文章编号:1000-5862(2014)05-0506-06

关于单位圆内亚纯系数线性微分方程解的微分多项式的值分布

占美龙,郑秀敏*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:研究了单位圆 $\Delta=\{z\in C: |z|<1\}$ 内系数为亚纯函数的齐次和非齐次线性微分方程的亚纯解的增长性,同时精确估计了解的微分多项式取小函数值点的迭代收敛指数和迭代下收敛指数.

关键词:单位圆;亚纯函数;线性微分方程;微分多项式

中图分类号:O 174.52 **文献标志码**:A

0 引言和主要结果

继 J. Heittokangas 系统研究单位圆 Δ 内线性微分方程之后,许多国内外学者在这方面作了进一步研究,并取得了若干重要成果[1-6]. 对于复平面 C 上的线性微分方程,前人得到了许多关于方程解的微分多项式的重要估计[7-8]. 然而,由于 Δ 与 C 本质上有很大不同,所以研究 Δ 内线性微分方程解的微分多项式具有重要意义. 近年来,曹廷彬和仪洪勋在文献[3]中对 Δ 内的2阶线性微分方程进行研究,得到了方程解的零点收敛指数的估计. 之后,A. El Farissi 等对其结果进行推广,得到了 Δ 内线性微分方程解的微分多项式的零点分布. 特别地,A. El Farissi 等在文献[4]中对2阶非齐次线性微分方程

$$f''+A_1(z)f'+A_0(z)f=F(z) \tag{1}$$

进行了研究,得到了当方程系数为 Δ 内解析函数时,方程(1)的解的微分多项式取小函数值点的迭代收敛指数的估计. 在叙述其结果之前,为方便起见,定义

$$\begin{cases}\alpha_0=d_0(z)-d_2(z)A_0(z),\\ \alpha_1=d_1(z)-d_2(z)A_1(z),\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\beta_0=d_2(z)A_0(z)A_1(z)-(d_2(z)A_0(z))'-\\ \quad d_1(z)A_0(z)+d_0'(z),\\ \beta_1=d_2(z)A_1^2(z)-(d_2(z)A_1(z))'-\\ \quad d_1(z)A_1(z)-d_2(z)A_0(z)+d_0(z)+d_1'(z),\end{cases} \tag{3}$$

$$h=\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1, \tag{4}$$

$$\psi(z)=[\alpha_1(\varphi'(z)-(d_2(z)F(z))'-\alpha_1F(z))-\beta_1(\varphi(z)-d_2(z)F(z))]/h(z), \tag{5}$$

其中 $A_0(z)(\not\equiv 0)$, $A_1(z)$, $d_0(z)$, $d_1(z)$, $d_2(z)$ ($d_0(z)$, $d_1(z)$, $d_2(z)$ 不全为零), $\varphi(z)(\not\equiv 0)$, $F(z)(\not\equiv 0)$ 是 Δ 内的解析函数.

定理A[4] 设 $A_0(z)(\not\equiv 0)$, $A_1(z)$ 和 $F(z)(\not\equiv 0)$ 是 Δ 内有穷级解析函数, $d_0(z)$, $d_1(z)$, $d_2(z)$ 是 Δ 内不全为零的有穷级解析函数且满足 $h(z)\not\equiv 0$(其中 $h(z)$ 由(4)式给出). 又设 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是 Δ 内有穷级解析函数,且使得 $\psi(z)$ 不是方程(1)的解(其中 $\psi(z)$ 由(5)式给出). 若 $f(z)$ 是方程(1)的无穷级解且满足 $\sigma_2(f)=\sigma$,则微分多项式

$$g_f=d_2(z)f''+d_1(z)f'+d_0(z)f \tag{6}$$

满足

$$\overline{\lambda}(g_f-\varphi)=\lambda(g_f-\varphi)=\sigma(g_f)=\sigma(f)=\infty$$

和

$$\overline{\lambda}_2(g_f-\varphi)=\lambda_2(g_f-\varphi)=\sigma_2(g_f)=\sigma_2(f)=\sigma.$$

文献[5]对2阶齐次线性微分方程

$$f''+A_1(z)f'+A_0(z)f=0 \tag{7}$$

进行了研究,得到结果如下.

定理B 设 $A_0(z)$, $A_1(z)$ 是 Δ 内解析函数且满足 $i(A_0)=p$, $\sigma_p(A_1)<\sigma_p(A_0)=\sigma(0<\sigma<\infty)$,或者 $\sigma_p(A_1)=\sigma_p(A_0)=\sigma(0<\sigma<\infty)$ 且 $\tau_p(A_1)<\tau_p(A_0)=\tau(0<\tau<\infty)$. 又设 $d_0(z)$,

收稿日期:2014-04-10

基金项目:国家自然科学基金(11301233),江西省自然科学基金(20132BAB211002)和江西省教育厅青年科学基金(GJJ14271)资助项目.

通信作者:郑秀敏(1980-),女,江西上饶人,副教授,博士,主要从事复分析研究.

