第38卷 第4期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 4
2014年7月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2014

文章编号:1000-5862(2014)04-0419-05

一类 Markov-Feller 算子不变测度的存在性与唯一性

郭新伟,吕延芳,齐海涛

(山东大学(威海)数学与统计学院,山东 威海 264209)

摘要: 讨论了完备可分距离空间上一类 Markov-Feller 算子的遍历性质,给出了存在不变测度的充分必要条件以及唯一不变测度的充分条件,研究了此类算子轨道的稠密性质.

关键词: Markov-Feller 算子; 不变测度; 唯一不变测度

中图分类号: O 177.99 **文献标志码:** A

0 引言

Markov 算子的遍历理论尤其是点态遍历定理的研究绝大多数都是考虑存在不变测度这一基本假设条件下展开的,因此 Markov 算子不变测度的存在性与唯一性一直是 Markov 过程的遍历理论研究的一个基本且重要的问题之一,它是进一步作渐近分析的基础. 对于由紧空间上连续变换导出的 Markov-Feller 算子,文献[1]证明了此类算子存在唯一不变测度的充分必要条件,文献[2-4]分别利用 Riesz 表示定理和广义 Farkas 引理给出了局部紧的可分距离空间上的 Markov-Feller 算子存在不变测度的充分必要条件,文献[5]基于概率论中测度列的紧性概念,研究了完备可分距离空间上一类特殊的 Markov 算子即非扩张的 Markov-Feller 算子的渐近稳定性,文献[6]利用概率论中的鞅论方法证明了具有唯一不变测度的非扩张 Markov 算子轨道的稠密性质. 对于比非扩张 Markov 算子更为一般的算子,如具有等度连续的对偶算子的 Markov-Feller 算子以及渐近强 Feller 算子,文献[7-8]分别给出了此类算子存在唯一不变测度的充分条件,此外文献[8]给出了该条件在随机2维 Navier-Stokes 方程中的应用.

本文将继续上述问题的研究,其主要目的是给出完备可分距离空间上具有等度连续的对偶算子的 Markov-Feller 算子存在不变测度以及唯一不变测度的条件,推广和改进了文献[6-7,9]的主要结果.

1 定义及其记号

设 (X,ρ) 是1个完备可分的距离空间,对任何 X 的子集 A 以及 $\varepsilon>0$,用 $\rho(y,A)$ 表示 y 到 A 的距离,$A^{\varepsilon}=\{y\in X:\rho(y,A)<\varepsilon\}$,$\chi_A$ 表示 A 上的特征函数.

$\mathrm{B}(X)$ 表示 X 的 Borel σ-代数,$(M_{sig}(X),\|\cdot\|_{TV})$ 表示 (X,ρ) 上的有限实值 Borel 符号测度全体组成的 Banach 空间,其范数 $\|\cdot\|_{TV}$ 为通常的全变差范数. $M(X)$ 和 $M_1(X)$ 分别表示 (X,ρ) 上的有限实值 Borel 测度以及概率测度全体组成的 $M_{sig}(X)$ 的子空间. 对 $\mu\in M(X)$,supp[μ]表示 μ 的拓扑子集[9].$(B_b(X),\|\cdot\|_{\infty})$ 表示 X 上的有界可测函数全体组成的 Banach 空间,其范数 $\|\cdot\|_{\infty}$ 为通常的上确界范数. $C_b(X)$ 表示 X 上的有界连续函数全体组成的 $B_b(X)$ 的子空间. 给定算子 $P:M(X)\to M(X)$. 若 T 满足下列2个条件:

(i) $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}^+$ 以及 $\mu_1,\mu_2\in M(X)$,
$$P(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)=\lambda_1P\mu_1+\lambda_2P\mu_2;$$
(ii) $\forall\mu\in M(X)$,$\|P\mu\|_{TV}=\|\mu\|_{TV}$,即
$$P(\mu(X))=\mu(X),$$
则称 P 为 Markov 算子.

