

文章编号: 1000-5862(2014)05-0459-05

# 基于模拟退火的万有引力算法

王立平<sup>1</sup>, 肖乐意<sup>2</sup>

(1. 萍乡学院, 江西 萍乡 337000; 2. 长沙师范学院教务处, 湖南 长沙 410100)

**摘要:** 针对标准万有引力算法的个体位置更新策略可能对个体造成破坏且算法局部搜索能力较弱问题提出了一种改进算法. 该算法将模拟退火思想引入万有引力算法, 采用基于 Metropolis 准则的个体位置更新策略, 并在引力操作之后, 对每代最优个体进行退火操作. 一定程度避免了个体移动的盲目性, 提高了算法的局部搜索能力、收敛速度与精度. 实验结果表明: 算法的改进策略是有效的, 且改进后的算法在收敛速度、收敛精度等方面具有明显优势.

**关键词:** 万有引力算法; 模拟退火算法; 函数优化

**中图分类号:** TP 301

**文献标志码:** A

## 0 引言

在科学、经济和工程领域中, 许多最新的进展都依赖于全局优化技术, 即计算出相应优化问题的全局最优解的数值技术<sup>[1]</sup>. 在全局优化技术中, 启发式搜索算法是目前比较流行且行之有效的一类优化技术. 目前比较流行的启发式搜索算法有粒子群优化算法<sup>[2]</sup>、模拟退火算法<sup>[3]</sup>、类电磁机制算<sup>[4]</sup>、遗传算法<sup>[5]</sup>、蚁群算法<sup>[6]</sup>、万有引力算法<sup>[7]</sup>等. 尽管该类算法为求解复杂优化问题提供了较多有效的途径, 但其结果仍不能令人满意, 如算法易陷入局部最优、解的精度不高等. 而且多数启发式算法没有形成系统的理论, 没有统一的算法框架, 有许多问题仍有待研究<sup>[8]</sup>.

万有引力算法( A gravitational search algorithm, GSA) 是伊朗的克曼大学教授 Esmat Rashedi 等于 2009 提出来的, 该算法基于牛顿万有引力定律, 通过模拟粒子间相互作用的万有引力指导粒子进行搜索, 由文献[7]可知万有引力算法与中心力算法、粒子群算法相比, 具有明显的优越性. 然后, 由于移动步骤具有一定盲目性, 可能造成个体退化; 且万有引力算法无局部搜索机制, 因而局部搜索能力较弱.

针对 GSA 的上述缺陷, 本文提出了一种基于模

拟退火的万有引力算法( gravity algorithm based simulated annealing, GABSA), 该算法采用模拟退火算法的 Metropolis 准则对移动步骤进行判断, 从而减少移动的盲目性; 同时通过采用模拟退火算法进行局部搜索, 提高局部搜索能力. 实验结果表明: GABSA 的优化效果明显优于 GSA.

## 1 模拟退火算法

模拟退火算法( simulated annealing, SA) 的思想最早是由 Metropolis 于 1953 年提出来的, 1983 年 Kirkpatrick 将其应用于组合优化问题. SA 算法基于固体物质的退火过程, 是一种通用的优化算法, 已成功应用于解决车辆路线优化、TSP 问题、车间调度问题等优化问题<sup>[9-11]</sup>.

模拟退火算法基本思想是基于物理中固体物质的退火过程与一般组合优化问题之间的相似性. 模拟退火算法从某一较高初温出发, 伴随温度参数的不断下降, 结合概率突跳特性在解空间中随机寻找目标函数的全局最优解, 即在局部最优解能概率性地跳出并最终趋于全局最优.

Metropolis 准则: 设粒子初始状态为  $i$ , 随机扰动得到粒子的一个新状态  $j$ .  $E(i)$ 、 $E(j)$  分别为粒子在状态  $i$ 、 $j$  时的能量:

收稿日期: 2014-06-09

基金项目: 江西省自然科学基金( 20144BAB2020010), 江西省科技厅科技支撑项目( 2013ZBBF60001) 和江西省教育厅科技课题( GJJ14789) 资助项目.

作者简介: 王立平( 1979-), 男, 江西吉安人, 副教授, 主要从事数据挖掘和云计算研究.

- (i) 若  $E(j) < E(i)$  , 则状态转换被接受;  
 (ii) 若  $E(j) \geq E(i)$  , 则状态转换的概率为

$$P_{ij} = \exp(- (E(j) - E(i)) / (KT)) ,$$

其中  $K$  为物理学中的玻耳兹曼常数,  $T$  为材料的温度. 对同样的接受概率. 模拟退火算法的基本步骤见文献[12].

