \alpha\psi, d_2\Delta\psi + \gamma\varphi - \mu\psi) = (0,0).$$

将φ,ψ在L^2的1组基底下展开有

$$\varphi = \sum_{0 \leqslant i < \infty} a_i\varphi_i, \psi = \sum_{0 \leqslant i < \infty} b_i\varphi_i,$$

则

$$\sum_{0 \leqslant i < \infty} \boldsymbol{B}_i \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} \varphi_i = 0,$$

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} \alpha - d_1\lambda_i - \mu & \beta \\ \gamma & -d_2\lambda_i - \mu \end{bmatrix}.$$

易知,若μ是L的特征值,当且仅当对某些$i \geqslant 0$,系数矩阵$\boldsymbol{B}_i$退化,即

$$\mu^2 + P_i\mu + Q_i = 0,$$

其中$P_i = (d_1 + d_2)\lambda_i - \alpha$,$Q_i = -d_2\lambda_i(\alpha - d_1\lambda_i) - \alpha\gamma$. 当$k \in (u_1,k^*)$时,有$\alpha < 0$,由$\beta < 0$,$\gamma > 0$可得$P_i > 0$,$Q_i > 0$,因而有$\mathrm{Re}\,\mu < 0$,所以,常数平衡解$(u_1,v_1)$是局部渐进稳定的. 当$k \in (k^*,u_2]$时,$\alpha > 0$,$P_0 = -\alpha < 0$,则存在$\mathrm{Re}\mu > 0$,因此,常数平衡解$(u_1,v_1)$是不稳定的.

注1 若要$u_1 < k^* < u_2$,则需满足

$$4ab^2 < c^2 < \frac{16}{3}ab^2. \tag{3}$$

令$Y = L^2(0,l) \times L^2(0,l)$,$E = \{(u,v): u,v \in C^2(0,l), u_x,v_x = 0, x = 0,l\}$,则在$C^2$范数意义下$E$是Banach空间,定义$F:(0,\infty) \times E \to Y$为

$$F(d_2,U) = (d_1u'' + f(u,v), d_2v'' + g(u,v))^{\mathrm{T}},$$

其中$U = (u,v)$,$\forall d_2$都有$F(d_2,(u_1,v_1)) = 0$.

下面,在条件(3)成立的前提下,利用局部分歧理论[7-10]研究系统(2)非常数平衡解的存在性. 将d_2作为分歧参数,其他参数固定.

定理3 假设条件(3)成立,且$k \in (k^*,u_2]$并设j是满足$d_1\lambda_j < \alpha$的正整数,且对任意的正整数k,当$j \neq k$时,$d_2^j \neq d_2^k$,则$(d_2^j,(u_1,v_1))$是分歧点,$\exists \delta > 0$和1个C^1函数类$(d_2,(\varphi(s),\psi(s))):(-\delta,\delta) \to \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$,使得$d_2(0) = d_2^j$,$\varphi(0) = \psi(0) = 0$,当$|s| < \delta$时,$F(d_2,(u(s),v(s))) = 0$成立,其中$u(s) = u_1 + s(\varphi_j + \varphi(s))$,$v(s) = v_1 + s(b_j\varphi_j + \psi(s))$,$b_j = (d_1\lambda_j - \alpha)/\beta > 0$.

证　记 F 关于 U 的 Fréchet 导数为 $L_0 = D_U F(d_2^j,(u_1,v_1))$,$L_0$ 关于 d_2 的 Fréchet 导数为 $L_1 = D_{d_2} D_U F(d_2^j,(u_1,v_1))$,则直接计算可得

$$L_0 = \begin{bmatrix} d_1\Delta + \alpha & \beta \\ \gamma & d_2^j\Delta \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}.$$

1) 记 L_0 的核空间为 $N(L_0)$,值域空间为 $R(L_0)$. 类似于定理 2 的证明,将 $L_0 U = 0$ 展开有

$$\sum_{0\leqslant i<\infty} \boldsymbol{B}_i \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}\varphi_i = 0, \boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} \alpha - d_1\lambda_i & \beta \\ \gamma & -d_2^j\lambda_i \end{bmatrix}.$$

经过计算可知,当 $i \neq j$ 时,$\det\boldsymbol{B}_i \neq 0$,所以只有 $\det\boldsymbol{B}_j = 0$,故 $N(L_0) = \mathrm{span}\{U_0\}$,$U_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_j \end{bmatrix}\varphi_j$,$b_j = (d_1\lambda_j - \alpha)/\beta > 0$.

