第 38 卷 第 4 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 38 No. 4
2014 年 7 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Jul. 2014

文章编号: 1000-5862(2014)04-0413-06

1 维非定常对流扩散方程的有理型高阶紧致差分格式

赵　飞,蔡志权,葛永斌*

(宁夏大学数学计算机学院,宁夏 银川　750021)

摘要: 针对 1 维非定常对流扩散方程,首先建立了 1 种 2 层有理型高阶紧致差分格式,其局部截断误差为 $O(h^4+\tau^2)$. 然后采用 von Neumann 分析方法证明了该格式是无条件稳定的. 由于在每个时间层上只涉及到 3 个网格点,因此可直接采用追赶法求解此差分方程. 最后通过 3 个数值算例验证了方法的精确性和可靠性. 数值结果表明: 所述格式不仅能够适用于非定常对流扩散问题,而且能够较好地求解非定常纯对流问题或纯扩散问题,并且其计算效果均优于 Crank-Nicolson(C-N) 格式和指数型高阶紧致(EHOC) 差分格式.

关键词: 非定常对流扩散方程; 有理型; 高阶紧致差分格式; 无条件稳定

中图分类号: O 241.82　　**文献标志码**: A

0　引言

在处理流体流动和传热、温度扩散、海水盐度及地下水污染物质的扩散等实际问题中,很多都可归结为求解对流扩散方程. 由于实际问题往往比较复杂,精确解很难求出,因此研究其精确、稳定和高效的数值方法具有十分重要的意义,有限差分方法是最常用的一种数值方法[1-13]. 针对 1 维非定常对流扩散方程,文献[1]构造了 1 种对角元严格占优的 Crank-Nicolson 差分格式,文献[2]提出了 1 种 Crank-Nicolson 特征差分格式,文献[3]提出了 1 种摄动有限差分方法,文献[4]建立了 1 类指数型交替显式方法. 遗憾的是这些方法在空间上的整体精度均不超过 2 阶. 近年来,已经发展了许多高阶紧致差分格式. 比如,文献[5]通过引入 1 个综合变换,将对流扩散方程变为纯扩散方程,然后利用求解扩散方程已有的 4 阶格式,最终得到了 1 种求解对流扩散方程的 2 层高阶紧致隐格式,文献[6]利用 4 阶精度的 3 次样条公式,提出了 1 种求解非线性对流扩散方程的 2 层紧致隐格式,文献[7]由定常对流扩散方程的 4 阶紧致格式出发,将时间导数项作为非齐次项处理,建立了求解 1 维非定常对流扩散方程的 1 种 2 层高阶紧致隐式差分格式,文献[8]给出了求解 1 维含源项非定常对流扩散方程的 1 种 3 层全隐格式,即可适用于线性又可适用于非线性对流扩散问题的求解,文献[9]基于 Hermite 插值多项式的构造思路,推导出了 1 维非定常对流扩散方程无条件稳定的指数型高精度紧致差分格式. 这些格式在空间上均具有 4 阶精度,时间上均具有 2 阶精度.

本文针对 1 维非定常对流扩散方程,结合已发展的求解非定常对流扩散方程的高阶紧致差分格式的基本思想,建立 1 种无条件稳定的有理型高阶紧致差分格式,给出格式的稳定性分析和证明,并通过数值算例验证本文方法的精确性和可靠性.

1　高阶紧致差分格式的建立

考虑如下 1 维非定常对流扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p\frac{\partial u}{\partial x}=0,b_1\leqslant x\leqslant b_2,t>0,\quad(1)$$

初始条件为 $u(x,0)=\varphi(x)$; 边界条件为 $u(b_1,t)=g_0(t)$, $u(b_2,t)=g_1(t)$. (1) 式中, a 为扩散项系数,

收稿日期: 2014-03-15

基金项目: 国家自然科学基金(11061025,11361045),霍英东教育基金会高等院校青年教师基金(121105) 和宁夏高等学校科学技术研究(NGY2013019) 资助项目.