由符号测度的 Jordan 分解定理,$M_{sig}(X)=\{\mu_1-\mu_2:\mu_1,\mu_2\in M(X)\}$,因此,对每个 $\gamma\in M_{sig}(X)$,$\gamma=\mu_1-\mu_2$,令 $P\gamma=P\mu_1-P\mu_2$. 易证 P 是 $M_{sig}(X)$ 上的有界线性算子,且 $\|P\|\leqslant 1$. 因此,每个 Markov 算子都可以线性延拓到符号测度空间 $M_{sig}(X)$ 上.

$\forall f\in B_b(X)$,$\mu\in M_{sig}(X)$,记
$$\langle f,\mu\rangle=\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

对 Markov 算子 P,若存在线性算子 $U:B_b(X)\to B_b(X)$,使得 $\forall f\in B_b(X)$,$\mu\in M(X)$,$\langle f,P\mu\rangle=\langle Uf,\mu\rangle$,称 U 为 Markov 算子 P 的对偶算子. 若

收稿日期:2014-04-21

基金项目:国家自然科学基金(111022102)资助项目.

作者简介:郭新伟(1963-),男,江西南昌人,教授,博士,主要从事泛函分析理论的研究.

$U(C_b(X))\subset C_b(X)$,则称 P 为 Markov-Feller 算子(或 Feller 算子),(U,P) 为 Markov-Feller 偶[10].

给定1个映射 $\pi: X\times \mathrm{B}(X)\to \mathbf{R}$,若 π 满足下列条件:

(ⅰ)对任意给定的 $x\in X$,定义集映射 μ_x: $\mathrm{B}(X)\to \mathbf{R}$,$\mu_x(A)=\pi(x,A)$,$\forall A\in \mathrm{B}(X)$,其中 μ_x 是 (X,ρ) 上的 Borel 测度概率测度;

(ⅱ)对任意给定的 $A\in \mathrm{B}(X)$,定义函数 g_A: $X\to \mathbf{R}$,$g_A(x)=\pi(x,A)$,$\forall x\in X$,其中 g_A 是 (X,ρ) 上的 Borel 可测函数,

则称 π 是 (X,ρ)(或 X)上的1个转移概率或转移函数[7,11].

设 π 是 X 上的1个转移概率. 定义线性算子 P: $M(X)\to M(X)$ 以及 $U: B_b(X)\to B_b(X)$,

$$P(\mu(A))=\int_X \pi(x,A)\,\mathrm{d}\mu(x),\ \forall A\in \mathrm{B}(X),\mu\in M(X),$$

$$U(f(x))=\int_X f(y)\,\mathrm{d}\pi(x,\mathrm{d}y),\ \forall f\in B_b(X),$$

易证 (U,P) 是 Markov 偶,称 (U,P) 是由转移 π 定义的 Markov 偶. 若 P 为 Markov-Feller 算子,此时称 π 是 X 上的1个 Feller 转移函数.

设 $B_L(X)$ 表示 X 上的有界 Lipschitz 函数全体,对于 $f\in B_L(X)$,令 $\|f\|_L$ 表示 f 的(全局)Lipschitz 常数,即 $\|f\|_L=\sup\limits_{x\neq y}|f(x)-f(y)|/\rho(x,y)$,在 $B_L(X)$ 上定义范数 $\|\cdot\|_{B_L}$:

$$\|f\|_{B_L}=\|f\|_L+\|f\|_\infty,\ f\in B_L(X),$$

由文献[12]知,$(B_L(X),\|\cdot\|_{B_L})$ 是1个 Banach 空间.

由文献[13]知,在 $M_{sig}(X)$ 上可赋予范数 $\|\cdot\|$,即对 $\mu\in M_{sig}(X)$,

$$\|\mu\|=\sup\{|\langle f,\mu\rangle|: \|f\|_{B_L}\leqslant 1\}.$$

此外,在 $M_{sig}(X)$ 上也可以赋予下列 Fortet-Mourier 范数 $\|\cdot\|_F$[6]:

$$\|\mu\|_F=\sup\{|\langle f,\mu\rangle|: \|f\|_\infty\leqslant 1,\|f\|_{B_L}\leqslant 1\},$$

注意范数 $\|\cdot\|$ 和 Fortet-Mourier 范数是等价的.

给定测度序列 $\{\mu_n\}\subset M(X)$ 以及1个测度 $\mu\subset M(X)$,若 $\forall f\in C_b(X)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\langle f,\mu_n\rangle=\langle f,\mu\rangle$,则称 $\{\mu_n\}$ 弱收敛于 μ.