2) 记 L_0 的伴随算子为 L_0^*,则

$$L_0^* = \begin{bmatrix} d_1\Delta + \alpha & \gamma \\ \beta & d_2^j\Delta \end{bmatrix}.$$

类似于 1) 的方法,可得 $N(L_0^*) = \mathrm{span}\{U_0^*\}$,$U_0^* = \begin{bmatrix} 1 \\ b_j^* \end{bmatrix}\varphi_j$,$b_j^* = (d_1\lambda_j - \alpha)/\gamma < 0$.

因为 $R(L_0) = N(L_0^*)^{\perp}$,所以

$$\mathrm{codim} R(L_0) = \dim N(L_0^*) = 1.$$

3) 因为 $\langle L_1 U_0, U_0^* \rangle = -\lambda_j b_j b_j^* > 0$,所以 $L_1 U_0 \notin R(L_0)$.

由 1) ~ 3) 及局部分歧定理知定理 3 得证.

定理 4　在定理 3 的条件下,由 $(d_2^j,(u_1,v_1))$ 点产生的分歧,可以延拓为整体分歧,并且 Γ_j 在 $\mathbf{R} \times E$ 中伸向无穷.

证　令 $\bar{u} = u - u_1$,$\bar{v} = v - v_1$,则系统(2) 可改写为

$$\begin{cases} -d_1\bar{u}'' = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} + f_0(\bar{u},\bar{v}), \\ -d_2\bar{v}'' = \gamma\bar{u} + \theta\bar{v} + g_0(\bar{u},\bar{v}), \end{cases} \tag{4}$$

其中 $f_0(\bar{u},\bar{v})$,$g_0(\bar{u},\bar{v})$ 为含有 $\bar{u}$,$\bar{v}$ 的高次项部分. 令

$$G_1 = (-d_1\Delta + \alpha)^{-1}, G_2 = (-d_2\Delta + M)^{-1},$$

其中 M 为待定正常数,则系统(4) 变为

$$\bar{U} = K(d_2)\bar{U} + H(\bar{U}),$$

其中 $K(d_2)\bar{U} = (2\alpha G_1(\bar{u}) + \beta G_1(\bar{v}), \gamma G_2(\bar{u}) + M G_2(\bar{v}))$,$H(\bar{U}) = (G_1(\alpha(\bar{u},\bar{v})), G_2(\gamma(\bar{u},\bar{v})))$.

由定理 3 的证明过程可知,1 是 $K(d_2^j)$ 的特征值且代数重数为 1. 如果在 d_2^j 的 1 个足够小的领域内,$I - K(d_2): E \to E$ 是双射,且对固定的 d_2,$(0,0)$ 是 $I - K(d_2) - H$ 的孤立零点,则

$$\mathrm{index}(I - K(d_2) - H,(d_2,(0,0))) = \deg(I - K(d_2), B, 0) = (-1)^{\sigma},$$

其中 B 是以 $(0,0)$ 为球心半径足够小的球,σ 是算子 $K(d_2)$ 所有大于 1 的特征值的代数重数之和. 假设 μ 是 $K(d_2)$ 的 1 个特征值,其对应的特征函数为 $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$,则有

$$-\mu d_1\hat{\varphi}'' = (2-\mu)\alpha\hat{\varphi} + \beta\hat{\psi},$$
$$-\mu d_2\hat{\psi}'' = \gamma\hat{\varphi} + (1-\mu)M\hat{\psi}.$$