## 2 万有引力算法

万有引力算法基于牛顿万有引力定律 “任意 2 个质点通过连心线方向上的力相互吸引. 该引力的大小与它们的质量乘积成正比, 与它们距离的平方成反比, 与 2 物体的化学本质或物理状态以及中介物质无关”. 用公式表示为

$$F = GM_1M_2/R^2 \quad (1)$$

其中  $F$  为万有引力的大小,  $G$  为引力常数,  $M_1$ 、 $M_2$  为代表 2 个粒子的惯性质量,  $R$  为 2 个粒子之间的欧氏距离.

粒子  $j$  对粒子  $i$  的吸引力在  $d$  维上的分量为<sup>[7]</sup>

$$F_{ij}^d(t) = G(t) \frac{M_{pi}(t) \times M_{aj}(t)}{R_{ij}(t) + \varepsilon} \cdot (x_j^d(t) - x_i^d(t)) . \quad (2)$$

因为实验表明  $R$  比  $R^2$  效果更好, 所以采用  $R$  代替  $R^2$ ;  $M_{aj}$  表示施力粒子  $j$  的质量,  $M_{pi}$  表示受力粒子  $i$  的质量;  $\varepsilon$  为一小常量,  $G(t)$  为时间  $t$  下的引力常量:

$$G(t) = G_0 e^{-\alpha \frac{t}{T}} , \quad (3)$$

其中  $G_0$  为引力常量初始值,  $\alpha$  为一常量,  $T$  为算法的总迭代次数.

粒子  $i$  在  $d$  上的合力为

$$F_i^d(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N rand \times F_{ij}^d(t) , \quad (4)$$

其中  $rand$  是为增加算法搜索的随机性而增加的随机量, 其取值范围为  $[0, 1]$ .

由牛顿第二定律可知: 在时间  $t$  时, 粒子  $i$  在  $d$  上的加速度为

$$a_i^d(t) = F_i^d(t) / M_i(t) , \quad (5)$$

其中  $M_i(t)$  为粒子  $i$  的惯性质量. 在 GSA 算法中, 使用以下公式更新粒子的惯性质量为

$$M_{a_i} = M_{p_i} = M_{i_i} = M_i, i = 1, 2, 3, \dots, N , \quad (6)$$

$$m_i(t) = (fit_i(t) - worst(t)) / (best(t) - worst(t)) , \quad (7)$$

$$M_i(t) = m_i(t) / \sum_{j=1}^N m_j(t) , \quad (8)$$

其中  $fit_i(t)$  为  $t$  时粒子  $i$  的适应值. 对于求最小值问题时,  $worst(t)$ 、 $best(t)$  为

$$best(t) = \min_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} fit_j(t) , \quad (9)$$

$$worst(t) = \max_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} fit_j(t) . \quad (10)$$

在 GSA 算法中, 每次迭代都会按照牛顿运动定律对粒子的运动状态进行更新, 更新公式为

$$v_i^d(t+1) = rand \times v_i^d(t) + a_i^d(t) , \quad (11)$$

$$x_i^d(t+1) = x_i^d(t) + v_i^d(t+1) , \quad (12)$$

其中  $rand$  为  $[0, 1]$  上的随机数,  $v_i^d(t)$ 、 $x_i^d(t)$  分别为粒子  $i$  在时间  $t$  时在  $d$  维上的速度和位置分量. 万有引力算法的具体步骤见文献[7].

## 3 基于退火思想的算法改进

### 3.1 基于 Metropolis 准则的位置更新策略

由(12)式可见, 粒子的位置更新具有一定的随机性, 从而使个体可能会从适应值高的位置移到适应值低的位置. 这种现象称为个体的退化; 即可能造成  $fit_{i+1}(t) > fit_i(t)$  (求最小值问题时), 这对问题的求解显然是不利的. 针对万有引力算法的这一不足, 本文提出一种基于 Metropolis 准则的粒子位置更新策略: (i) 根据式(12)计算出粒子  $i$  下一个可能的位置  $\bar{x}_i(t+1)$ ; (ii) 根据 Metropolis 准则判断是否接受  $\bar{x}_i(t+1)$  作为  $i$  的下一个位置. 具体如下: 若  $fit_{i+1}(t) \leq fit_i(t)$  或  $rand \leq \exp(- (fit_{i+1}(t) - fit_i(t)) / (KT))$ , 则  $x_i(t+1) = \bar{x}_i(t+1)$ ; 否则  $x_i(t+1) = x_i(t)$ . 其中  $fit_{i+1}(t)$  为假设  $i$  的下一位置为  $\bar{x}_i(t+1)$  时的适应值,  $rand$  为  $[0, 1]$  上的随机数.