实际上测度列的弱收敛即为 $\{\mu_n\}(\subset M(X)\subset C_b^*(X))$ 按对偶空间 $C_b^*(X)$ 上的弱 * 拓扑收敛于 μ.

关于测度的弱收敛,有下列结果.

定理1[14] 测度序列 $\{\mu_n\}$ 弱收敛于 μ 的充分必要条件为 $\{\mu_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 μ,即

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu_n-\mu\|=0.$$

设 P 为 Markov-Feller 算子,$A\in \mathrm{B}(X)$,使得 $U(\chi_A(x))=\chi_A(x)$,则称 A 是 P 的不变集. 设 $\mu\in M_1(X)$,若 $P\mu=\mu$,则称 μ 是关于 P 不变的概率测度. 若 μ 是关于 P 不变的概率测度,且对 P 的任一不变集 A,$\mu(A)=0$ 或 $\mu(A)=1$,则称 μ 是关于 P 遍历的概率测度. 若 P 存在唯一的不变概率测度,则称 P 是唯一遍历的.

设 $A\in \mathrm{B}(X)$,若对 P 的任一不变的概率测度 μ,$\mu(A)=1$,则称 A 是极大概率集.

对每个 $f\in B_L(X)$,若函数列 $\{U^n f\}$ 限制在 X 中的每个紧集上是等度连续的,则称 U 是等度连续的. 易证 U 是等度连续的充分必要条件是函数列 $\{U^n f\}$ 在 X 中的每一点都是等度连续的[10-11].

关于 Markov 算子的遍历理论,可参见文献[10-11,14].

2 不变概率测度的存在性与唯一性

除非另有说明,以下均假设 (X,ρ) 是完备的可分距离空间,(U,P) 是 Markov-Feller 偶,且 U 是等度连续的. 令

$$A_n(U)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U^i,\ A_n(P)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P^i\ (n\in \mathbf{N}).$$

定义下列集合:

$\Delta_t=\{\mu\in M_1(X):$ 测度列 $\{A_n(P)\mu\}$ 是紧性测度列$\}$,$\Gamma_t=\{x\in X: \delta_x\in \Delta_t\}$;

$\Delta_c=\{\mu\in M_1(X):$ 测度列 $\{A_n(P)\mu\}$ 弱收敛$\}$,$\Gamma_c=\{x\in X: \delta_x\in \Delta_c\}$.

对 $x\in \Gamma_c$,则测度列 $\{A_n(P)\delta_x\}$ 弱收敛于某个不变概率测度,记为 ε_x.

在 Γ_c 上定义1个等价关系'~':对 $x,y\in \Gamma_c$,$x\sim y\Leftrightarrow \varepsilon_x=\varepsilon_y$.

若 $x\in \Gamma_c$,用 $[x]$ 表示 x 所在的等价类,$\Gamma_{te}=\{x\in \Gamma_c: \varepsilon_x([x])=1\}$.

首先需要下列结果,其证明参见文献[15].

引理1 $\Delta_t=\Delta_c$,$\Gamma_t=\Gamma_c$.

引理2 (i) Γ_{te} 是闭的极大概率集,且是 P-不变集;(ii) 对每个 $x\in \Gamma_{te}$,$[x]$ 是闭集.

引理3 μ 是 P 的遍历概率测度的充分必要条件是 $\exists x\in \Gamma_{te}$,使得 $\mu([x])=1$,且在此种情形下,$\mu=\varepsilon_x$.

此外,关于等度连续性,有下列结果.

引理4 U 是等度连续的充分必要条件是 P 限制在 $(M_1(X),\|\cdot\|)$ 上是等度连续的.

证 充分性 若 P 限制在 $(M_1(X),\|\cdot\|)$ 上是等度连续的,从而对任意给定的 $x\in X$,T 在点 $\delta_x\in M_1(X)$ 是等度连续的,所以任给的 $\varepsilon>0$,$\exists \delta_1>0$,当 $\|\mu-\delta_x\|<\delta_1(\mu\in M_1(X))$ 时,$\forall n\in \mathbf{N}$,

$$\|P^n\mu-P^n\delta_x\|<\varepsilon. \tag{1}$$

作映射 $\delta:(X,\rho)\to(M_1(X),\|\cdot\|)$,$\delta(y)=\delta_y$,$\forall y\in X$,则 δ 是连续的. 因此,$\exists\delta_2>0$,当 $\|y-x\|<\delta_2(y\in X)$,$\|\delta_y-\delta_x\|<\delta_1$.

