第 38 卷 第 5 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 38 No. 5
2014 年 9 月　　Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science)　　Sep. 2014

文章编号:1000-5862(2014)05-0512-04

某类高阶复微分方程解的增长性

龚　攀,肖丽鹏*

(江西师范大学数学与信息科学学院,江西 南昌　330022)

摘要: 主要研究高阶微分方程 $f^{(k)}+\sum\limits_{j=1}^{k-1}P_j(\mathrm{e}^{-z})f^{(j)}+Q(z)f=0$ 解的增长性,其中 $Q(z)$ 是有限级超越整函数,$P_j(\mathrm{e}^{-z})\ (j=1,2,\cdots,k-1)$ 为 e^{-z} 的非常数多项式. 当 $Q(z)$ 满足一定条件时,该微分方程的任意非平凡解为无穷级解,并讨论了对应的非齐次微分方程解的增长性.

关键词: 微分方程;角域;增长级

中图分类号: O 174.52　　**文献标志码:** A

0　引言及主要结论

假定读者熟悉 Nevanlinna 理论中的基本结果和标准记号[1-4],并用 $\rho(f)$ 表示复平面上亚纯函数 $f(z)$ 的增长级,$\lambda(f)$ 和 $\overline{\lambda}(f)$ 分别表示 f 的零点收敛指数和不同零点收敛指数,用 $\lambda_2(f)$ 和 $\overline{\lambda}_2(f)$ 分别表示 $f(z)$ 的 2 级零点收敛指数和 2 级不同零点收敛指数,$\rho_2(f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的超级,定义如下:

$$\rho_2(f)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+T(r,f)}{\log r}.$$

为进一步刻画解析函数在角域里的增长性,引入下面的定义.

定义 1[5]　设 $f(z)$ 是角域 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)=\{z:\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta,|z|>0,0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi\}$ 上非零解析函数,用 $\rho_{\alpha\beta}(f)$ 记做 $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)$ 上的级,其定义为

$$\rho_{\alpha\beta}(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+\log^+(M(r,\overline{\Omega}(\alpha,\beta),f))}{\log r},$$

其中 $M(r,\overline{\Omega}(\alpha,\beta),f)=\max\limits_{|z|\leqslant r,\theta\in\overline{\Omega}(\alpha,\beta)}|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|$.

易知,若 f 是整函数,则在任一个角域内有 $\rho_{\alpha\beta}(f)\leqslant\rho(f)$. 特别地,如果在角域 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)$ 的增长级 $\rho_{\alpha\beta}(f)=+\infty$,则 $\rho(f)=+\infty$.

定义 2　设 $E\subset(0,+\infty)$ 上的可测集,用 $m(E)=\int_E\mathrm{d}t$ 表示 E 的线性测度;对 $E\subset(1,+\infty)$,用 $m_l(E)=\int_E\mathrm{d}t/t$ 表示 E 的对数测度;$E(E\subset(1,\infty))$ 的上对数密度定义为

$$\overline{\log d_{ens}E}=\overline{\lim_{r\to\infty}}m_l(E\cap[1,r])/\log r.$$

关于线性微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0,\qquad(1)$$

其中 $A(z)$ 和 $B(z)$ 均为整函数. 若 $A(z)$ 为整函数,$B(z)\neq 0$ 为超越的整函数,f_1,f_2 为方程(1)的 2 个线性无关解,则 f_1,f_2 至少有 1 个具有无穷级[6]. 另一方面,方程(1)也可能存在有穷级解,例如 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 是方程 $f''+\mathrm{e}^{-z}f'-(\mathrm{e}^{-z}+1)f=0$ 的有穷级解. 一个自然的问题:当 $A(z)$ 和 $B(z)$ 满足什么条件时,能保证(1)式的每个解具有无穷级?很多学者研究了这个问题,参见文献[7-10].

例如,在文献[8]中讨论微分方程 $f''+\mathrm{e}^{-z}f'+Q(z)f=0$,并得到了如下一些结果.

定理 A　假设 $A_j(z)(\neq 0)\ (j=0,1)$ 是整函数满足 $\rho(A_j)<1$,a,b 是复常数,且满足 $ab\neq 0$ 和 $a=cb(c>1)$,则方程

$$f''+A_1(z)\mathrm{e}^{az}f'+A_0(z)\mathrm{e}^{bz}f=0$$

的所有非零解为无穷级.