可见, 当粒子从一个适应值优的位置移到一个适应值更差的位置时, 通过 Metropolis 准则的引导, 只以一定概率接受差解, 一定程度上避免了粒子的退化.

### 3.2 基于模拟退火的万有引力算法

由文献[7]可知, 万有引力算法全局搜索能力较强; 但是从算法具体步骤可见, 引力算法缺乏局部搜索机制, 因此算法的局部搜索能力比较弱. 而退火算法虽然前期的全局能力不强, 却具有快速搜索到局部最优解的能力<sup>[13]</sup>. 因此, 本文将万有引力算法与退火算法融合, 使算法同时兼顾全局和局部搜索能力.

基于模拟退火的万有引力算法以万有引力算法框架为基础<sup>[7]</sup>, 采用基于 Metropolis 准则的粒子位

置更新策略; 同时在万有引力算法操作完成后, 采用退火算法对最优个体进行操作, 增加算法的局部寻优能力. 算法的具体步骤如下: (i) 初始化操作. 包括初始种群  $Q$ 、引力常量初值  $G_0$ 、退火初始温度  $T_0$ 、玻耳兹曼常数  $K$ 、迭代次数  $N$  等; (ii) 计算粒子适应值; (iii) 更新引力系数  $G(t)$ 、最好值  $best(t)$ 、最坏值  $worst(t)$  和粒子的惯性质量  $M_i(t)$ ; (iv) 按 (4) 式计算各粒子各方向上的力的总和; (v) 分别按 (5) 式和 (11) 式计算各粒子的加速度和速度; (vi) (12) 式计算各粒子下一步可能的位置, 用基于 Metropolis 准则的粒子位置更新策略对粒子的位置进行更新; (vii) 判断是否迭代结束, 如未结束, 则返回步骤 3) 重复执行; (viii) 对最优个体进行退火操作; (ix) 输出结果. 流程图如图 1 所示.

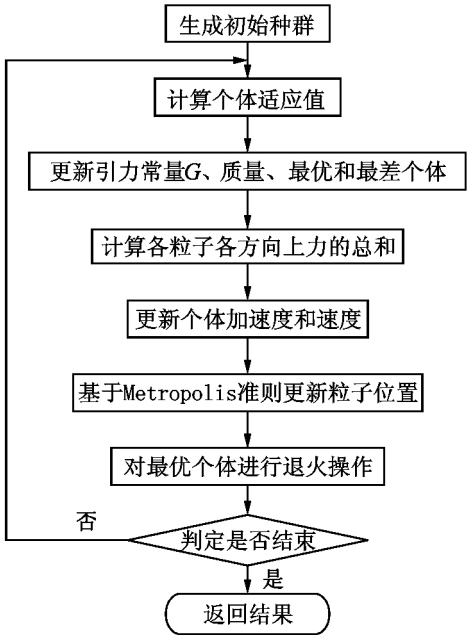


图 1 GABSA 流程图

4 算法性能测试

4.1 性能测试一

为了测试退火思想引入的有效性, 将本文算法与文献 [7] 万有引力算法进行比较, 表 1 为测试函数<sup>[14]</sup> 函数  $F_1$ 、 $F_2$  的最大迭代次数为 50,  $F_3$  的最大迭代次数为 100, 优化精度为 0.1, 算法其它参数见表 2. 表 3 为本算法与文献 [7] GSA 的性能比较. 图 2 ~ 图 4 分别为函数  $F_1 \sim F_3$  优化效果比较图.