由(1)式知,$\forall n\in\mathbf{N}$,

$$\|P^n\delta_y-P^n\delta_x\|<\varepsilon. \tag{2}$$

由范数 $\|\cdot\|$ 的定义和(2)式知,对任一 $g\in B_L(X)$,$\|g\|_{B_L}\leqslant 1$ 以及 $\forall n\in\mathbf{N}$,

$$|U^ng(y)-U^ng(x)|=|\langle U^ng,\delta_y-\delta_x\rangle|=$$
$$|\langle f,P^n\delta_y-P^n\delta_x\rangle|\leqslant\|P^n\delta_y-P^n\delta_x\|<\varepsilon.$$

从而对任一 $g\in B_L(X)$,$\|g\|_{B_L}\leqslant 1$,$\{U^ng\}$ 是等度连续的,由此可得:对任一 $f\in B_L(X)$,$\{U^nf\}$ 是等度连续的,即 U 是等度连续的.

必要性　若 U 是等度连续的,假设 P 限制在 $M_1(X)$ 上不是等度连续的,从而存在某个 $\mu_0\in M_1(X)$,使得$\{P^n\}$在 μ_0 处不是等度连续的,则存在某个 $\varepsilon_0>0$ 及子列$\{r_n\}$,以及 $\mu_n\in M_1(X)$,

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu_n-\mu_0\|=0, \tag{3}$$

$$\|P^{r_n}\mu_n-P^{r_n}\mu_0\|\geqslant\varepsilon_0. \tag{4}$$

对任一 $g\in B_L(X)$,$\|g\|_{B_L}\leqslant 1$,$\{U^ng\}$ 是一致有界且等度连续的函数列,由文献[13]及(3)式得

$$\lim_{n\to\infty}\langle U^{r_n}g,\mu_n-\mu_0\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle g,P^{r_n}\mu_n-P^{r_n}\mu_0\rangle=0. \tag{5}$$

由(5)式和定理 1 知,$\lim_{n\to\infty}\|P^{r_n}\mu_n-P^{r_n}\mu_0\|=0$,与(4)式矛盾. 因此,$T$ 限制在 $M_1(X)$ 上是等度连续的.

定理2　设(X,ρ)是完备的可分距离空间,P 是 X 上 Markov-Feller 算子,若 P 有等度连续的对偶算子 U,则下列条件等价:

(i) 存在 P 的不变概率测度;

(ii) $\exists z\in X$ 和 $x\in X$,使得对 z 的任一开邻域 $B(z,\delta)(\delta>0)$,

$$\liminf_{n\to\infty}A_n(P)\delta_x(B(z,\delta))>0;$$

(iii) $\exists z\in X$ 以及概率测度 $\lambda\in M_1(X)$,使得对 z 的任一开邻域 $B(z,\delta)(\delta>0)$,

$$\limsup_{n\to\infty}A_n(P)\lambda(B(z,\delta))>0.$$

证　(i)⇒(ii)　若存在 P 的不变概率测度,从而由遍历分解定理知,存在 P 的遍历测度[15]. 记 μ 为 P 的遍历测度. 由引理 3 知,$\exists x\in\Gamma_{te}$,使得 $\mu=\varepsilon_x$. 取 $z\in\mathrm{supp}[\mu]$,由 ε_x 的定义,$\lim_{n\to\infty}A_n(P)\delta_x=\varepsilon_x$. 由 Portmanteau 定理知,对 z 的任一开邻域 $B(z,\delta)$,

$$\liminf_{n\to\infty}A_n(P)\delta_x(B(z,\delta))\geqslant\varepsilon_x(B(z,\delta))=$$
$$\mu(B(z,\delta))>0.$$

(ii)⇒(iii)　取 $\lambda=\delta_x$.