$d_1(z)$ 是 Δ 内不全为零的解析函数且满足 $\max\{\sigma_p(d_0),\sigma_p(d_1)\}<\sigma_p(A_0)$，$\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是 Δ 内解析函数且满足 $\sigma_p(\varphi)<\infty$. 若 $f(z)(\not\equiv 0)$ 是方程(7)的解，则微分多项式

$$g_f^*=d_1(z)f'+d_0(z)f \tag{8}$$

满足

$$\overline{\lambda}_p(g_f^*-\varphi)=\lambda_p(g_f^*-\varphi)=\sigma_p(g_f^*)=\sigma_p(f)=\infty$$

和

$$\sigma_p(A_0)\leqslant\overline{\lambda}_{p+1}(g_f^*-\varphi)=\lambda_{p+1}(g_f^*-\varphi)=\sigma_{p+1}(g_f^*)=\sigma_{p+1}(f)=\sigma_{M,p+1}(f)\leqslant\alpha_M,$$

其中

$$\alpha_M=\max\{\sigma_{M,p}(A_j),j=0,1\}.$$

在定理 A 和定理 B 中，方程(1)和(7)的系数以及微分多项式(6)和(8)的系数均为 Δ 内解析函数. 自然就提出如下问题：当方程(1)和(7)的系数以及微分多项式(6)和(8)的系数均为 Δ 内亚纯系数时，能否得到类似的结论？本文对该问题进行研究，并进一步讨论迭代下级的情况，得到了以下结果.

定理 1　设 $A_0(z)(\not\equiv 0)$，$A_1(z)$，$d_0(z)$，$d_1(z)$，$d_2(z)$（$d_0(z)$，$d_1(z)$，$d_2(z)$ 不全为零）和 $F(z)(\not\equiv 0)$ 为 Δ 内亚纯函数且满足 $\max\{i(A_0),i(A_1),i(d_j),j=0,1,2,i(F)\}=p$，同时使得 $h(z)\not\equiv 0$（其中 $h(z)$ 由(2)～(4)式给出）. 又设 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是 Δ 内亚纯函数且满足 $\sigma_p(\varphi)<\infty$，同时使得 $\psi(z)$ 不是方程(1)的解（其中 $\psi(z)$ 由(2)～(5)式给出）. 若 $f(z)$ 是方程(1)的无穷 p 次迭代下级亚纯解且满足 $\mu_{p+1}(f)=\mu$，则微分多项式(6)满足 $\overline{\lambda}_p(g_f-\varphi)=\mu_p(g_f)=\mu_p(f)=\sigma_p(f)=\sigma_p(g_f)=\overline{\lambda}_p(g_f-\varphi)=\infty$ 和 $\overline{\lambda}_{p+1}(g_f-\varphi)=\mu_{p+1}(g_f)=\mu_{p+1}(f)\leqslant\sigma_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(g_f)=\overline{\lambda}_{p+1}(g_f-\varphi)$. 又若 $f(z)$ 是方程(1)的有穷 p 次迭代下级亚纯解且满足 $\max\{\sigma_p(A_0),\sigma_p(A_1),\sigma_p(d_j),j=0,1,2,\sigma_p(F),\sigma_p(\varphi)\}<\mu_p(f)$，则微分多项式(6)满足

$$\overline{\lambda}_p(g_f-\varphi)=\mu_p(g_f)=\mu_p(f)\leqslant\sigma_p(f)=\sigma_p(g_f)=\overline{\lambda}_p(g_f-\varphi).$$

定理 2　设 $A_0(z)(\not\equiv 0)$，$A_1(z)$，$d_0(z)$，$d_1(z)$，$d_2(z)$（$d_0(z)$，$d_1(z)$，$d_2(z)$ 不全为零）是 Δ 内亚纯函数，且满足 $\max\{\sigma_p(A_1),\lambda_p(1/A_0),\lambda_p(A_0),\sigma_p(d_j),j=0,1,2\}<\mu_p(A_0)\leqslant\sigma_p(A_0)<\infty$. 又设 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是 Δ 内亚纯函数且满足 $\sigma_p(\varphi)<\infty$，同时使得 $\alpha_1\varphi'\not\equiv\beta_1\varphi$（其中 α_1，β_1 分别由(2)和(3)式给出）. 若 $f(z)(\not\equiv 0)$ 是方程(7)的亚纯解，则微分多项式(6)满足

$$\overline{\lambda}_p(g_f-\varphi)=\mu_p(g_f)=\mu_p(f)=\sigma_p(f)=\sigma_p(g_f)=\overline{\lambda}_p(g_f-\varphi)=\infty$$

和

$$\overline{\lambda}_{p+1}(g_f-\varphi)=\mu_{p+1}(g_f)=\mu_{p+1}(f)\leqslant\sigma_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(g_f)=\overline{\lambda}_{p+1}(g_f-\varphi).$$

进一步，考虑高阶齐次线性微分方程

$$f^{(n)}+A_{n-1}(z)f^{(n-1)}+\cdots+A_0(z)f=0 \tag{9}$$

和微分多项式

$$L(f)=d_n(z)f^{(n)}+\cdots+d_1(z)f'+d_0(z)f, \tag{10}$$

其中 $A_0(z)(\not\equiv 0)$，$\cdots$，$A_{n-1}(z)$，$d_0(z)$，$\cdots$，$d_n(z)$（$d_0(z)$，$\cdots$，$d_n(z)$ 不全为零）是 Δ 内亚纯函数. 用类似定理 2 的证明方法可得到类似结果，故此处略去证明. 在叙述结果之前，为方便起见，定义

$$\alpha_{i,0}=d_i(z)-d_n(z)A_i(z),i=0,\cdots,n-1, \tag{11}$$

$$\alpha_{i,j}=\begin{cases}\alpha'_{i,j-1}+\alpha_{i-1,j-1}-\alpha_{n-1,j-1}A_i(z),\\ \alpha'_{0,j-1}-\alpha_{n-1,j-1}A_0(z),\end{cases} \tag{12}$$

$i=1,\cdots,n-1,j=1,\cdots,n-1,$

$$h_1=\begin{vmatrix}\alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \cdots & \alpha_{n-1,0}\\ \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{n-1,1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{0,n-1} & \alpha_{1,n-1} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1}\end{vmatrix}, \tag{13}$$

$$\psi_1(z)=C_{n-1}(z)\varphi^{(n-1)}+\cdots+C_0(z)\varphi, \tag{14}$$

其中 $C_j(z)$，$j=0,\cdots,n-1$ 是 Δ 内仅依赖于 $\alpha_{i,j}(i,j=0,\cdots,n-1)$ 的亚纯函数，$\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是 Δ 内亚纯函数.