通信作者: 葛永斌(1975-),男,宁夏青铜峡人,教授,博士,博士生导师,主要从事偏微分方程数值解和科学计算可视化的研究.

p 为对流项系数. 假设函数 $u(x,t)$ 在给定计算区域内足够光滑.

将空间求解区域 $[b_1,b_2]$ 进行网格剖分为 N 个子区间: $b_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b_2$,空间步长定义为 $h = (b_2 - b_1)/N$,用 τ 表示时间步长.

为了方便格式推导,首先考虑如下 1 维定常对流扩散方程:

$$-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p\frac{\partial u}{\partial x} = s(x), \tag{2}$$

a 和 p 为常数,u,s 均为 x 的函数,将点 u_{i+1} 和 u_{i-1} 在点 x_i 处利用泰勒级数展开,可得

$$u_{i+1} = u_i + h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i + \frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_i + O(h^6), \tag{3}$$

$$u_{i-1} = u_i - h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i - \frac{h^5}{120}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_i + O(h^6). \tag{4}$$

将(3) 式和(4) 式相减,整理后可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + O(h^4), \tag{5}$$

将(3) 式和(4) 式相加,整理后可得

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i + O(h^4). \tag{6}$$

由此定义空间 1 阶导数和 2 阶导数的中心差分算子为

$$\delta_x u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \tag{7}$$

$$\delta_x^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}. \tag{8}$$

将(5) 式与(6) 式代入(2) 式,并利用关于 u 的 1 阶导数和 2 阶导数的定义,可得

$$-a\delta_x^2 u_i + p\delta_x u_i - \frac{ph^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \frac{ah^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i = s_i + O(h^4). \tag{9}$$

为了得到高精度的差分格式,将(9) 式中的 3 阶导数项和 4 阶导数项进行处理,为此对原方程(2) 关于 x 求导数,整理可得

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{p}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial s}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{p}{a}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \tag{11}$$

将(10) 式代入(11) 式,整理可得

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left(\frac{p}{a}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \tag{12}$$

将(10) 式和(12) 式代入(9) 式,并利用(7) 式和(8) 式对 u 的 1 阶导数和 2 阶导数进行离散,整理可得

$$-\left(a + \frac{p^2h^2}{12a^2}\right)\delta_x^2 u_i + p\delta_x u_i = \left(1 - \frac{ph^2}{12a}\delta_x + \frac{h^2}{12}\delta_x^2\right)s_i + O(h^4). \tag{13}$$

事实上,(13) 式即是求解 1 维定常对流扩散方程的多项式型高阶紧致差分格式[10-12]. 然而,文献[13] 指出了此格式不能用于求解高雷诺数问题和纯对流问题. 为此,把(2) 式代入(12) 式,整理可得

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left(\frac{p}{a}\right)^3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{p^2}{a^3}s - \frac{p}{a^2}\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \tag{14}$$

为了得到求解 1 维定常对流扩散方程的有理型高阶紧致差分格式,对(9) 式做如下处理. 首先,将(10) 式和(14) 式代入(9) 式,整理可得

$$-a\delta_x^2 u_i + p\delta_x u_i - \frac{p^2h^2}{6a}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{p^3h^2}{12a^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \left(1 + \frac{p^2h^2}{12a^2}\right)s_i - \frac{ph^2}{12a}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)_i + O(h^4). \tag{15}$$

接着,将(5) 式和(6) 式代入(15) 式,并利用(7) 式和(8) 式对 u 的 1 阶导数和 2 阶导数进行离散,整理可得

$$-a\left(1 - \frac{p^2h^2}{12a^2}\right)\delta_x^2 u_i + p\left(1 - \frac{p^2h^2}{6a^2}\right)\delta_x u_i - \frac{p^2h^4}{144a}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i + \frac{p^3h^4}{36a^2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i = \left(1 - \frac{p^2h^2}{6a^2}\right)s_i - \frac{ph^2}{12a}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)_i + O(h^4). \tag{16}$$