(iii)⇒(i)　假设 $z\notin\Gamma_c=\Gamma_t$,由文献[7,16]知,对某个 $0<\varepsilon_0<1/2$,存在子列$\{t_n\}$以及 X 中的紧集列$\{K_n\}$,$K_n^{\varepsilon_0/3}\cap K_m^{\varepsilon_0/3}=\varnothing(n\neq m,n,m\in\mathbf{N})$,

$$A_{t_n}(P)\delta_z(K_n^{\varepsilon_0})>2\varepsilon_0,n\in\mathbf{N}. \tag{6}$$

由引理 4,P 限制在$(M_1(X),\|\cdot\|)$上是等度连续的,因此,$\exists\delta_0>0$,使得对任一 $y\in B(z,\delta_0)$,

$$\|A_n(P)\delta_y-A_n(P)\delta_z\|<\frac{1}{1+3/\varepsilon_0}\cdot\frac{\varepsilon_0}{2},n\in\mathbf{N}. \tag{7}$$

令 $g_n(x)=0\vee(1-\varepsilon_0\rho(x,K_n)/3)$,则 $\chi_{K_n}\leqslant g_n\leqslant\chi_{K_n^{\varepsilon_0}}$,$\|g_n\|_{B_L}\leqslant 1+\varepsilon_0/3$. 从而由(6)式和(7)式,对任一 $y\in B(z,\delta_0)$,

$$A_{t_n}(P)\delta_y(K_n^{\varepsilon_0/3})\geqslant\langle A_{t_n}(P)\delta_y,g_n\rangle\geqslant\langle A_{t_n}(P)\delta_z,g_n\rangle-$$
$$|\langle A_{t_n}(P)\delta_y-A_{t_n}(P)\delta_z,g_n\rangle|>\varepsilon_0/2. \tag{8}$$

由定理 2 的(iii)知 $\limsup_{n\to\infty}A_n(P)\lambda(B(z,\delta_0))>0$,令 $\limsup_{n\to\infty}A_n(P)\lambda(B(z,\delta_0))=2\alpha$,从而存在子列$\{r_n\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty}A_{r_n}(P)\lambda(B(z,\delta_0))>\alpha. \tag{9}$$

对任一 $n\in\mathbf{N}$,由(8)式得

$$T^nA_{t_n}(T)\lambda(K_n^{\varepsilon_0/3})=\int_X A_{t_n}(T)\delta_y(K_n^{\varepsilon_0/3})\,\mathrm{d}T^n\lambda(y)\geqslant$$
$$\int_{B(z,\delta_0)}A_{t_n}(T)\delta_y(K_n^{\varepsilon_0/3})\,\mathrm{d}T^n\lambda(y)\geqslant$$
$$\frac{\varepsilon_0}{2}T^n\lambda(B(z,\delta_0)). \tag{10}$$

由于

$$A_{r_k}(P)(A_{t_n}(P))\lambda-A_{r_k}(P)\lambda=\frac{1}{r_kt_n}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant r_k\\1\leqslant j\leqslant t_n}}P^{i+j}\lambda-$$
$$\frac{1}{r_k}\sum_{1\leqslant i\leqslant r_k}P^i\lambda=\frac{1}{r_kt_n}\sum_{i=1}^{t_n}\sum_{j=1}^{i}(T^{r_k+j}\lambda-T^j\lambda),$$

所以

$$\|A_{r_k}(P)(A_{t_n}(P))\lambda-A_{r_k}(P)\lambda\|_{TV}=$$
$$\left\|\frac{1}{r_kt_n}\sum_{i=1}^{t_n}\sum_{j=1}^{i}(P^{r_k+j}\lambda-P^j\lambda)\right\|_{TV}\leqslant\frac{t_n+1}{r_k},$$
$$\lim_{k\to\infty}\|A_{r_k}(P)(A_{t_n}(P))\lambda-A_{r_k}(P)\lambda\|_{TV}=0.$$

由上式得

$$\liminf_{k\to\infty}A_{r_k}(P)\lambda(K_n^{\varepsilon_0/3})=$$
$$\liminf_{k\to\infty}A_{r_k}(P)(A_{t_n}(P))\lambda(K_n^{\varepsilon_0/3}), \tag{11}$$