令 $\hat{\varphi} = \sum_{0\leqslant i<\infty} \hat{a}_i\varphi_i$,$\hat{\varphi} = \sum_{0\leqslant i<\infty} \hat{b}_i\varphi_i$,则有

$$\sum_{0\leqslant i<\infty} \hat{\boldsymbol{B}}_i \begin{bmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \end{bmatrix}\varphi_i = 0,$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}_i = \begin{bmatrix} (2-\mu)\alpha - \mu d_1\lambda_i & \beta \\ \gamma & (1-\mu)M - d_2\lambda_i \end{bmatrix}.$$

因而,$K(d_2)$ 的所有特征值满足方程:

$$\mu^2 - \left(\frac{2\alpha}{\alpha + d_1\lambda_i} + \frac{M}{M + d_2\lambda_i}\right)\mu + \frac{2\alpha M - \beta\gamma}{(\alpha + d_1\lambda_i)(M + d_2\lambda_i)} = 0. \tag{5}$$

当 $d_2 = d_2^j$ 时,如果 $\mu = 1$ 是(5) 式的 1 个根,则一定有 $d_2^j = d_2^i$,由已知条件可知 $j = i$. 当 $i \neq j$ 时,$\mu \neq 1$,即 $K(d_2)$ 的特征值大于 1 或者小于 1,则通过较小的扰动后仍然有相同的性质. 因此,对于所有 d_2^j 附近的 d_2,$K(d_2)$ 的特征值大于 1 的个数与 $K(d_2^j)$ 相同,且代数重数一致. 在(5) 式中,令 $i = j$,$\mu_1(d_2^j)$,$\mu_2(d_2^j)$ 是相应的 2 个根. 取 $M = \alpha d_2\lambda_j/(\alpha - d_1\lambda_j)$,把 M 代入(5) 式可得

$$\mu_1(d_2^j) = 1, \mu_2(d_2^j) = -\frac{\alpha^2 + d_1^2\lambda_j^2}{d_1\lambda_j(\alpha + d_1\lambda_j)} < 1.$$

对于 d_2^j 附近的 d_2 有 $\mu_2(d_2^j) < 1$. 对足够小的 $\varepsilon > 0$,$K(d_2^j + \varepsilon)$ 比 $K(d_2^j - \varepsilon)$ 多 1 个大于 1 的特征值,类似于定理 3,可得其代数重数为 1,所以

$$\mathrm{index}(I - K(d_2^j - \varepsilon) - H,(d_2^j - \varepsilon, 0)) \neq$$
$$\mathrm{index}(I - K(d_2^j + \varepsilon) - H,(d_2^j + \varepsilon, 0)).$$

由全局分歧理论知,在 $d_2 - (u,v)$ 平面内存在 1 个连通分支 Γ_j,使得下面两者之一成立:

(i) Γ_j 连接点 $(d_2^j,(u_1,v_1))$ 和 $(d_2^k,(u_1,v_1))$,其中 $k \neq j$;

(ii) Γ_j 在 $\mathbf{R} \times E$ 中伸向无穷.

下证(ii) 成立. 假设 Γ_j 是(i) 的情形. 设 Γ_j 连接到点 $(d_2^k,(u_1,v_1))$. 将系统(2) 限制在 $(0, l/k)$ 上,则系统(2) 变为

$$\begin{cases} -\Delta d_1 u = ru\left(1 - \dfrac{u}{k}\right) - \dfrac{uv}{a + u^2}, & x \in \left(0, \dfrac{l}{k}\right), \\ -\Delta d_2 v = v\left(-b + \dfrac{cu}{a + u^2}\right), & x \in \left(0, \dfrac{l}{k}\right), \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x \in \left(0, \dfrac{l}{k}\right). \end{cases} \tag{6}$$

若 $\bar{U}$ 是(6)式的解,则进行如下的延拓可以构造出(2)式的解.令 $x_n = nl/k, n = 0,1,\cdots,k$,

$$U(x) = \begin{cases} \bar{U}(x - x_{2n}), & x_{2n} \leqslant x \leqslant x_{2n+1}, \\ \bar{U}(x_{2n+2} - x), & x_{2n+1} \leqslant x_{2n+2}, \end{cases}$$

则在区间$(0,l/k)$内,$-\Delta$ 在 Neumann 边界条件下的特征值为 $\hat{\lambda}_i = (k\pi i/l)^2 (i \geqslant 0)$,均为单重特征值,对应的特征函数为 $\hat{\varphi}_0(x) = 1/\sqrt{l/k}, \hat{\varphi}_i(x) = \sqrt{2/(l/k)} \cdot \cos(\pi i x/(l/k))(i > 0)$.

