文章编号:1000-5862(2014)05-0517-04

# Adomian 分解法求解非线性分数阶 Volterra 积分方程

全晓静,韩惠丽*,王　健
(宁夏大学数学计算机学院,宁夏 银川　750021)

**摘要**:Adomian 分解法求解非线性分数阶 Volterra 积分方程的数值解,将 Adomian 多项式与积分方程的定义相结合,得出一个递推公式求解方程的级数解,并进行了收敛性分析,给出了级数解的最大绝对截断误差,通过数值算例说明了该方法的有效性和可行性.

**关键词**:分数阶积分方程;Adomian 多项式;收敛性分析;误差估计
**中图分类号**:O 175.5　　**文献标志码**:A

## 0　引言

分数阶微积分理论已经逐渐完善,自 Leibinz 开始考虑分数阶概念以来,分数阶微积分被国内外学者广泛的研究. 近年来,分数阶微积分被广泛的应用在混沌系统、粘弹性力学等问题中,这些问题经过建模后得到的方程大多数都是分数阶积分微分方程或者分数阶积分方程,对于这种方程来说,求其解析解是相当困难的,甚至很多方程根本没有解析解. 因此,对于分数阶积分方程数值解法国内外学者提出了配置法、Legendre 多项式、小波法等[1-2]求解方法.

Adomian 分解法自从被提出以来,广泛应用于线性和非线性的数学物理方程的求解中,尤其是求解动力系统问题. G. Adomian[3-4]给出了 Adomian 分解法的基本思想并用它求解一些动力系统的数值逼近解. 梁祖峰等[5]用 Adomian 分解法求解分数阻尼梁的解析解,与传统的数值方法比较发现 Adomian 分解法不需要借助线性化、摄动或一些限制性的假设[6]. 因此,Adomian 方法被许多学者广泛应用. 近年来,用 Adomian 分解法逼近非线性方程的解析解(如 ODEs、PDEs、积分方程和积分微分方程)更显优势[7-9]. 2008 年 I. L. El-Kalla[7]运用 Adomian 分解法逼近非线性 Volterra 积分方程的解析解,2010 年 S. H. Behiry 等[8]对非线性 Fredholm 积分方程用离散的 Adomian 分解法逼近. 但是在非线性分数阶领域研究甚少,本文采用 Adomian 分解法求解非线性分数阶 Volterra 积分方程的数值解.

## 1　Adomian 分解法

考虑非线性分数阶 Volterra 积分方程[10]

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x K(x,t)(x-t)^{\alpha-1}f(\varphi(t))\,dt+g(x),\tag{1}$$

其中,$\Gamma(\alpha)$ 是 Gamma 函数($\alpha>0$),$K(x,t)$ 和 $g(x)$ 是已知函数,$g(x)$ 在 $\forall x\in I=[0,1]$ 上有界,且 $|K(x,t)|\leqslant M,\forall(x,t)\in\Omega=[0,1]\times[0,1]$,$M$ 为正整数. $\varphi(x)$ 是未知的连续函数,非线性项 $f(\varphi)$ 满足 Lipschiz 条件,$\exists L>0$,使得

$$|f(\varphi)-f(\psi)|\leqslant L|\varphi-\psi|,$$

非线性项 $f(\varphi)$ 可由 Adomian 多项式[6]表示为

$$f(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n),\tag{2}$$

其中

$$A_n=f(S_n)-\sum_{j=0}^{n-1}A_j,n\geqslant 1,\tag{3}$$

部分和 $S_n$ 定义为

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(x),\tag{4}$$

这里

$$A_0=f(\varphi_0),$$

因此,对(1)式运用 Adomian 分解法,将方程的解

收稿日期:2014-05-09
基金项目:国家自然科学基金(11261041)资助项目.
通信作者:韩惠丽(1972-),女,河北石家庄人,教授,博士,主要从事奇异积分方程数值解法的研究.

$\varphi(x)$ 分解为无穷个分量和的形式,即

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i(x), \tag{5}$$

将(2)式和(5)式代入(1)式得 ADM 递推公式:

$$\begin{cases}\varphi_0(x) = g(x),\\ \varphi_i(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^x K(x,t)(x-t)^{\alpha-1}A_{i-1}\mathrm{d}t,\end{cases}$$

(5)式即为(1)式的级数解,接下来证明(5)式级数解收敛到方程的精确解.

## 2 收敛性分析

定义映射 $T:E\to E$,其中 $E=(C[I],\|\cdot\|)$ 为区间 $I$ 上所有连续函数组成的 Banach 空间,定义该空间上的范数为 $\|\varphi(x)\| = \max\limits_{\forall x\in I}|\varphi(x)|$.