再将(10) 式和(12) 式代入(16) 式,并利用(5) 式和(6) 式代替 u 的 1 阶导数项和 2 阶导数项,用(7) 式和(8) 式对 u 的 1 阶导数和 2 阶导数进行离散,整理可得

$$-a\left(1 - \frac{p^2h^2}{12a^2} + \frac{p^4h^4}{144a^4}\right)\delta_x^2 u_i + p\left(1 - \frac{p^2h^2}{6a^2} + \frac{p^4h^4}{36a^4}\right)\cdot\delta_x u_i + \frac{p^4h^6}{1\,728a^3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i - \frac{p^5h^6}{216a^4}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i = \left(1 - \frac{p^2h^2}{6a^2} + \frac{p^4h^4}{36a^4}\right)s_i - \frac{ph^2}{12a}\left(1 - \frac{p^2h^2}{4a^2}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{12}\left(1 - \frac{p^2h^2}{12a^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)_i + O(h^4). \tag{17}$$

然后,对(2) 式关于 x 求 2 次导数,代入(17) 式消去 $(\partial^3 u/\partial x^3)_i$ 项,整理可得

$$-a\left(1 - \frac{p^2h^2}{12a^2} + \frac{p^4h^4}{144a^2}\right)\delta_x^2 u_i + p\left(1 - \frac{p^2h^2}{6a^2} + \frac{p^4h^4}{36a^4}\right)\delta_x u_i - \frac{7p^4h^6}{1\,728a^3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i = \left(1 - \frac{p^2h^2}{6a^2} + \frac{p^4h^4}{36a^4}\right)s_i -$$

$$\frac{ph^2}{12a}\left(1-\frac{p^2h^2}{4a^2}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_i+\frac{h^2}{12}\left(1-\frac{p^2h^2}{12a^2}+\frac{p^4h^4}{18a^4}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)_i+O(h^4). \tag{18}$$

最后，将(18)式中 s 的 1 阶导数项和 2 阶导数项用中心差分近似，略去 4 阶导数项，化简整理可得(2)式的高阶紧致差分格式为

$$(1+\alpha_1\delta_x+\alpha_2\delta_x^2)^{-1}(-\alpha\delta_x^2+p\delta_x)u_i=s_i. \tag{19}$$

令 $L=1+\alpha_1\delta_x+\alpha_2\delta_x^2$，$A=-\alpha\delta_x^2+p\delta_x$，

$$\alpha=a\cdot\frac{1-\dfrac{p^2h^2}{12a^2}+\dfrac{p^4h^4}{144a^4}}{1-\dfrac{p^2h^2}{6a^2}+\dfrac{p^4h^4}{36a^4}},\quad \alpha_1=\begin{cases}\dfrac{a-\alpha}{p}, & p\neq 0,\\ 0, & p=0,\end{cases}$$

$$\alpha_2=\begin{cases}\dfrac{a(a-\alpha)}{p^2}+\dfrac{h^2}{6}, & p\neq 0,\\ \dfrac{h^2}{12}, & p=0.\end{cases} \tag{20}$$

用 $-(\partial u/\partial t)_i$ 代替(19)式中的 s_i，并且考虑方程在 $n+1/2$ 时刻的值，则(19)式可以写为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{n+1/2}=-L^{-1}Au_i^{n+1/2}. \tag{21}$$

对(21)式中的时间导数项利用中心差分，空间项中的 $u_i^{n+1/2}$ 以第 $n+1$ 层和第 n 层的算术平均值代替，略去高阶项，化简整理，则可以得到 1 维非定常对流扩散方程的有理型高阶紧致差分格式：

$$\left(L+\frac{\tau}{2}A\right)u_i^{n+1}=\left(L-\frac{\tau}{2}A\right)u_i^n. \tag{22}$$

从推导过程可知，此格式的计算精度为 $O(h^4)+O(\tau^2)$，即此格式在空间上具有 4 阶精度，时间上具有 2 阶精度.