从而由(9)式和(10)式得

$$\liminf_{k\to\infty}A_{r_k}(P)(A_{t_n}(P))\lambda(K_n^{\varepsilon_0/3})\geqslant$$
$$\frac{\varepsilon_0}{2}\liminf_{k\to\infty}A_{r_k}(P)\lambda(B(z,\delta_0))\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}\alpha. \tag{12}$$

由于 $n\neq m$,$K_n^{\varepsilon_0/3}\cap K_m^{\varepsilon_0/3}=\varnothing(n,m\in\mathbf{N})$,由(11)式和(12)式得,对任一 $m\in\mathbf{N}$,

$$\liminf_{k\to\infty}A_{r_k}(P)\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{m}K_n^{\varepsilon_0/3}\Big)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}m\alpha.$$

上式不可能对一切的 $m\in\mathbf{N}$ 成立,与假设 $z\notin$

$\Gamma_c = \Gamma_t$ 矛盾. 从而 $z \in \Gamma_c = \Gamma_t$. 由 Γ_c 的定义,φ_z 是 T 的不变概率测度.

注意在定理 2 的(iii)$\Rightarrow$(i)证明过程中仅用到了对每个 $f \in B_L(X)$,$\{U^n f\}$ 在点 z 的等度连续性即 $\{T^n \delta_x\}$ 在点 z 的等度连续性,从而证明了

推论 1 设(X,ρ)是完备的可分距离空间,(U,P)是 Markov-Feller 偶. 若 $\exists z \in X$,使得$\{U^n f\}$在点 z 是等度连续的,则存在 P 的不变概率测度的充分必要条件是下列条件之一成立:

(i) $\exists x \in X$,使得对 z 的任一开邻域 $B(z,\delta)$ $(\delta > 0)$,$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n(P)\delta_x(B(z,\delta)) > 0$;

(ii) 存在 1 个概率测度 $\lambda \in M_1(X)$,使得对 z 的任一开邻域 $B(z,\delta)$ $(\delta > 0)$,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n(P)\lambda(B(z,\delta)) > 0.$$

特别地,若 $\lambda = \delta_x$,推论 1 就是文献[2]的命题 2.1. 因此,推论 1 将文献[2]的命题 2.1 中的特殊单点测度推广为一般的概率测度以及上极限改进为下极限.

下面讨论 Markov-Feller 的不变测度的唯一性. 为此需要下列定义[7].

设 $P: M(X) \to M(X)$ 是 1 个 Markov 算子,若对任一 $x,y \in X$,$\exists n_0 \in \mathbf{N}$,使得

$$\mathrm{supp}\{P^{n_0}\delta_{z_1}\} \cap \mathrm{supp}\{P^{n_0}\delta_{z_2}\} \neq \varnothing,$$

则称 T 有相交支集.

关于 Markov-Feller 的不变测度的唯一性,有下列结果.

定理 3 设(X,ρ)是完备的可分距离空间,P 是 X 上 Markov-Feller 算子,且 P 有等度连续的对偶算子 U. 若对任一 $x,y \in X$,$\exists z \in X$,使得对每个 $\delta > 0$,$\exists n_1, n_2 \in \mathbf{N}$,使得

$$P^{n_1}\delta_x(B(z,\delta)) > 0, P^{n_2}\delta_y(B(z,\delta)) > 0,$$

则 P 至多有 1 个不变概率测度.

证 若 P 至少有 2 个不变概率测度,则 P 至少有 2 个遍历的概率测度 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$,此处 $x,y \in \Gamma_{te}$ 且 $x \neq y$,由已知条件得 $\exists z \in X$,使得对每个 $\delta > 0$,$\exists n_1, n_2 \in \mathbf{N}$,使 $P^{n_1}\delta_x(B(z,\delta)) > 0$,$P^{n_2}\delta_y(B(z,\delta)) > 0$,从而

$$z \in \mathrm{supp}\{T^{n_1}\delta_x\}, z \in \mathrm{supp}\{T^{n_2}\delta_y\}, \quad (13)$$