定理 B　假设 $A_j(z)(\neq 0)$,$D_j(z)\ (j=0,1)$ 是整函数满足 $\rho(A_j)<1$,$\rho(D_j)<1$,a,b 是复常数,并且 $ab\neq 0$ 和 $\arg a\neq\arg b$ 或者 $a=cb(0<c<1)$,则方程

$$f''+(A_1(z)\mathrm{e}^{az}+D_1)f'+(A_0(z)\mathrm{e}^{bz}+D_0)f=0$$

的每个非零解为无穷级.

文献[11]讨论了微分方程 $f''+\mathrm{e}^{-z}f'/(\mathrm{e}^z+1)+$

收稿日期:2014-01-15

基金项目:国家自然科学基金(11301232,11171119),江西省自然科学基金(20132BAB211009)和江西省教育厅青年科学基金(GJJ12207)资助项目.

通信作者:肖丽鹏(1979-),女,江西吉安人,副教授,博士,主要从事复分析研究.

$Q(z)f=0$，当 $Q(z)$ 满足某种条件时，可以保证方程每 1 个解具有无穷级.

本文考虑下列高阶线性微分方程

$$f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-1}P_j(e^{-z})f^{(j)}+Q(z)f=0, \qquad (2)$$

$$f^{(k)}+\sum_{j=1}^{k-1}P_j(e^{-z})f^{(j)}+Q(z)f=F \qquad (3)$$

解的增长级，其中 $Q(z)$ 为整函数，具有有限级，$P_j(e^{-z})(j=1,2,\cdots,k-1)$ 为 e^{-z} 的非常数多项式. 易知方程(2)的每 1 个解均为整函数. 下面考虑的问题是：当 $Q(z)$ 具备什么条件时，可以保证方程(2)的每个非平凡解均具有无穷级？本文得到如下一些结果.

定理 1　设 $Q(z)$ 为超越整函数且具有有限级，$P_j(e^{-z})(j=1,2,\cdots,k-1)$ 是 e^{-z} 的非常数多项式. 如果满足下列条件之一：

(i) $\rho(Q(z))=\lambda\neq 1$;

(ii) $Q(z)=h(z)e^{az}$，其中 $h(z)$ 是非零整函数且级小于 1，$a\notin R^-$ 的非零复常数，

则方程(2)的每个非零解 f 具有无穷级. 进一步在条件(ii)下有超级 $\rho_2(f)=1$.

定理 2　假设 $Q(z)$，$P_j(e^{-z})$ 满足定理 1 的条件，$F(\neq 0)$ 是有限级整函数，则方程(3)至多有 1 个可能的有限级例外解 f_0，其它的解 f 满足 $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=\infty$. 进一步，在定理 1 条件(ii)下有 $\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\rho_2(f)=1$.

1　主要引理

引理 1[12]　假设 $f(z)$ 是超越的亚纯函数且 $\rho(f(z))=\rho<\infty$，$H=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),\cdots,(k_q,j_q)\}$ 是不同整数对的有限集合，满足 $k_i>j_i\geq 0(i=1,2,\cdots,q)$. $\forall\varepsilon>0$，有下列结论成立：

(i) 存在 1 个线性测度是零的集合 $E\subset[0,2\pi]$，若 $\theta\in[0,2\pi]\setminus E$，则存在常数 $R_0=R_0(\theta)>0$，使得对所有满足 $\arg z=\theta$ 和 $|z|\geq R_0$ 的 z 以及对所有 $(k,j)\in H$，有

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)|\leq|z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)};$$

(ii) 存在 1 个对数测度有限的集合 $E\subset(1,\infty)$，使得对所有满足 $|z|\notin E\cup[0,1]$ 的 z 以及对所有 $(k,j)\in H$，有

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)|\leq|z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)};$$

(iii) 存在 1 个线性测度有限的集合 $E\subset[0,\infty)$，使得对所有满足 $|z|\notin E$ 的 z 及对所有 $(k,j)\in H$，有

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)|\leq|z|^{(k-j)(\rho+\varepsilon)}.$$

引理 2[13]　设 $g(r)$ 和 $h(r)$ 在 $(0,\infty)$ 上是单调的非减的实值函数，并且满足 $g(r)\leq h(r)$，$r\notin E$，其中例外集的 E 对数测度有限. 设 $\alpha>1$，则存在 1 个常数 $r_0>0$，使得 $g(r)\leq h(\alpha r)$ 对所有 $r>r_0$ 成立.