2　稳定性分析

下面采用 von Neumann 方法分析上述格式的稳定性. 将数值解表示为 Fourier 级数的展开形式，其特征项为

$$u_i^n=\eta^n\exp(\mathrm{i}\theta_i), \tag{23}$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，η^n 是第 n 时刻的振幅，$\theta=\sigma h$ 是空间方向的相位角度，σ 是空间方向的波数.

将(23)式代入(22)式得放大因子为

$$G(\theta)=\frac{\eta^{n+1}}{\eta^n}=\frac{(\xi_1-\xi_2)+I(\xi_3-\xi_4)}{(\xi_1+\xi_2)+I(\xi_3+\xi_4)},$$

其中，$\xi_1=1-(4\alpha_2/h^2)\sin^2(\theta/2)$，$\xi_2=(2\alpha\tau/h^2)\cdot\sin^2(\theta/2)$，$\xi_3=(\alpha_1/h)\sin\theta$，$\xi_4=[p\tau/(2h)]\sin\theta$，$\sin^2(\theta/2)\in[0,1]$. 所以

$$|G(\theta)|^2-1=\frac{(\xi_1-\xi_2)^2+(\xi_3-\xi_4)^2}{(\xi_1+\xi_2)^2+(\xi_3+\xi_4)^2}-1=\frac{-4(\xi_1\xi_2+\xi_3\xi_4)}{(\xi_1+\xi_2)^2+(\xi_3+\xi_4)^2}.$$

1）当 $p=0$，$a>0$ 时，由(20)式可知，$\alpha=a$，$\alpha_1=0$，$\alpha_2=h^2/12$，所以

$$\xi_1\xi_2+\xi_3\xi_4=\frac{2\alpha\tau}{h^2}\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}\geqslant 0,$$

故 $|G(\theta)|^2-1\leqslant 0$，即针对非定常纯扩散方程，本文格式是无条件稳定的.

同理可证，2）当 $p\neq 0$，$a>0$ 时，3）当 $p\neq 0$，$a=0$ 时，都有 $|G(\theta)|^2-1\leqslant 0$，即针对非定常对流扩散方程和非定常纯对流方程，本文格式均是无条件稳定的.

3　数值算例

为了验证本文格式的精确性和可靠性，对 3 个有精确解的非定常纯扩散问题、非定常对流扩散问题及非定常纯对流问题进行数值实验，并与 Crank-Nicolson(C-N)格式和指数型高阶紧致(EHOC)格式[8]的计算结果进行比较. 针对非定常纯扩散问题，本文格式与 EHOC 格式是同一格式，因此对于该问题，只给出了本文格式的计算结果. 另外，需要说明的是，指数型高阶紧致(EHOC)格式不能被用于求解非定常纯对流问题.

例 1　非定常纯扩散问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<1,\ t>0,\\ u(x,0)=\sin(\pi x), & u(0,t)=u(1,t)=0,\end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$.

对于例 1，表 1 给出了当 $\tau=h^2$，$T=1$ 时，C-N 格式与本文格式在不同空间步长下的最大绝对误差、2 范数误差和收敛阶. 从计算结果可以看出，本文格式在空间上具有 4 阶精度，而 C-N 格式只有 2 阶精度，并且随着空间步长的减小，本文格式的计算误差要比 C-N 格式减小得更快. 表 2 给出当 $T=0.2$ 时，针对不同的网格比 $r(\tau=rh^2)$，采用 C-N 格式与本文格式计算的时间推进步数、最大绝对误差和 2 范数误差. 可以看出，2 种格式均是无条件稳定的. 当取相同的 τ 和 h 时，本文格式的计算结果明显优于 C-N 格式；当取相同的 h 时，本文格式的计算误差随着 τ 的减小而减小，而 C-N 格式的计算误差随着 τ 的减小而增大.