定理 3　设 $A_0(z)(\not\equiv 0)$，$A_1(z)$，$\cdots$，$A_{n-1}(z)$，$d_0(z)$，$\cdots$，$d_n(z)$（$d_0(z)$，$\cdots$，$d_n(z)$ 不全为零且满足 $\max\{i(d_0),\cdots,i(d_n)\}=p$）是 Δ 内亚纯函数，且满足 $\max\{\sigma_p(A_1),\cdots,\sigma_p(A_{n-1}),\lambda_p(1/A_0)\}<\mu_p(A_0)\leqslant\sigma_p(A_0)<\infty$，同时使得 $h_1(z)\not\equiv 0$（其中 $h_1(z)$ 由(11)～(13)式给出）. 又设 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 是 Δ 内亚纯函数且满足 $\sigma_p(\varphi)<\infty$，同时使得 $\psi_1(z)\not\equiv 0$（其中 $\psi_1(z)$ 由(14)式给出）. 若 $f(z)(\not\equiv 0)$ 是方程(9)的亚纯解，则微分多项式(10)满足

$$\overline{\lambda}_p(L(f)-\varphi)=\mu_p(L(f))=\mu_p(f)=\sigma_p(f)=\sigma_p(L(f))=\overline{\lambda}_p(L(f)-\varphi)=\infty$$

和

$$\overline{\lambda}_{p+1}(L(f)-\varphi)=\mu_{p+1}(L(f))=\mu_{p+1}(f)\leqslant\sigma_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(L(f))=\overline{\lambda}_{p+1}(L(f)-\varphi).$$

1　定义和记号

假设读者熟悉单位圆 $\Delta=\{z\in C:|z|<1\}$ 内

的 Nevanlinna 值分布理论的基本结果和标准记号[9-10]. 约定 $p\in\mathbf{N}$; 且称 Δ 内亚纯函数 $\varphi(z)$ 是 Δ 内亚纯函数 $f(z)$ 的小函数,若 $\varphi(z)$ 满足 $T(r,\varphi)=o(T(r,f))$, $r\notin E$,其中 $E\subset[0,1)$ 且满足 $\int_E \mathrm{d}r/(1-r)<\infty$. 特别地,对于增长性较快的 Δ 内亚纯函数,还引入以下定义.

定义 1 Δ 内亚纯函数 $f(z)$ 的 p 次迭代级定义为

$$\sigma_p(f)=\limsup_{r\to1^-}\log_p^+T(r,f)/\log(1-r)^{-1}.$$

定义 2[11] Δ 内亚纯函数 $f(z)$ 的 p 次迭代下级定义为

$$\mu_p(f)=\liminf_{r\to1^-}\log_p^+T(r,f)/\log(1-r)^{-1}.$$

定义 3 Δ 内亚纯函数 $f(z)$ 的级的增长指标定义为

$$i(f)=\begin{cases}0,\text{若} f \text{是不可允许的};\\ \min\{j\in\mathbf{N}:\sigma_j(f)<\infty\},\text{若} f \text{是可允许的},\\ \text{且存在某个} j \text{使得} \sigma_j(f)<\infty;\\ \infty,\text{对所有的} j\in\mathbf{N} \text{都有} \sigma_j(f)=\infty.\end{cases}$$

定义 4 Δ 内亚纯函数 $f(z)$ 的 a-值点序列($a\in C\cup\{\infty\}$)的迭代收敛指数定义为

$$\lambda_p(f-a)=\limsup_{r\to1^-}\log_p^+N(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1},$$

$f(z)$ 的不同 a-值点序列($a\in C\cup\{\infty\}$)的迭代收敛指数定义为

$$\overline{\lambda}_p(f-a)=\limsup_{r\to1^-}\log_p^+\overline{N}(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1}.$$

定义 5[11] Δ 内亚纯函数 $f(z)$ 的 a-值点序列($a\in C\cup\{\infty\}$)的迭代下收敛指数定义为

$$\underline{\lambda}_p(f-a)=\liminf_{r\to1^-}\log_p^+N(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1},$$

$f(z)$ 的不同 a-值点序列($a\in C\cup\{\infty\}$)的迭代下收敛指数定义为

$$\overline{\underline{\lambda}}_p(f-a)=\liminf_{r\to1^-}\log_p^+\overline{N}(r,(f-a)^{-1})/\log(1-r)^{-1}.$$

注(i) 若 $a=0$,则 $\lambda_p(f)$, $\overline{\lambda}_p(f)$, $\underline{\lambda}_p(f)$ 和 $\overline{\underline{\lambda}}_p(f)$ 分别表示 $f(z)$ 在 Δ 内的零点迭代收敛指数、不同零点迭代收敛指数、零点迭代下收敛指数和不同零点迭代下收敛指数; 若 $a=\infty$,则 $\lambda_p(1/f)$, $\overline{\lambda}_p(1/f)$, $\underline{\lambda}_p(1/f)$ 和 $\overline{\underline{\lambda}}_p(1/f)$ 分别表示 $f(z)$ 在 Δ 内的极点迭代收敛指数、不同极点迭代收敛指数、极点迭代下收敛指数和不同极点迭代下收敛指数.