引理 3[14]　设 $A_j(z)(j=0,1,2,\cdots,k-1)$ 在角域 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)(0<\beta-\alpha<2\pi)$ 内解析，如果 $\forall K>0$ 及满足 $\alpha<\theta<\beta$ 和

$$\varliminf_{r\to\infty}[A_1(re^{i\theta})+A_2(re^{i\theta})+\cdots+A_{k-1}(re^{i\theta})+1)r^K]/A_0(re^{i\theta})=0$$

的 θ 具有一正测度，则方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+A_{k-2}f^{(k-2)}+\cdots+A_0f=0$ 的任意非零解都有

$$\rho_{\alpha\beta}(f)=+\infty.$$

引理 4[8]　假设 $P(z)=(\alpha+i\beta)z^n+\cdots(\alpha,\beta$ 是实数，$|\alpha|+|\beta|\neq 0)$ 是多项式且次数 $n\geq 1$，$A(z)(\neq 0)$ 是整函数且 $\rho(A)<n$，令 $g(z)=A(z)e^{P(z)}$，$z=re^{i\theta}$，$\delta(P,\theta)=\alpha\cos n\theta-\beta\sin n\theta$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在集合 $H_1\subset[0,2\pi)$，其线性测度为零，满足 $\forall\theta\in[0,2\pi)\setminus(H_1\cup H_2)$，$\exists R>0$，使得对 $|z|=r>R$，有

(i) 如果 $\delta(P,\theta)>0$，则

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}<|g(re^{i\theta})|<\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\};$$

(ii) 如果 $\delta(P,\theta)<0$，则

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}<|g(re^{i\theta})|<\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\},$$

其中 $H_2=\{\theta\in[0,2\pi);\delta(P,\theta)=0\}$ 是有限集.

引理 5[15]　ρ 级$(1/2\leq\rho<\infty)$整函数 $f(z)$ 至少存在 1 个 ρ 级射线角域同时其每一 ρ 级射线角域的开度不小于 π/ρ.

引理 6[16]　假设 $f(z)$ 是 1 个级 $\rho(f)=\rho<1/2$ 的整函数，并且定义

$$m(r)=\inf_{|z|=r}\log|f(z)|,$$

若 $\sigma<\rho$，则集合 $\{r:m(r)>r^\sigma\}$ 有正的上对数密度.

引理 7[17]　假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F(\neq 0)$，$f$ 满足微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+A_{k-2}f^{(k-2)}+\cdots+A_0f=F$ 且 $\max\{\rho(F),\rho(A_j);j=0,1,\cdots,k-1\}<\rho(f)=\rho(0<\rho(f)\leq\infty)$，则 $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)$.

引理 8[18]　设 $A_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 是整函数且满足 $\rho(A_j)\leq\rho<\infty$. 若 f 是微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0$ 的解，则 $\rho_2(f)\leq\rho$.

引理 9[12]　假设 $f(z)$ 为亚纯函数，$\alpha>1$ 是 1 个

给定的常数,则存在1个具有有穷对数测度的集合 $E \subset [1,+\infty)$,且存在常数 $B>0$ 仅依赖于 α 与 (k,j)(k,j 为整数且 $k>j\geqslant 0$),使得对所有满足 $|z|=r\notin E$ 的点 z,有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant B\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}(\log^{\alpha} r)\log T(\alpha r,f)\right)^{k-j}.$$

2 定理的证明

定理1的证明 假设定理1满足条件(i),由于 $\rho(Q(z))=\lambda\neq 1$,下面分2种情况证明.

(Ⅰ)$\rho(Q(z))=\lambda>1$;

(Ⅱ)$\rho(Q(z))=\lambda<1$.