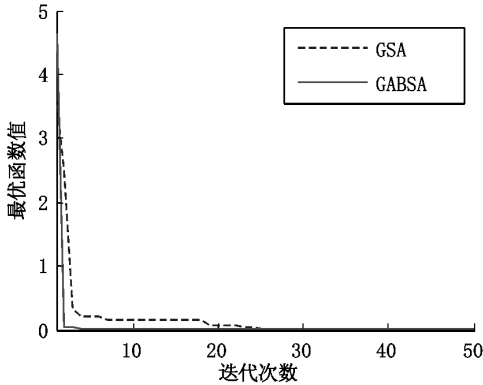


图 2  $F_1$  寻优曲线

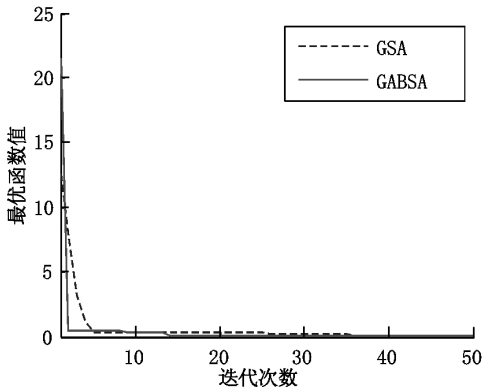


图 3  $F_2$  寻优曲线

表 1 测试函数一

测试函数	区间	最优值
$F_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$	$x_i \in [-5, 5]$	$F_1(0, 0) = 0$
$F_2(x_1, x_2) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$	$x_i \in [-2.048, 2.048]$	$F_2(1, 1) = 0$
$F_3(x_1, x_2) = 0.5 + \frac{\sin^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 0.5}{[1.0 + 0.001(x_1^2 + x_2^2)]^2}$	$x_i \in [-100, 100]$	$F_3(0, 0) = 0$

表 2 算法参数

参数	种群规模 $Q$	引力常量初值 $G_0$	$\alpha$	Metropolis 准则退火温度初值 $T_0$	最优个体退火操作温度初值 $T_M$
GABSA	10	100	20	20	0.01
GSA	10	100	20	—	—

表3 GABSA 与 GSA 性能比较

函数	GSA			GABSA		
	成功率 /%	最优解	最差解	成功率 /%	最优解	最差解
$F_1$	100	$1.911 \times 10^{-4}$	$2.446 \times 10^{-3}$	100	$1.552 \times 10^{-6}$	$2.066 \times 10^{-4}$
$F_2$	100	$1.445 \times 10^{-4}$	$8.599 \times 10^{-2}$	100	$1.217 \times 10^{-4}$	$1.694 \times 10^{-2}$
$F_3$	90	$1.744 \times 10^{-4}$	$1.269 \times 10^{-1}$	100	$2.576 \times 10^{-6}$	$9.720 \times 10^{-2}$

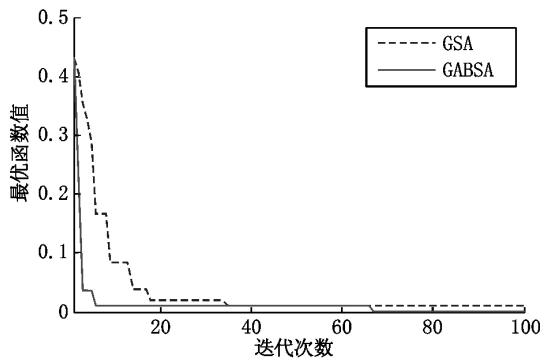


图4  $F_3$  寻优曲线

由表1可见,GABSA在成功率、求解精度上比GSA好;图2~图4表明GABSA的收敛速度比GSA快,收敛精度比GSA高.退火思想的引入,使得GABSA具

有更快的收敛速度、更高的成功率和求解精度.这是由于:(i)Metropolis准则的个体移动策略,一定程度避免了个体移向更差解;(ii)对最优个体进行退火搜索,提高了算法收敛速度与搜索精度.

#### 4.2 性能测试二

为了进一步对算法的性能进行测试,将本文算法与文献[15]的一种群体迁移优化算法(species migrationbased optimization algorithm SMOA)进行比较.为了更好地测试算法性能,选取文献[15]的高维函数作为测试函数,实验结果见表5,其中SMOA测试数据来自文献[15].实验参数:种群规模为30,进化代数50,独立运行50次.

表4 测试函数二

测试函数	区间	最优值
$F_4(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \prod_{i=1}^{20} \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	$x_i \in [-600, 600]$	$F_4(0, \dots, 0) = 0$
$F_5 = \sum_{i=1}^{20} [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10]$	$x_i \in [-10, 10]$	$F_5(0, \dots, 0) = 0$
$F_6(x) = \sum_{i=1}^{19} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2]$	$x_i \in [-2, 2]$	$F_6(1, \dots, 1) = 0$
$F_7(x) = \sum_{i=1}^{20} x_i^2$	$x_i \in [-5.12, 5.12]$	$F_7(0, \dots, 0) = 0$

表5 GABSA 与 SMOA 性能比较

函数	SMOA		GABSA	
	最优值	平均值	最优解	平均值
$F_4$	0.220 3	0.873 8	6.780 6	19.227
$F_5$	2.980 7	10.972 3	43.517	54.484
$F_6$	16.236 5	21.768 9	137.52	212.34
$F_7$	$6.840 5 \times 10^{-3}$	$2.683 3 \times 10^{-2}$	2.401 3	4.747 2

由表5可见,对于高维函数的求解,GABSA比SMOA有更高的求解精度.故GABSA具有较好的收敛效果与求解精度,具有优越的寻优性能.