(ii) 进一步地,在定义 4 和定义 5 中用小函数 $\varphi(z)$ 代替 a,可得 $\lambda_p(f-\varphi)$, $\overline{\lambda}_p(f-\varphi)$, $\underline{\lambda}_p(f-\varphi)$ 和 $\overline{\underline{\lambda}}_p(f-\varphi)$ 的定义.

2 定理证明所需引理

引理 1[8] 设 $f(z)$ 是 Δ 内亚纯函数且 $k\in\mathbf{N}$,则有 $m(r,f^{(k)}/f)=O(\log^+T(r,f)+\log(1-r)^{-1})$,至多除去 1 个例外集 $E\subset[0,1)$ 且满足 $\int_E\mathrm{d}r/(1-r)<\infty$. 若 $f(z)$ 是有穷级,则有

$$m(r,f^{(k)}/f)=O(\log(1-r)^{-1}).$$

引理 2[12] 设 $g(r)$ 和 $h(r)$ 是 $[0,1)$ 上单调递增函数且满足 $g(r)\leqslant h(r)$,至多除去 1 个例外集 $E\subset[0,1)$ 且满足 $\int_E\mathrm{d}r/(1-r)<\infty$,则存在 1 个常数 $d\in(0,1)$,使得 $g(r)\leqslant h(s(r))$ 对所有的 $r\in[0,1)$ 成立,其中 $s(r)=1-d(1-r)$.

引理 3 设 $A_0(z)$, $A_1(z)$, $\cdots$, $A_{n-1}(z)$ 是 Δ 内亚纯函数且满足 $\max\{\lambda_p(1/A_0),\sigma_p(A_j),j=1,\cdots,n-1\}<\mu_p(A_0)<\infty$. 若 $f(z)$ 是方程(9)的非零亚纯解,则有 $\mu_p(f)=\sigma_p(f)=\infty$.

证 设 $f(z)$ 是方程(9)的非零亚纯解. 将方程(9)改写成

$$-A_0(z)=\frac{f^{(n)}}{f}+A_{n-1}(z)\frac{f^{(n-1)}}{f}+\cdots+A_1(z)\frac{f'}{f}.$$

由引理 1 可知

$$m(r,A_0)\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}m(r,A_j)+\sum_{j=1}^{n-1}m\left(r,\frac{f^{(j)}}{f}\right)+O(1)=\sum_{j=1}^{n-1}m(r,A_j)+O(\log^+T(r,f)+\log(1-r)^{-1}),\quad(15)$$

其中 $|z|=r\notin E$, $E\subset[0,1)$ 且满足 $\int_E\mathrm{d}r/(1-r)<\infty$. 由迭代下级的定义可知, $\forall r\to1^-$ 都有

$$T(r,A_0)\geqslant\exp_p\{(\mu-\varepsilon)\log(1-r)^{-1}\}.\quad(16)$$

记 $\sigma_1=\max\{\lambda_p(1/A_0),\sigma_p(A_j),j=1,2,\cdots,n-1\}$, $\mu=\mu_p(A_0)$,则 $\sigma_1<\mu$. $\forall\varepsilon(0<2\varepsilon<\mu-\sigma_1)$ 及 $r\to1^-$ 有

$$N(r,A_0)\leqslant\exp_p\{(\sigma_1+\varepsilon)\log(1-r)^{-1}\},\quad(17)$$

$$m(r,A_j)\leqslant T(r,A_j)\leqslant\exp_p\{(\sigma_1+\varepsilon)\log(1-r)^{-1}\},\ j=1,\cdots,n-1.\quad(18)$$

由(15)~(18)式可得

$$\exp_p\{(\mu-\varepsilon)\log(1-r)^{-1}\}\leqslant T(r,A_0)\leqslant N(r,A_0)+\sum_{j=1}^{n-1}m(r,A_j)+O(\log^+T(r,f)+\log(1-r)^{-1})\leqslant n\exp_p\{(\sigma_1+\varepsilon)\log(1-r)^{-1}\}+O(\log^+T(r,f)+\log(1-r)^{-1}),$$

其中 $|z| = r \to 1^-$ 且 $r \notin E, E \subset [0,1)$ 且满足 $\int_E \mathrm{d}r/(1-r) < \infty$. 由于 $\mu - \varepsilon > \sigma_1 + \varepsilon$，所以有

$$\exp_p\{(\mu - 2\varepsilon)\log(1-r)^{-1}\} \leqslant O(\log^+ T(r,f) + \log(1-r)^{-1}), r \notin E. \tag{19}$$

由引理 2 和(19)式得 $\mu_p(f) = \sigma_p(f) = \infty$.

引理 3 得证.

引理 4　设 $f(z)$ 是 Δ 内亚纯函数，则

(i) $\sigma_p(f) = \sigma_p(1/f)$，$\sigma_p(a \cdot f) = \sigma_p(f)\ (a \in C\backslash\{0\})$；

(ii) $\sigma_p(f') = \sigma_p(f)$；

(iii) $\max\{\sigma_p(f+g), \sigma_p(fg)\} \leqslant \max\{\sigma_p(f), \sigma_p(g)\}$；

(iv) 若 $\sigma_p(f) > \sigma_p(g)$，则

$$\sigma_p(f+g) = \sigma_p(fg) = \sigma_p(f).$$

引理 5[13]　设 $f(z)$ 是 Δ 内亚纯函数，则

(i) $\mu_p(f) = \mu_p(1/f)$，$\mu_p(a \cdot f) = \mu_p(f)\ (a \in C\backslash\{0\})$；