表 1 当 $\tau=h^2$,$T=1$ 时,C-N 格式和本文格式的最大绝对误差、2 范数误差及收敛阶

h	C-N 格式			本文格式		
	L_∞ 误差	L_2 误差	收敛阶	L_∞ 误差	L_2 误差	收敛阶
1/5	1.100(-5)	8.176(-6)		5.758(-6)	4.281(-6)	
1/10	3.921(-6)	2.773(-6)	1.560	3.926(-7)	2.776(-7)	3.947
1/20	1.033(-6)	7.306(-7)	1.924	2.460(-8)	1.739(-8)	3.997
1/40	2.614(-7)	1.848(-7)	1.983	1.538(-9)	1.087(-9)	4.000
1/80	6.554(-8)	4.634(-8)	1.996	9.611(-11)	6.796(-11)	4.000
1/160	1.640(-8)	1.159(-8)	2.000	6.007(-12)	4.247(-12)	4.000
1/320	4.100(-9)	2.900(-9)	1.999	3.750(-13)	2.652(-13)	4.002
1/640	1.025(-9)	7.248(-10)	2.001	2.167(-14)	1.532(-14)	4.114

表 2 当 $T=0.2$ 时,C-N 格式和本文格式的推进步数、最大绝对误差及 2 范数误差

h	τ	r	推进步数	L_∞ 误差		L_2 误差	
				C-N 格式	本文格式	C-N 格式	本文格式
$\frac{1}{16}$	0.012 500 00	3.2	16	5.356(-4)	3.464(-4)	3.787(-4)	2.450(-4)
	0.006 250 00	1.6	32	7.959(-4)	8.527(-5)	5.628(-4)	6.029(-5)
	0.003 125 00	0.8	64	8.609(-4)	2.004(-5)	6.088(-4)	1.417(-5)
$\frac{1}{32}$	0.006 250 00	6.4	32	1.334(-4)	8.686(-5)	9.436(-5)	6.142(-5)
	0.003 125 00	3.2	64	1.986(-4)	2.163(-5)	1.404(-4)	1.530(-5)
	0.001 562 05	1.6	128	2.149(-4)	5.328(-6)	1.520(-4)	3.767(-6)
$\frac{1}{64}$	0.003 125 00	12.8	64	3.333(-5)	2.173(-5)	2.357(-5)	1.537(-5)
	0.001 562 50	6.4	128	4.963(-5)	5.428(-6)	3.510(-5)	3.838(-6)
	0.000 781 25	3.2	256	5.371(-5)	1.352(-6)	3.798(-5)	9.559(-7)

例 2 非定常对流扩散问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, 0<x<2, t>0, \\ u(x,0)=\exp\left[-\dfrac{(x-0.5)^2}{a}\right], \\ u(0,t)=(4t+1)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\dfrac{(-pt-0.5)^2}{a(4t+1)}\right], \\ u(2,t)=(4t+1)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\dfrac{(2-pt-0.5)^2}{a(4t+1)}\right], \end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x,t)=(4t+1)^{-\frac{1}{2}}\exp[-(x-pt-0.5)^2/a(4t+1)]$.

对于例 2,表 3 给出了当 $a=0.01$ 时,对不同的 p、T、τ 和 h,C-N 格式、EHOC 格式[9] 及本文格式数值结果的最大绝对误差和 2 范数误差. 可以看出,对于给定的 p、T、τ 和 h,本文格式的计算误差要比 C-N 格式或 EHOC 格式更小. 这充分表明了,针对 1 维非定常对流扩散问题,本文格式比 C-N 格式和 EHOC 格式具有更好的计算效果.

表 3 C-N 格式、EHOC 格式及本文格式的最大绝对误差和 2 范数误差

格式	L_∞ 误差	L_2 误差
(a) $p=1$, $T=1.25$, $\tau=6.25\times10^{-4}$, $N=31$		
C-N 格式	9.540(-2)	5.062(-2)
EHOC 格式	1.395(-2)	6.322(-3)
本文格式	3.506(-3)	1.549(-3)
(b) $p=10$, $T=1.25\times10^{-1}$, $\tau=6.25\times10^{-5}$, $N=51$		
C-N 格式	3.433(-1)	1.526(-1)
EHOC 格式	7.904(-2)	3.091(-2)
本文格式	2.002(-2)	7.131(-3)