首先证明(Ⅰ)$\rho(Q(z))=\lambda>1$. 假设方程存在1个级为 $\rho(f)(<\infty)$ 的非零解 f,将得到矛盾. 据引理1得,$\forall\varepsilon>0$,存在1个集合 $E\subset(1,\infty)$,其对数测度有限,使得对一切满足 $r\notin E\cup[0,1]$ 的 z 及对所有 $(k,j)\in H$,有

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)|\leqslant |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)} \tag{4}$$

成立,从而可得

$$m(r,f^{(j)}/f)=O(\log r)\ (r\notin E\cup[0,1]),j=1,2,\cdots,k). \tag{5}$$

由方程(2)得

$$Q(z)=-(f^{(k)}/f+P_{k-1}(e^{-z})f^{(k-1)}/f+P_{k-2}(e^{-z})f^{(k-2)}/f+\cdots+P_1(e^{-z})f'/f), \tag{6}$$

由(4)~(6)式可得

$$m(r,Q(z))\leqslant\sum_{j=1}^{k}m(r,f^{(j)}/f)+\sum_{j=1}^{k-1}m(r,P_j(e^{-z}))+\log k\leqslant\sum_{j=1}^{k-1}m(r,P_j(e^{-z}))+O(\log r).$$

于是对所有的 $r\notin E\cup[0,1]$,有

$$T(r,Q(z))\leqslant\sum_{j=1}^{k-1}m(r,P_j(e^{-z}))+O(\log r)\leqslant\sum_{j=1}^{k-1}T(r,P_j(e^{-z}))+O(\log r).$$

设 $\alpha>1$,利用引理2,存在1个常数 $r_0>0$,使得

$$T(r,Q(z))\leqslant T(\alpha r,P_1(e^{-z}))+\cdots+T(\alpha r,P_{k-1}(e^{-z}))+O(\log\alpha r)$$

对所有的 $r\geqslant r_0$ 成立,由级的定义得 $\rho(Q(z))\leqslant\rho(P_j(e^{-z}))=1$,这与 $\rho(Q(z))=\lambda>1$ 矛盾. 故得 $\rho(f)=\infty$.

下面证明(Ⅱ)$\rho(Q(z))=\lambda<1$. 由于 $Q(z)$ 是复平面上的超越整函数,以下分3种情形讨论.

情形1 当 $1/2\leqslant\rho(Q(z))<1$,由引理5知存在角域 $\Omega(\alpha,\beta)=\{z\mid\alpha<\arg z<\beta,|z|>0\}$($\alpha-\beta\geqslant\pi/\rho(Q)$),使得 $\forall\theta(\alpha<\theta<\beta)$,有

$$\rho(Q(z))=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log^{+}\log^{+}|Q(re^{i\theta})|/\log r. \tag{7}$$

由于 $\rho(Q)<\rho(P_j)=1$,从而有 $\pi/\rho(P_j)<\pi/\rho(Q)$. 对 $P_j(e^{-z})$ 来说,在复平面上对于正、负虚轴右半平面的角域有 $P_j(e^{-z})\to 0(|z|\to\infty)$,左半平面的角域有 $P_j(e^{-z})\to\infty(|z|\to\infty)$. 由于 $\pi/\rho(Q)>\pi$,于是总存在角域 $\Omega(\alpha',\beta')$,使得在此角域内 $P_j(e^{-z})\to 0(|z|\to\infty)$,$Q(z)$ 满足(7)式. 再根据引理3可知,对任何的常数 $K>0$,$\exists\arg z=\theta(\alpha'\leqslant\theta\leqslant\beta')$,使得

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}[P_1(re^{i\theta})+P_2(re^{i\theta})+\cdots+P_{k-1}(re^{i\theta})+1)r^K]/Q(re^{i\theta})=0$$

成立. 于是可知对于方程(2)的任一非零解 f,都有 $\rho_{\alpha'\beta'}(f)=\infty$. 从而在整个复平面上有 $\rho(f)=\infty$.

情形2 当 $0<\rho(Q(z))<1/2$ 时,应用引理6,存在一点列 $\{r_n\}$ 满足 $\lim\limits_{r\to\infty}r_n=\infty$,使得对任意的角 $\arg z=\theta(\theta\in[0,2\pi))$,有

$$|Q(r_ne^{i\theta})|>\exp(r_n^{\rho(Q)-\varepsilon}).$$

类似于情形1的证明方法可得矛盾. 于是对方程(2)的任一非零解 f,均有 $\rho(f)=\infty$.

情形3 当 $\rho(Q(z))=0$ 时,由于 $Q(z)$ 是1个超越的整函数,容易得到对于任意的角 $\arg z=\theta$($0\leqslant\theta<2\pi$),有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log^{+}|Q(re^{i\theta})|/\log r=\infty.$$

类似情形1的证明方法同样可得矛盾. 于是对方程(2)的任一非零解 f,均有 $\rho(f)=\infty$. 因而情形(i)的结论成立.