(ii) $\mu_p(f') = \mu_p(f)$；

(iii) $\max\{\mu_p(f+g), \mu_p(fg)\} \leqslant \max\{\mu_p(f), \sigma_p(g)\}$ 或 $\max\{\sigma_p(f), \mu_p(g)\}$；

(iv) 若 $\mu_p(f) > \sigma_p(g)$，则

$$\mu_p(f+g) = \mu_p(fg) = \mu_p(f).$$

引理 6[14]　设 $A_0(z), \cdots, A_{n-1}(z), F(z)\ (\not\equiv 0)$ 是 Δ 内亚纯函数. 若 $f(z)$ 是方程

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z)f^{(n-1)} + \cdots + A_0(z)f = F(z) \tag{20}$$

的亚纯解，且满足 $\max\{\sigma_p(F), \sigma_p(A_j), j = 0,1,\cdots,n-1\} < \sigma_p(f) \leqslant \infty$，则

$$\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \sigma_p(f), \overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f).$$

引理 7　设 $A_0(z), \cdots, A_{n-1}(z), F(z)\ (\not\equiv 0)$ 是 Δ 内亚纯函数. 若 $f(z)$ 是方程(20)的亚纯解，且满足 $\max\{\sigma_p(F), \sigma_p(A_j), j = 0,1,\cdots,n-1\} < \mu_p(f) \leqslant \infty$，则 $\underline{\overline{\lambda}}_p(f) = \underline{\lambda}_p(f) = \mu_p(f)$，$\underline{\overline{\lambda}}_{p+1}(f) = \underline{\lambda}_{p+1}(f) = \mu_{p+1}(f)$.

证　用类似引理 6 的证明方法即可证得.

引理 8　设 $f(z)$ 是 Δ 内亚纯函数且满足 $\max\{\lambda_p(f), \lambda_p(1/f)\} < \mu_p(f)$，$a(z)\ (\not\equiv 0)$，$b(z)$，$c(z)$，$d(z)$ 均为 $f(z)$ 的小函数，则微分多项式 $a(z)f^2 + b(z)f + c(z)f' + d(z)$ 满足

$$\sigma(af^2 + bf + cf' + d) = \sigma(f). \tag{21}$$

证　由 $\max\{\lambda_p(f), \lambda_p(1/f)\} < \mu_p(f)$ 可知当 $r \to 1^-$ 时，有

$$N(r,f) = o(T(r,f)), N(r,1/f) = o(T(r,f)).$$

又由引理 1 可知

$$T(r,f'/f) = m(r,f'/f) + N(r,f'/f) = o(T(r,f)), \tag{22}$$

其中 $r \to 1^-$，且 $r \notin E, E \subset [0,1)$ 且满足 $\int_E \mathrm{d}r/(1-r) < \infty$.

一方面，由(22)式可知

$$T(r,af^2 + bf + cf' + d) \leqslant T(r,f(af + b + cf'/f)) + T(r,d) + O(1) \leqslant T(r,f) + T(r,af + b + cf'/f) + o(T(r,f)) \leqslant 2T(r,f) + o(T(r,f)), \tag{23}$$

其中 $r \to 1^-$，且 $r \notin E_1, E_1 \subset [0,1)$ 且满足 $\int_{E_1} \mathrm{d}r/(1-r) < \infty$. 再由引理 2 和(23)式可得

$$\sigma(af^2 + bf + cf' + d) \leqslant \sigma(f).$$

另一方面，由(22)式亦可知

$$2T(r,f) \leqslant 2T\left(r, f + \frac{b + cf'/f}{2a}\right) + o(T(r,f)) = T\left(r, \left(f + \frac{b + cf'/f}{2a}\right)^2\right) + o(T(r,f)) \leqslant T\left(r, a\left(f + \frac{b + cf'/f}{2a}\right)^2 + d - \frac{(b + cf'/f)^2}{4a}\right) + o(T(r,f)) = T(r,af^2 + bf + cf' + d) + o(T(r,f)), \tag{24}$$

其中 $r \to 1^-$，且 $r \notin E_2, E_2 \subset [0,1)$ 且满足 $\int_{E_2} \mathrm{d}r/(1-r) < \infty$. 再由引理 2 和(24)式可得

$$\sigma(af^2 + bf + cf' + d) \geqslant \sigma(f).$$

综上所述，$\sigma(af^2 + bf + cf' + d) = \sigma(f)$，即(21)式成立.

引理 8 得证.

3　定理的证明

定理 1 的证明　设 $f(z)$ 是方程(1)的无穷 p 次迭代下级亚纯解且满足 $\mu_{p+1}(f) = \mu$. 将方程(1)改写成

$$f'' = F(z) - A_1(z)f' - A_0(z)f,$$

则由(6)式可得

$$g_f = d_2(z)f'' + d_1(z)f' + d_0(z)f = d_2(z)F(z) + (d_1(z) - d_2(z)A_1(z))f' + (d_0(z) - d_2(z)A_0(z))f. \tag{25}$$

由(25)式可得

$$g_f - d_2(z)F(z) = \alpha_1 f' + \alpha_0 f, \tag{26}$$

其中 α_0, α_1 如(2)式所定义. 对(26)式 2 边微分得

$$g_f' - (d_2(z)F(z))' - \alpha_1 F(z) = \beta_1 f' + \beta_0 f, \tag{27}$$

其中 β_0, β_1 如(3)式所定义. 考虑关于 f 和 f' 的方程组

$$\begin{cases}\alpha_1 f' + \alpha_0 f = g_f - d_2(z)F(z),\\ \beta_1 f' + \beta_0 f = g_f' - (d_2(z)F(z))' - \alpha_1 F(z).\end{cases}\tag{28}$$