## 5 结束语

本文针对GSA算法存在的不足,通过采用基于Metropolis准则的个体移动策略,并对最优个体进行退火操作,提出了一种基于模拟退火思想的万有引力算法(GABSA).通过测试实验,将GABSA与GSA

进行比较,验证退火思想引入的有效性;GABSA与文献[15]的SMOA求解高维函数进行的比较,进一步验证了GABSA的有效性.

## 6 参考文献

- [1] 王晓娟,高亮,陈亚洲.类电磁机制算法及其应用[J].计算机应用研究,2006,23(6):67-70.
- [2] Karakuzu J,Eberhart R C. Particle swarm optimization[J].IEEE International Conference on Neural Networks,1995,4:1942-1948.
- [3] Suman B,Kumar P. A survey of simulated annealing as tool for single and multiobjective optimization[J].Journal of the Operational Research Society,2006,57(10):1143-1160.
- [4] Birbil S I,Fang S C. An electromagnetism-like mechanism for global optimization[J].Journal of Global Optimiza-

- tion 2003 25(3): 263-282.
- [5] Tang K S ,Man K F ,Kwong S ,et al. Genetic algorithms and their applications [J]. IEEE Signal Processing Magazine 1996 ,13( 6) : 22-37.
- [6] Dorigo M ,Birattari M ,Stutzle T. Ant colony optimization artificial ants as a computational intelligence technique [J]. IEEE Computational Intelligence Magazine ,2006 , 1( 4) : 28-39.
- [7] Esmat Rashedi ,Hossein Nezamabadipour ,Saeid Saryazdi. GSA: a gravitational search algorithm [J]. Information Sciences 2009 ,179( 13) : 2232-2248.
- [8] 谢丽萍 ,曾建湖. 受拟态物理学启发的全局优化算法 [J]. 系统工程理论与实践 2010 30( 12) : 2276-2282.
- [9] Suman B ,Kumar P. A survey of simulated annealing as a tool for single and multiobjective optimization [J]. Journal of the Operational Research Society 2006 57 ( 10) : 1143-1160.
- [10] ElBouri A ,Azizi N ,Zolfaghari S. A comparative study of a new heuristic based on adaptive memory programming and simulated annealing: the case of job shop scheduling [J]. European Journal of Operational Research ,2007 ,177: 1894-1910.
- [11] Tan K C ,Chew Y H ,Lee L H. A hybrid multi-objective evolutionary algorithm for solving truck and trailer vehicle routing problems [J]. European Journal of Operational Research 2006 ,172: 855-885.
- [12] 杨勇 ,谭渊 ,张晓发 等. 基于模拟退火算法的阵列模型有源校正方法 [J]. 国防科技大学学报 2011 33( 1) : 91-94.
- [13] 王银年 ,葛洪伟. 求解 TSP 问题的改进模拟退火遗传算法 [J]. 计算机工程与应用 2010 46( 5) : 44-85.
- [14] 吴涛 ,金义富. 基于云控制的自适应遗传算法 [J]. 计算机工程 2011 37( 8) : 189-191.
- [15] 马海平 ,李寰 ,阮谢永. 一种群体迁移优化算法及性能分析 [J]. 控制理论与应用 2010 27( 3) : 329-33.

## The Gravity Algorithm Based Simulated Annealing

WANG Li-ping<sup>1</sup> ,XIAO Le-yi<sup>2</sup>

( 1. Pingxiang University ,Pingxiang Jiangxi 337000 ,China; 2. Office of Academic Affairs ,Changsha Normal University ,Changsha Hunan 410100 ,China)

**Abstract:** In Gravitational Search Algorithm( GSA) ,individual location update strategy may damage the individual , and the local search ability is weak ,an improved algorithm has been proposed. The proposed algorithm integrated simulated annealing mechanism into GSA ,used individual location update strategy which based on Metropolis ,and did annealing operation for optimal individual of every generation after gravity operation. To some extent ,avoided the individual blind Mobile ,Improve the local search ability of the algorithm ,the velocity and precision of convergence. The experimental results demonstrate that improvement strategy of the algorithm is effective ,and the improved algorithm has obvious advantages in the velocity of convergence ,convergence accuracy ,etc.

**Key words:** A Gravitational Search Algorithm; simulated annealing; function optimization

( 责任编辑: 冉小晓)