下面证明定理1满足条件(ii)$Q(z)=h(z)e^{az}$.

令 $a=\alpha+i\beta$,α,β 是实数,$z=re^{i\theta}$,则 $\delta(az,\theta)=\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta$.

下面证明断言:使得 $\delta(az,\theta)>0$ 的 θ 角域存在且和复平面上的右半平面有交集,并且交集具有正测度. 设其交集为 E,分3种情况讨论.

情形1 若 $\alpha=0,\beta\neq 0$,则 $\delta(az,\theta)=-\beta\cdot\sin\theta$,当 $\beta>0$ 时,$\sin\theta<0$,取 $E=(-\pi/2,0)$,则 $m(E)>0$;当 $\beta<0$ 时,$\sin\theta>0$,取 $E=(0,\pi/2)$,则 $m(E)>0$.

情形2 若 $\alpha\neq 0,\beta=0$,则 $\delta(az,\theta)=\alpha\cos\theta$,因为 $a\notin R^-$ 的非零复常数,即 $\alpha\notin R^-$,则 $\cos\theta>0$.

类似情形1,可知断言成立.

情形3 若 $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$,则 $\delta(az,\theta)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(\varphi+\theta)>0$,分 φ 属于第1、2、3、4象限

时分别讨论,不妨设 φ 属于第 1 象限,其余情形类似讨论. $\cos\varphi = \alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$,可知 $\varphi = \arccos\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$,此时只需取 $E = (-\pi/2, \pi/2 - \arccos\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$,显然有 $m(E) > 0$. 综上可知断言成立.

设 $E = (\phi_1, \phi_2)$,由引理 4 知,$\forall\varepsilon > 0$,存在集合 $H_1 \subset [0, 2\pi)$,其线性测度为零,当 $\theta \in (\phi_1, \phi_2) \cap [0, 2\pi) \backslash (H_1 \cup H_2)$,$\exists R > 0$,当 $|z| = r > R$ 时,有

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(az,\theta)r\} < |Q(re^{i\theta})| < \exp\{(1+\varepsilon)\delta(az,\theta)r\}. \tag{8}$$

于是,$\forall K > 0$,有

$$\lim_{r\to\infty}[P_1(re^{i\theta}) + P_2(re^{i\theta}) + \cdots + P_{k-1}(re^{i\theta}) + 1)r^K]/Q(re^{i\theta}) = 0.$$

由引理 3 可知,对于方程(2)的任一非零解 f,都有 $\rho_{\phi_1\phi_2}(f) = \infty$. 也就是说在整个复平面上有 $\rho(f) = \infty$.

下证超级 $\rho_2(f) = 1$.

根据引理 8 可得 $\rho_2(f) \leqslant \max\{\rho(P_j), j = 1, 2, \cdots, k-1\} = 1$. 由(ii)中的断言,现在考虑角域 $\Omega = (\phi_1, \phi_2)$,在此角域内 $P_j(e^{-z}) \to 0(|z| \to \infty)$ 具有(8)式成立.

另一方面,由引理 9 可知,存在 1 个集合 $E_1 \subset [1, +\infty)$ 具有有穷对数测度和常数 $B > 0$,使得当 $|z| = r \notin E_1$ 且 r 充分大时,有

$$|f^{(j)}(z)/f(z)| \leqslant B(T(2r,f))^{2k}(j = 1, 2, \cdots, k). \tag{9}$$

又由(6)式和(9)式在角域 $\Omega = (\phi_1, \phi_2)$ 内,有

$$|Q(z)| = |h(z)e^{az}| \leqslant |f^{(k)}/f| + \sum_{j=1}^{k-1}|P_j f^{(j)}/f| \leqslant B(T(2r,f)^{2k}) + O(1)[(k-1)T(2r,f)^{2k-2}] \leqslant 2BT(2r,f)^{2k}. \tag{10}$$

由(8)式和(10)式得

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(az,\theta)r\} \leqslant 2BT(2r,f)^{2k}. \tag{11}$$

对(11)式取 2 次对数再除以 $\log r$,则 $\rho_2(f) \geqslant 1$. 所以 $\rho_2(f) = 1$. 从而(ii)得证.

综上所述定理 1 得证.