易知,$\hat{\lambda}_i = \lambda_{ki}$.对于(6)式,$d_1\hat{\lambda}_1 = d_1\lambda_k < \alpha$,从而,$(d_2^i,(u_1,v_1))$ 是(6)式的分歧点,其中 $\hat{d}_2^i = \beta\gamma/[\hat{\lambda}_1(d_1\hat{\lambda}_1 - \alpha)]$.由$(\hat{d}_2^i,(u_1,v_1))$点产生的分歧也能延拓为整体分歧 $\hat{\Gamma}_j$,同样会有2种情形.假设 $\hat{\Gamma}_j$ 延伸到无穷,则按(6)式的延拓就成为系统(2)在点$(d_2^k,(u_1,v_1))$延拓的分歧,这与假设 Γ_j 有界矛盾.若 $\hat{\Gamma}_j$ 有界,假设连接到点$(\hat{d}_2^m,(u_1,v_1))(m > 1)$.由于 $\hat{d}_2^m = d_2^{mk}$,将 $\hat{\Gamma}_j$ 按(6)式延拓,类似于系统(2),由分歧点$(d_2^k,(u_1,v_1))$到$(d_2^{mk},(u_1,v_1))$,因为$mk > k$,这与 k 的选取矛盾.定理4得证.

2 参考文献

[1] Andrews J F. A mathematical model for the continuous culture of mocrooganisms utilizing inhabitory substrates [J]. Biotechnol Bioeng,1968,10(4):707-723.

[2] Collings J B. The effects of the functional response on the bifurcation behavior of a mite predator-prey interaction model [J]. J Math Biol,1997,36(1):149-168.

[3] Sokol W,Howell J A. Kinetics of phenol oxidation by washed cells [J]. Biotechnol Bioeng,1981,23(9):2039-2049.

[4] Pang P Y H,Wang Mingxin. Non-constant positive steady states of a predator-prey system with non-monotonic functional response and diffusion [J]. Proc London Math Soc,2004,88(3):135-157.

[5] Chen Xinfu,Qi Yuanwei,Wang Mingxin. A strongly coupled predator-prey system with non-monotonic functional response [J]. Nonlinear Anal,2007,67(6):1966-1979.

[6] Jia Yunfeng,Wu Jianhua,Nie Hua. The coexistence states of a predator-prey model with nonmonotonic functional response and diffusion [J]. Acta Appl Math,2009,108(2):413-428.

[7] Smoller J. Shockwaves and reaction-diffusion equations [M]. New York:Springer-Verlag,1983.

[8] 叶其孝,李正元.反应扩散方程引论[M].北京:科学技术出版社,1994.

[9] Jang J,Ni Weiming,Tang Moxun. Global bifurcation and structure of Turing patterns in the 1-D Lengyel-Epstein model [J]. J Dynam Differential Equations,2004,16(2):297-320.

[10] Ni Weiming,Tang Moxun. Turing patterns in the Lengyel-Epstein system for the CIMA reaction [J]. Trans Amer Math Soc,2005,357(10):3953-3969.

The Study on Global Bifurcation of a Predator-Prey Model with Holling-IV Functional Response

XUE Pan,JIA Yun-feng*

(College of Mathematics and Informatics,Shanxi Normal University,Xi'an Shanxi 710062,China)

Abstract: The existence of steady-state solutions of a predator-prey model with Holling-IV functional response is studied under homogeneous Neumann boundary condition. Firstly,by the spectral analysis method,the stability of the solution is obtained. Secondly,by means of local bifurcation theory,it is proved that the model bifurcations at the trivial solution in the one dimensional case. Finally,making use of global bifurcation theory,it is showed that the local bifurcation can be extend to global bifurcation,and the continuum joins up with infinity.

Key words: predator-prey model; steady-state solutions; Holling-IV; global bifurcation

(责任编辑:曾剑锋)