由于 $x,y \in \Gamma_{te}$ 且 $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y$,所以

$$[x] \cap [y] = \varnothing, \quad (14)$$

而 $\varepsilon_x[x] = 1$,$\varepsilon_y[y] = 1$ 且 $[x]$ 和 $[y]$ 为闭集,所以

$$\mathrm{supp}\{\varepsilon_x\} \subset [x], \mathrm{supp}\{\varepsilon_y\} \subset [y].$$

显然 $\mathrm{supp}\{\delta_x\} \subset \mathrm{supp}\{\varepsilon_x\} \subset [x]$,$\mathrm{supp}\{\delta_y\} \subset \mathrm{supp}\{\varepsilon_y\} \subset [y]$,由文献[10]得

$$\mathrm{supp}\{P^{n_1}\delta_x\} \subset \mathrm{supp}\{P^{n_1}\varepsilon_x\} = \mathrm{supp}\{\varepsilon_x\} \subset [x],$$

$$\mathrm{supp}\{P^{n_1}\delta_x\} \subset \mathrm{supp}\{P^{n_2}\varphi_y\} = \mathrm{supp}\{\varepsilon_y\} \subset [y], \quad (15)$$

从而结合(13)式和(15)式得

$$z \in \mathrm{supp}\{T^{n_1}\delta_x\} \cap \mathrm{supp}\{T^{n_2}\delta_y\} \subset [x] \cap [y] = \varnothing.$$

与(14)式矛盾. 因此,P 至多有 1 个不变概率测度.

特别地,在定理 3 中,若 $n_1 = n_2$,则推得到下列结果.

推论 2 设(X,ρ)是完备的可分距离空间,P 是 X 上 Markov-Feller 算子,且 P 有等度连续的对偶算子 U;若 P 有相交支集,则 P 至多有 1 个不变概率测度.

设(U,P)是由转移函数 π 定义的 Markov-Feller 算子偶,由文献[17]知,对任一 $\mu \in M_1(X)$,存在 1 个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},Prob)$以及 Markov 链 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$,使得

$$Prob(x_0 \in A) = \mu(A),$$

$$Prob(x_{n+1} \in A \mid x_n = x) = \pi(x,A),$$

称 Markov 链 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 为对应于 P 的 Markov 链 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$.

关于具有等度连续的 Markov-Feller 算子的轨道性质,有下列结果.

定理 4 设(U,P)是由转移函数 π 定义的 Markov-Feller 偶且 U 是等度连续的. 假设 P 存在遍历的不变概率测度 μ. 令 $A_* = \mathrm{supp}[\mu]$,$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 是对应于 P 的 Markov 链. 若 $Prob(x_0 \in A_*) = 1$,则 $Prob(\overline{\{x_0,x_1,\cdots\}} = A_*) = 1$.

证 因为 μ 是 T 的遍历测度,所以由引理 3 知,$\exists x \in \Gamma_{te}$,使得 $\mu([x]) = 1$,且 $\mu = \varepsilon_x$. 由于 $A_* = \mathrm{supp}[\mu]$,而 $[x]$ 为闭集,所以 $A_* \subset [x]$. 对任一 $y \in A_* \subset [x]$,则 $x \sim y$. 由定义知,

$$\mu = \lim_{n\to\infty} A_n(P)\delta_y = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P^i\delta_y = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^i\delta_y.$$

对 A_* 中任一开集 U,由 Portmanteau 定理得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i\delta_y(U) \geqslant \mu(U) > 0,$$

从而对任一 $y \in A_*$,$\sum\limits_{i=0}^{\infty} P^i\delta_y(U) > 0$.

$$\text{因此},\mu(y: \sum_{i=0}^{\infty} P^i\delta_y(U) > 0) = \mu(A_*) = 1.$$

由于

$$Prob(\{x_0,x_1,\cdots\} \in U) = \int_{A_*} Prob(\{x_0,x_1,\cdots\} \in U \mid x_0 = y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{A_*} Prob(\{x_0,x_1,\cdots\} \in U \mid x_0 =$$

$y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{A_*} \mu(y: \sum_{i=0}^{\infty} P^i\delta_y(U) > 0)\,\mathrm{d}\mu(y) = 1.$

因此，$Prob(\overline{\{x_0, x_1, \cdots\}} = A_*) = 1.$

若满足下列条件：

$\| T\mu_1 - T\mu_2 \|_F \leqslant \| \mu_1 - \mu_2 \|_F, \forall \mu_1, \mu_2 \in M(X)$，则称 T 是非扩张的.