因已知 $h(z)\not\equiv 0$，故解方程组(28)得

$$f = \frac{1}{h}[\alpha_1(g_f' - (d_2(z)F(z))' - \alpha_1 F(z)) - \beta_1(g_f - d_2(z)F(z))].\tag{29}$$

若 $\mu_p(g_f)<\infty$，则由引理4和引理5及(29)式可得 $\mu_p(f)<\infty$，矛盾. 故

$$\mu_p(g_f)=\mu_p(f)=\sigma_p(g_f)=\sigma_p(f)=\infty.$$

一方面，由引理4和引理5及(6)式可得 $\mu_{p+1}(g_f)\le\mu_{p+1}(f)$，$\sigma_{p+1}(g_f)\le\sigma_{p+1}(f)$. 另一方面，由引理4和引理5及(29)式可得 $\mu_{p+1}(f)\le\mu_{p+1}(g_f)$，$\sigma_{p+1}(f)\le\sigma_{p+1}(g_f)$. 故

$$\mu_{p+1}(g_f)=\mu_{p+1}(f)\le\sigma_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(g_f).$$

记 $\omega=g_f-\varphi$. 由于 $\sigma_p(\varphi)<\infty$，因此有

$$\mu_p(\omega)=\mu_p(g_f)=\mu_p(f)=\sigma_p(f)=\sigma_p(g_f)=\sigma_p(\omega)=\infty$$

和

$$\mu_{p+1}(\omega)=\mu_{p+1}(g_f)=\mu_{p+1}(f)\le\sigma_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(g_f)=\sigma_{p+1}(\omega).$$

将 $g_f=\omega+\varphi$ 代入(29)式可得

$$f=\frac{1}{h}[\alpha_1(\omega'-(d_2(z)F(z))'-\alpha_1F(z))-\beta_1(\omega-d_2(z)F(z))]+\psi(z),\tag{30}$$

其中 $\psi(z)$ 如(5)式定义. 将(30)式代入方程(1)得

$$\frac{\alpha_1}{h}\omega'''+\phi_2(z)\omega''+\phi_1(z)\omega'+\phi_0(z)\omega=F(z)-(\psi''+A_1(z)\psi'+A_0(z)\psi),\tag{31}$$

其中 $\phi_i(z)(i=0,1,2)$ 是 Δ 内亚纯函数且满足 $\sigma_p(\phi_i)<\infty(i=0,1,2)$. 已知 $\psi(z)$ 不是方程(1)的解，故 $F(z)-(\psi''+A_1(z)\psi'+A_0(z)\psi)\not\equiv 0$. 从而，由引理6可得 $\overline{\lambda}_p(\omega)=\lambda_p(\omega)=\sigma_p(\omega)$，$\overline{\lambda}_{p+1}(\omega)=\lambda_{p+1}(\omega)=\sigma_{p+1}(\omega)$，由引理7可得 $\overline{\underline{\lambda}}_p(\omega)=\underline{\lambda}_p(\omega)=\mu_p(\omega)$，$\overline{\underline{\lambda}}_{p+1}(\omega)=\underline{\lambda}_{p+1}(\omega)=\mu_{p+1}(\omega)$，即 $\overline{\underline{\lambda}}_p(g_f-\varphi)=\mu_p(g_f)=\mu_p(f)=\sigma_p(f)=\sigma_p(g_f)=\overline{\lambda}_p(g_f-\varphi)=\infty$ 和 $\overline{\underline{\lambda}}_{p+1}(g_f-\varphi)=\mu_{p+1}(g_f)=\mu_{p+1}(f)\le\sigma_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(g_f)=\overline{\lambda}_{p+1}(g_f-\varphi)$.

又若 $f(z)$ 是方程(1)的有穷 p 次迭代下级亚纯解且满足

$$\sigma_1=\max\{\sigma_p(A_0),\sigma_p(A_1),\sigma_p(d_j),j=0,1,2,\sigma_p(F),\sigma_p(\varphi)\}<\mu_p(f).\tag{32}$$

由(25)和(32)式及引理4和引理5可得 $\mu_p(g_f)\le\mu_p(f)$，$\sigma_p(g_f)\le\sigma_p(f)$. 下证 $\mu_p(g_f)=\mu_p(f)$，$\sigma_p(g_f)=\sigma_p(f)$. 若 $\mu_p(g_f)<\mu_p(f)$，$\sigma_p(g_f)<\sigma_p(f)$，则由(29)和(32)式可得 $\mu_p(f)\le\max\{\sigma_1,\mu_p(g_f)\}<\mu_p(f)$，$\sigma_p(f)\le\max\{\sigma_1,\sigma_p(g_f)\}<\sigma_p(f)$，矛盾. 故 $\mu_p(g_f)=\mu_p(f)\le\sigma_p(f)=\sigma_p(g_f)$.

记 $\omega=g_f-\varphi$. 因为 $\sigma_p(\varphi)<\mu_p(f)$，所以

$$\mu_p(\omega)=\mu_p(g_f)=\mu_p(f),$$
$$\sigma_p(\omega)=\sigma_p(g_f)=\sigma_p(f).$$

用上述同样方法易得方程(31)，其中 $\phi_i(z)(i=0,1,2)$ 满足 $\sigma_p(\phi_i)<\mu_p(f)(i=0,1,2)$. 故由引理6可得 $\overline{\lambda}_p(\omega)=\lambda_p(\omega)=\sigma_p(\omega)$，由引理7可得 $\overline{\underline{\lambda}}_p(\omega)=\underline{\lambda}_p(\omega)=\mu_p(\omega)$，即

$$\overline{\underline{\lambda}}_p(g_f-\varphi)=\mu_p(g_f)=\mu_p(f)\le\sigma_p(f)=\sigma_p(g_f)=\overline{\lambda}_p(g_f-\varphi).$$

定理1得证.