定理 2 的证明　假设 f_0 是方程(3)的有限级解,如果方程还有另外 1 个有限级解 $f_1(\neq f_0)$,则 $\rho(f_1 - f_0) < \infty$,且 $f_1 - f_0$ 为方程(2)的解,由定理 1 知,$\rho(f_1 - f_0) = \infty$,所以矛盾. 故方程(3)至多有 1 个可能的有限级例外解 f_0. 现在假设 f 为(3)的无穷级解,应用引理 7,可得 f 满足 $\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f) = \infty$. 进一步的情形可类似证明,定理 2 得证.

3　参考文献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] 张广厚. 整函数与亚纯函数理论: 亏值, 渐进值和奇异方向[M]. 北京: 科学出版社, 1986.

[3] Hayman W. Meromorphic function[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[4] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations[M]. Berlin: W de Gruyter, 1993.

[5] Wu Shengjian. On the growth of solutions of second order linear differential equations in an angle[J]. Complex Variables, 1994, 24(3/4): 241-248.

[6] Hille E. Ordinary differential equations in the complex domain[M]. New York: Wiley, 1976.

[7] Hellenstein S, Miles J, Rossi J. On the growth of solutions of $f'' + gf' + hf = 0$[J]. Trans Amer Math Soc, 1991, 324(2): 693-706.

[8] 陈宗煊. 微分方程 $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$ 解的增长性[J]. 中国科学: A 辑, 2001, 31(9): 775-784.

[9] 刘旭强, 易才凤. 关于 2 阶线性微分方程 $f'' + Af' + B = 0$ 解的增长性[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 37(2): 171-174.

[10] 李延玲, 刘慧芳, 冯斌. 微分方程 $f'' + A_1(z)e^{az^n}f' + A_0(z)e^{az^n}f = F(z)$ 的复振荡[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(6): 579-583.

[11] 陶磊, 龙见仁, 伍鹏程. 关于微分方程 $f'' + e^{-z}/(e^z + 1)f' + Q(z)f = 0$ 解的增长性[J]. 贵州师范大学学报: 自然科学版, 2013, 31(2): 46-49.

[12] Gundersen G G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates[J]. J London Math Soc, 1988, 37(2): 88-104.

[13] Bank S. A general theorem concerning the growth of solutions of first order algebraic differential equations[J]. Composition Math, 1972, 25(1): 61-70.

[14] 徐俊峰, 仪洪勋. 高阶线性微分方程解的角域增长性[J]. 系统科学与数学, 2008, 28(6): 702-708.

[15] 戴宗基, 嵇善瑜. ρ 级射线及其 Borel 方向分布间的关系[J]. 上海师范大学学报: 自然科学版, 1982(2): 16-24.

[16] Barry P. Some theorems related to the cos $\pi\rho$ theorem[J]. Proc London Math Soc, 1970, 21(3): 334-360.

[17] Chen Zongxuan, Gao Shian. On the complex oscillation of non-homogeneous linear differential equations with meromorphic coefficients[J]. Kodai Math J, 1992, 15(1): 66-78.

[18] Chen Zongxuan. On the hyper order of solutions of higher order differential equations[J]. Chin Ann Math, 2003, 24B(4): 501-508.

The Growth of Solutions of a Class of Higher Order Complex Differential Equations

GONG Pan, XIAO Li-peng*
(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The growth of solutions of the higher order linear differential equations $f^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} P_j(e^{-z}) f^{(j)} + Q(z) f = 0$ are discussed, where $Q(z)$ is a transcendental entire function of finite order, and $P_j(e^{-z})$ are non-constant polynomials. Some conditions on $Q(z)$ are given which can guarantee that every non-trivial solution of the equation is infinite order, the growth of solutions to the corresponding non-homogeneous differential equation is discussed.

Key words: differential equations; angular domain; the order of growth

(责任编辑: 王金莲)

(上接第 511 页)

The Value Distribution of Differential Polynomials Generated by Solutions of Linear Differential Equations with Meromorphic Coefficients in the Unit Disc

ZHAN Mei-long, ZHENG Xiu-min*
(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The growth of homogeneous and non-homogenous linear differential equations with meromorphic coefficients in the unit disc $\Delta = \{z \in C: |z| < 1\}$ is investigated and the iterated (lower) convergence exponent of the sequence of the points is estimated accurately, where the differential polynomials, generated by meromorphic solutions of the equations involved, take the same value with small function.

Key words: unit disc; meromorphic function; linear differential equation; differential polynomial

(责任编辑: 王金莲)