推论 3　设 P 是非扩张的 Markov-Feller 算子. 假设 P 存在唯一不变的概率测度 μ. 令 $A_* = \mathrm{supp}[\mu]$，$\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 是对应于 P 的 Markov 链. 若 $Prob(x_0 \in A_*) = 1$，则 $Prob(\overline{\{x_0, x_1, \cdots\}} = A_*) = 1.$

证　若 P 是非扩张的，因此，对任一 $n \in \mathbf{N}$，

$$\| T^n\mu_1 - T^n\mu_2 \|_F \leqslant \| \mu_1 - \mu_2 \|_F. \tag{16}$$

由于 $M(X)$ 上的范数 $\|\cdot\|_F$ 和 $\|\cdot\|$ 是等价的，从而由(16)式知 P 是等度连续的. 因此，由引理 4 知，U 是等度连续的.

又因为 μ 是 T 的唯一不变的概率测度，从而 μ 是遍历的. 由定理 4 知，$Prob(\overline{\{x_0, x_1, \cdots\}} = A_*) = 1.$

推论 3 即是文献[6]中的定理 3.2. 因此，定理 4 是对文献[6]中定理 3.2 的改进和加强，并且与文献[6]所用的鞅定理的证明方法不同.

3　参考文献

[1] Walters P. An introduction to Ergodic theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003: 146-153.

[2] 王明文. 一类 Markov 过程不变测度的存在性及应用[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 1991, 15(4): 306-312.

[3] Lasserre J B. Invariant probabilities for Markov chains on a metric space[J]. Stat Probab Lett, 1997, 34(3): 259-265.

[4] Lasserre J B. Existence and uniqueness of an invariant probability for a class of Feller-Markov chains[J]. Theoret Probab, 1996, 9(3): 595-612.

[5] Szarek T. The stability of Markov operators on Polish spaces[J]. Stud Math, 2000, 143(2): 145-152.

[6] Lasto A, Myjak J, Szarek T. Markov operators with a unique invariant measure[J]. J Math Anal App, 2002, 276(1): 343-356.

[7] Szarek T. The uniqueness of invariant measures for Markov operators[J]. Stud Math, 2008, 189(3): 225-233.

[8] Hairer M, Mattingly J. Ergodicity of the 2D Navier-Stokes equations with degenerate stochastic foring[J]. Ana Math, 2006, 164(3): 992-1032.

[9] Szarek T. Feller processes on nonlocally compact spaces[J]. The Annals of Probability, 2006, 34(5): 1849-1863.

[10] Zaharopol R. Invariant probabilities of Markov-Feller operators and their supports[M]. Basel: Birkhǎuser-Verlag, 2005.

[11] Lemma O H, Lasserre J B. Markov chain and invariant probabilities[M]. Basel: Birkǎuser-Verlag, 2003.

[12] Weaver N. Lipschitz algebras[M]. New York: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1999.

[13] Dudley R M. Real analysis and probability[M]. Beijing: China Machine Press, 2006.

[14] Fougel S R. The Erdodic theory of Markov processes[M]. New York: Vas Nostrand Reihold Co, 1969.

[15] 郭新伟，喻建华，齐海涛. 一类 Markov 的遍历性[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37(2): 183-186.

[16] Ethier S N, Kurtz T G. Markov process characterization and convergence[M]. New York: John Wiley & Sons, 1983.

[17] Meyn S P, Tweedie R L. Markovchains and stochastic stability[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

The Existence and Uniqueness of Invariant Probability Measures for a Class of Markov-Feller Operators

GUO Xin-wei, LYU Yan-fang, QI Hao-tao

(School of Mathematics and Statics, Shandong University at Weihai, Weihai Shandong 264209, China)

Abstract: The ergodic property of the Markov-Feller operators on complete separable spaces is discussed. The existence and uniqueness of invariant probability measures for the Markov-Feller operators with equicontinuous dual operators is given. In addition, the dense trajectories for the operators is studied.

Key words: Markov-Feller operators; invariant measures; unique invariant measures

(责任编辑：曾剑锋)