表 3(续)

格式	L_∞ 误差	L_2 误差
(c) $p = 100, T = 1.25\times10^{-2}, \tau = 6.25\times10^{-6}, N = 81$		
C-N 格式	3.370(−1)	1.284(−1)
EHOC 格式[3]	6.096(−2)	2.026(−2)
本文格式	8.722(−3)	2.830(−3)
(d) $p = 1\,000, T = 1.25\times10^{-3}, \tau = 6.25\times10^{-7}, N = 101$		
C-N 格式	2.756(−1)	9.784(−2)
EHOC 格式	3.932(−2)	1.263(−2)
本文格式	3.973(−3)	1.305(−3)

例 3　非定常纯对流问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, 0<x<2, t>0,\\ u(x,0)=\sin(\pi x), u(0,t)=u(2,t),\end{cases}$$

该问题的精确解为 $u(x,t)=\sin[\pi(x-t)]$.

对于例3,表4给出了当 $\tau=h^2, T=1$ 时,C-N格式与本文格式在不同空间步长下的最大绝对误差、2范数误差和收敛阶. 计算结果表明,本文格式在空间上具有4阶精度,而C-N格式只有2阶精度,并且在相同空间步长下,本文格式的计算效果明显优于C-N格式. 表5给出了当 $T=0.2$ 时,针对不同的网格比 $r(\tau=rh^2)$,计算的推进步数、最大绝对误差和2范数误差比较. 可以看出,2种格式均是无条件稳定的.

表 4　当 $\tau = h^2, T = 1$ 时,C-N 格式与本文格式的最大绝对误差、2 范数误差及收敛阶

h	C-N 格式			本文格式		
	L_∞ 误差	L_2 误差	收敛阶	L_∞ 误差	L_2 误差	收敛阶
1/5	7.604(−1)	7.363(−1)		1.807(−1)	1.310(−1)	
1/10	2.881(−1)	1.916(−1)	1.942	1.197(−2)	7.639(−3)	4.100
1/20	9.315(−2)	4.860(−2)	1.979	8.224(−4)	4.791(−4)	3.995
1/40	2.488(−2)	1.215(−2)	2.000	5.280(−5)	2.991(−5)	4.002
1/80	6.359(−3)	3.037(−3)	2.000	3.328(−6)	1.869(−6)	4.001
1/160	1.604(−3)	7.592(−4)	2.000	2.087(−7)	1.168(−7)	4.001
1/320	4.024(−4)	1.898(−4)	2.000	1.306(−8)	7.300(−9)	4.000
1/640	1.008(−4)	4.745(−5)	2.000	8.165(−10)	4.568(−10)	4.000

表 5　当 $\tau = rh^2, T = 0.2$ 时,C-N 格式与本文格式的推进步数、最大绝对误差及 2 范数误差

h	τ	r	推进步数	L_∞ 误差		L_2 误差	
				C-N 格式	本文格式	C-N 格式	本文格式
$\frac{1}{16}$	0.012 500 00	3.2	16	1.588(−2)	1.944(−4)	1.509(−2)	1.661(−4)
	0.006 250 00	1.6	32	1.583(−2)	1.233(−4)	1.504(−2)	1.053(−4)
	0.003 125 00	0.8	64	1.581(−2)	1.055(−4)	1.502(−2)	9.008(−5)
$\frac{1}{32}$	0.006 250 00	6.4	32	5.122(−3)	3.666(−5)	3.891(−3)	2.586(−5)
	0.003 125 00	3.2	64	5.103(−3)	1.481(−5)	3.877(−3)	1.044(−5)
	0.001 562 50	1.6	128	5.099(−3)	9.345(−5)	3.873(−3)	6.591(−6)
$\frac{1}{64}$	0.003 125 00	12.8	64	1.502(−3)	8.237(−6)	9.813(−4)	5.486(−6)
	0.001 562 50	6.4	128	1.496(−3)	2.433(−6)	9.776(−4)	1.620(−6)
	0.000 781 25	3.2	256	1.495(−3)	9.815(−7)	9.767(−4)	6.537(−7)