定理2的证明 设 $f(z)$ 是方程(7)的亚纯解，则由引理3可知 $\mu_p(f)=\sigma_p(f)=\infty$. 将方程(7)改写成

$$f''=-A_1(z)f'-A_0(z)f,$$

则由(6)式可得

$$\begin{aligned}g_f&=d_2(z)f''+d_1(z)f'+d_0(z)f=\\&d_2(z)(-A_1(z)f'-A_0(z)f)+d_1(z)f'+d_0(z)f=\\&(d_1(z)-d_2(z)A_1(z))f'+(d_0(z)-d_2(z)A_0(z))f=\\&\alpha_1f'+\alpha_0f,\end{aligned}\tag{33}$$

其中 α_0,α_1 如(2)式所定义. 对(33)式2边微分可得

$$\begin{aligned}g_f'=&[d_2(z)A_1^2(z)-(d_2(z)A_1(z))'-d_1(z)A_1(z)-d_2(z)A_0(z)+d_0(z)+d_1'(z)]f'+\\&[d_2(z)A_0(z)A_1(z)-(d_2(z)A_0(z))'-d_1(z)A_0(z)+d_0'(z)]f=\beta_1f'+\beta_0f,\end{aligned}$$

其中 β_0,β_1 如(3)式所定义. 考虑关于 f 和 f' 的方程组

$$\begin{cases}\alpha_1f'+\alpha_0f=g_f,\\ \beta_1f'+\beta_0f=g_f',\end{cases}\tag{34}$$

其中

$$\begin{aligned}h=&\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1=\\&[d_1(z)-d_2(z)A_1(z)][d_2(z)A_0(z)A_1(z)-(d_2(z)A_0(z))'-d_1(z)A_0(z)+d_0'(z)]-\\&[d_0(z)-d_2(z)A_0(z)][d_2(z)A_1^2(z)-(d_2(z)\cdot A_1(z))'-d_1(z)A_1(z)-d_2(z)A_0(z)+d_0(z)+d_1'(z)]=-d_2^2(z)A_0^2(z)+[d_1(z)d_2(z)A_1(z)+\\&d_1'(z)d_2(z)+2d_0(z)d_2(z)-d_1(z)d_2'(z)-d_2^2(z)A_1'(z)-d_1^2(z)]A_0(z)+[d_2^2(z)A_1(z)-\\&d_1(z)d_2(z)]A_0'(z)+[-d_0(z)d_2(z)A_1^2(z)+d_0(z)d_1(z)A_1(z)-d_0'(z)d_2(z)A_1(z)+\\&d_0(z)d_2(z)A_1'(z)+d_0'(z)d_1(z)-d_0(z)d_1'(z)-d_0^2(z)].\end{aligned}\tag{35}$$

若 $d_2(z) \not\equiv 0$，则由已知条件和引理 8 可知 $\sigma_p(h) = \sigma_p(A_0) > 0$，故 $h(z) \not\equiv 0$. 若 $d_2(z) \equiv 0$，$d_1(z) \not\equiv 0$，则由(35)式可知

$$h = -d_1^2(z)A_0(z) + [d_0(z)d_1(z)A_1(z) + d_0'(z)d_1(z) - d_0(z)d_1'(z) - d_0^2(z)],$$

进而由 $\sigma_p(h) = \sigma_p(A_0) > 0$ 可知 $h(z) \not\equiv 0$. 若 $d_2(z) \equiv 0$，$d_1(z) \equiv 0$，$d_0(z) \not\equiv 0$，则 $h(z) = -d_0^2(z) \not\equiv 0$. 综上所述，$h(z) \not\equiv 0$. 故解方程组(34)得

$$f = (\alpha_1 g_f' - \beta_1 g_f)/h, \tag{36}$$

其中 $\sigma_p(\alpha_1) < \infty$，$\sigma_p(\beta_1) < \infty$，$\sigma_p(h) < \infty$. 若 $\mu_p(g_f) < \infty$，则由引理 4 和引理 5 及(36)式可知 $\mu_p(f) < \infty$，矛盾. 故 $\mu_p(g_f) = \mu_p(f) = \sigma_p(f) = \sigma_p(g_f) = \infty$.

一方面，由引理 4 和引理 5 及(33)式可得 $\mu_{p+1}(g_f) \leqslant \mu_{p+1}(f)$，$\sigma_{p+1}(g_f) \leqslant \sigma_{p+1}(f)$. 另一方面，由引理 4 和引理 5 及(36)式可得 $\mu_{p+1}(f) \leqslant \mu_{p+1}(g_f)$，$\sigma_{p+1}(f) \leqslant \sigma_{p+1}(g_f)$. 故 $\mu_{p+1}(g_f) = \mu_{p+1}(f)$，$\sigma_{p+1}(g_f) = \sigma_{p+1}(f)$.