4 结论

本文建立了 1 种求解 1 维非定常对流扩散方程的有理型高阶紧致差分格式,其空间具有 4 阶精度、时间具有 2 阶精度,并且采用 von Neumann 分析方法证明了该格式针对非定常纯扩散方程、非定常对流扩散方程及非定常纯对流方程均是无条件稳定的. 最后通过数值实验,并与 C-N 格式和 EHOC 格式的计算结果进行比较,充分验证了本文方法的精确性和可靠性.

5 参考文献

[1] 刘扬. 对流扩散方程的新型 Crank-Nicholson 差分格式[J]. 数学杂志,2005,25(4):463-467.

[2] 王同科. 一维对流扩散方程 Crank-Nicolson 特征差分格式[J]. 应用数学,2001,14(4):55-60.

[3] Gao Zhi. An infinite-order accurate upwind compact difference scheme for the convective-diffusion equati-on[C]// Proceeding of Asia Workshop on computational Fluid Dynamics. Chengdu: Sichuan University Press,1994: 18-24.

[4] 蔡国洋,田敏,冯秀芳. 一类求解变系数对流扩散方程的指数型显式方法[J]. 宁夏大学学报: 自然科学版,2013,34(1):1-3.

[5] 杨志峰,陈国谦. 含源项非定常对流扩散问题紧致四阶差分格式[J]. 科学通报,1993,38(2):113-116.

[6] 林建国,许维德,陶尧森. 含源项非定常非线性对流扩散方程的三次样条四阶差分格式[J]. 水动力学研究与进展: A 辑,1994,9(2):599-602.

[7] Spotz W F,Carey G F. Extension of high-order compact schemes to time-dependent problems[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations,2001,17(2):657-672.

[8] 葛永斌,田振夫,吴文权. 含源项非定常对流扩散方程的高精度紧致隐式差分方法[J]. 水动力学研究与进展: A 辑,2006,21(5):619-625.

[9] 田振夫. 一维对流扩散方程的四阶精度有限差分方法[J]. 宁夏大学学报: 自然科学版,1995,16(1):32-35.

[10] Karaa S,Zhang Jun. High order ADI method for solving unsteady convection-diffusion problems[J]. Journal of Computational Physics,2004,198(1):1-9.

[11] MacKinnon R J,Johnson R M. Differential equation based representation of truncation errors for accurate numerical simulation[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids,1991,13(6):739-757.

[12] Spotz W F,Carey G F. High-order compact scheme for the steady stream-function vorticity equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,1995,38(3):3497-3512.

[13] You D. A High order Padé ADI method for unsteady convection-diffusion equations[J]. Journal of Computational Physics,2006,214(1):1-11.

A Rational High-Order Compact Difference Scheme for the 1D Unsteady Convection-Diffusion Equation

ZHAO Fei,CAI Zhi-quan,GE Yong-bin*

(School of Mathematics and Computer Science,Ningxia University,Yinchuan Ningxia 750021,China)

Abstract: A two-level rational high-order compact difference scheme for solving the 1D unsteady convection-diffusion equation is proposed. The local truncation error of the scheme is $O(h^4+\tau^2)$. It is proved that is unconditionally stable by von Neumann analysis method. Because only three points are used at each time level,this difference scheme can be solved by the method of forward elimination and backward substitution. Finally,numerical experiments for three test examples are carried out to demonstrate the accuracy and the effectiveness of the present method. It is found that the present method is not only easy to be implemented to solve the 1D unsteady convection-diffusion problems,but also can be used to solve the unsteady pure convection problems or the pure diffusion problems. And the computed results are better than Crank-Nicolson (C-N) scheme and the exponential high-order compact (EHOC) difference scheme.

Key words: unsteady convection-diffusion equation; rational type; high-order compact difference scheme; unconditionally stable

(责任编辑: 曾剑锋)