记 $\omega = g_f - \varphi$. 由于 $\sigma_p(\varphi) < \infty$，因此有

$$\mu_p(\omega) = \mu_p(g_f) = \mu_p(f) = \sigma_p(f) = \sigma_p(g_f) = \sigma_p(\omega) = \infty$$

和

$$\mu_{p+1}(\omega) = \mu_{p+1}(g_f) = \mu_{p+1}(f) \leqslant \sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(g_f) = \sigma_{p+1}(\omega).$$

将 $g_f = \omega + \varphi$ 代入(36)式可得

$$f = \frac{1}{h}(\alpha_1\omega' - \beta_1\omega) + \frac{1}{h}(\alpha_1\varphi' - \beta_1\varphi) = \frac{\alpha_1}{h}\omega' - \frac{\beta_1}{h}\omega + \psi, \tag{37}$$

其中 $\psi(z) = (\alpha_1\varphi' - \beta_1\varphi)/h \not\equiv 0$. 将(37)式代入方程(1)可得

$$\frac{\alpha_1}{h}\omega''' + \sum_{i=0}^{2}\phi_i(z)\omega^{(i)} = -(\psi'' + A_1(z)\psi' + A_0(z)\psi),$$

其中 $\phi_i(z)$ $(i = 0,1,2)$ 是 Δ 内亚纯函数且满足 $\sigma_p(\phi_i) < \infty (i = 0,1,2)$. 又由 $\sigma_p(\varphi) < \infty$ 可知 $\sigma_p(\psi) < \infty$. 从而，由引理 3 及 $\psi(z) \not\equiv 0$ 可知 $\psi(z)$ 不可能是方程(1)的解，即

$\psi'' + A_1(z)\psi' + A_0(z)\psi \not\equiv 0$. 故由引理 6 可得 $\overline{\lambda}_p(\omega) = \lambda_p(\omega) = \sigma_p(\omega)$，$\overline{\lambda}_{p+1}(\omega) = \lambda_{p+1}(\omega) = \sigma_{p+1}(\omega)$，由引理 7 可得 $\underline{\overline{\lambda}}_p(\omega) = \underline{\lambda}_p(\omega) = \mu_p(\omega)$，$\underline{\overline{\lambda}}_{p+1}(\omega) = \underline{\lambda}_{p+1}(\omega) = \mu_{p+1}(\omega)$，即

$$\underline{\overline{\lambda}}_p(g_f - \varphi) = \mu_p(g_f) = \mu_p(f) = \sigma_p(f) = \sigma_p(g_f) = \overline{\lambda}_p(g_f - \varphi) = \infty$$

和

$$\underline{\overline{\lambda}}_{p+1}(g_f - \varphi) = \mu_{p+1}(g_f) = \mu_{p+1}(f) \leqslant \sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(g_f) = \overline{\lambda}_{p+1}(g_f - \varphi).$$

定理 2 得证.

4　参考文献

[1] Cao Tingbin, Yi Hongxun. The growth of solutions of linear differential equations with coefficients of iterated order in the unit disc [J]. J Math Anal Appl, 2006, 319(1): 278-294.

[2] Cao Tingbin. The growth, oscillation and fixed points of solutions of complex linear differential equations in the unit disc [J]. J Math Anal Appl, 2009, 352(2): 739-748.

[3] 曹廷彬，仪洪勋. 关于单位圆内解析系数的二阶线性微分方程的复振荡[J]. 数学年刊, 2007, 28A(5): 719-732.

[4] Farissi A El, Belaïdi B, Latreuch Z. Growth and oscillation of differential polynomials in the unit disc [J]. Electron J Diff Equ, 2010, 87: 1-7.

[5] Belaïdi B. Growth and oscillation of some class of differential polynomials in the unit disc [J]. Kragujevac J Math, 2011, 35(3): 369-386.

[6] Heittokangas J. On complex differential equations in the unit disc [J]. Ann Acad Sci Fenn Math Diss, 2000, 122: 1-54.

[7] Farissi A El, Belaïdi B. On oscillation theorems for differential polynomials [J]. Electron J Qual Theory Differ Equ, 2009, 22: 1-10.

[8] Laine I, Rieppo J. Differential polynomials generated by linear differential equations [J]. Complex Var Theory Appl, 2004, 49(12): 897-911.

[9] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[10] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[11] 胡汇. 复平面及单位圆内齐次线性微分方程解的增长性和值分布[D]. 南昌: 江西师范大学, 2013: 1-43.

[12] Bank S B. A general theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations [J]. Compositio Math, 1972, 25(1): 61-70.

[13] 涂金，黄海霞，徐洪焱，等. 单位圆内亚纯函数与解析函数的级与型[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37(5): 449-452.

[14] Cao Tingbin, Deng Zhongshu. Solutions of non-homogeneous linear differential equations in the unit disc [J]. Ann Polon Math, 2010, 97(1): 51-61.

(下转第 516 页)

The Growth of Solutions of a Class of Higher Order Complex Differential Equations

GONG Pan, XIAO Li-peng*
(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The growth of solutions of the higher order linear differential equations $f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} P_j(e^{-z}) f^{(j)} + Q(z) f = 0$ are discussed, where $Q(z)$ is a transcendental entire function of finite order, and $P_j(e^{-z})$ are non-constant polynomials. Some conditions on $Q(z)$ are given which can guarantee that every non-trivial solution of the equation is infinite order, the growth of solutions to the corresponding non-homogeneous differential equation is discussed.

Key words: differential equations; angular domain; the order of growth

(责任编辑:王金莲)

(上接第 511 页)

The Value Distribution of Differential Polynomials Generated by Solutions of Linear Differential Equations with Meromorphic Coefficients in the Unit Disc

ZHAN Mei-long, ZHENG Xiu-min*
(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The growth of homogeneous and non-homogenous linear differential equations with meromorphic coefficients in the unit disc $\Delta = \{z \in C: |z| < 1\}$ is investigated and the iterated (lower) convergence exponent of the sequence of the points is estimated accurately, where the differential polynomials, generated by meromorphic solutions of the equations involved, take the same value with small function.

Key words: unit disc; meromorphic function; linear differential equation; differential polynomial

(责任编辑:王金莲)