**定理 1** 积分方程(1)存在唯一解当且仅当 $0<\beta<1$,其中 $\beta = LM/\Gamma(\alpha+1)$.

**证** 映射 $T:E\to E$ 定义为

$$T\varphi = \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x K(x,t)(x-t)^{\alpha-1}f(\varphi)\mathrm{d}t + g(x),$$

$\forall\varphi,\psi\in E$,有

$$\|T\varphi - T\psi\| = \max_{\forall x\in I}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x K(x,t)(x-t)^{\alpha-1}\cdot[f(\varphi)-f(\psi)]\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\max_{\forall x\in I}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\cdot |K(x,t)||f(\varphi)-f(\psi)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\max_{\forall x\in I}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\cdot |f(\varphi)-f(\psi)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{LM}{\Gamma(\alpha)}\max_{\forall x\in I}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\cdot |\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{LM}{\Gamma(\alpha+1)}\|\varphi-\psi\| \leqslant \beta\|\varphi-\psi\|.$$

当 $0<\beta<1$ 时,$T$ 为压缩映射,由 Banach 压缩映射定理可知,(1)式存在唯一解. 定理 1 得证.

**定理 2** 积分方程(1)式的级数解(5)式是收敛的当且仅当 $0<\beta<1$,且 $g(x)$ 是有界函数.

**证** 令 $S_n, S_m$ 为(5)式的任一部分和,且 $n>m$,Banach 空间中只需证明$\{S_n\}$是 Cauchy 列. 由(4)式可知,

$$\|S_n - S_m\| = \max_{\forall x\in I}|S_n - S_m| = \max_{\forall x\in I}\left|\sum_{i=m+1}^{n}\varphi_i(x)\right| = \max_{\forall x\in I}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x K(x,t)(x-t)^{\alpha-1}\sum_{i=m+1}^{n}A_{i-1}\mathrm{d}t\right| = \max_{\forall x\in I}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x K(x,t)(x-t)^{\alpha-1}\sum_{i=m}^{n-1}A_i\mathrm{d}t\right|.$$

由(3)式可知,

$$\sum_{i=m}^{n-1}A_i = f(S_{n-1}) - f(S_{m-1}),$$

$$\|S_n - S_m\| = \max_{\forall x\in I}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x K(x,t)(x-t)^{\alpha-1}\cdot[f(S_{n-1})-f(S_{m-1})]\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\max_{\forall x\in I}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\cdot |f(S_{n-1})-f(S_{m-1})|\mathrm{d}t \leqslant \frac{LM}{\Gamma(\alpha)}\max_{\forall x\in I}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\cdot |S_{n-1}-S_{m-1}|\mathrm{d}t \leqslant \frac{LM}{\Gamma(\alpha+1)}\|S_{n-1}-S_{m-1}\| \leqslant \beta\|S_{n-1}-S_{m-1}\|.$$

令 $n=m+1$,可得

$$\|S_{m+1}-S_m\| \leqslant \beta\|S_m - S_{m-1}\| \leqslant\cdots\leqslant \beta^m\|S_1 - S_0\|.$$

由三角不等式可知,

$$\|S_n - S_m\| \leqslant \|S_n - S_{n-1}\| + \|S_{n-1}-S_{n-2}\| + \cdots + \|S_{m+1}-S_m\| \leqslant (\beta^{n-1}+\beta^{n-2}+\cdots+\beta^m)\|S_1 - S_0\| \leqslant \beta^m(\beta^{n-m-1}+\beta^{n-m-2}+\cdots+\beta+1)\|S_1-S_0\| \leqslant \beta^m\left(\frac{1-\beta^{n-m}}{1-\beta}\right)\|\varphi_1(x)\|,$$

因为 $0<\beta<1$,所以 $(1-\beta^{n-m})<1$,可得

$$\|S_n - S_m\| \leqslant \frac{\beta^m}{1-\beta}\max_{\forall x\in I}|\varphi_1(x)|, \tag{6}$$

其中 $\max\limits_{\forall x\in I}|\varphi_1(x)|<\infty$. 当 $m\to\infty$ 时,$\|S_n - S_m\|\to 0$,$\{S_n\}$ 是 Banach 空间上的 Cauchy 列. 因此,(5)式中的级数解收敛到方程的精确解. 定理 2 得证.

## 3 误差分析

**定理 3** 方程(1)式的级数解(5)式的最大绝对截断误差为

$$\max_{\forall x\in I}\left|\varphi(x) - \sum_{i=0}^{m}\varphi_i(x)\right| \leqslant \frac{\beta^m}{1-\beta}\max_{\forall x\in I}|\varphi_1(x)|.$$

**证** 由(6)式知,

$$\|S_n - S_m\| \leqslant \frac{\beta^m}{1-\beta}\max_{\forall x\in I}|\varphi_1(x)|,$$

当 $n\to\infty$ 时,得

$$\|\varphi(x) - S_m\| \leqslant \frac{\beta^m}{1-\beta}\max_{\forall x\in I}|\varphi_1(x)|,$$

由(4)式可得

$$\max_{\forall x\in I}\left|\varphi(x) - \sum_{i=0}^{m}\varphi_i(x)\right| \leqslant \frac{\beta^m}{1-\beta}\max_{\forall x\in I}|\varphi_1(x)|.$$

定理 3 得证.

# 4 数值算例

例 1　考虑非线性分数阶 Volterra 积分方程

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}[\varphi(t)]^2 dt + g(x),$$

其中 $\alpha = 2.5$,且

$$g(x) = \sqrt{x}[1 - 16x^{3/2}/(105\sqrt{\pi})],$$

此方程的精确解为 $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

分别取 $m = 1$,$m = 2$,$m = 3$,数值解与精确解的绝对误差如表 1 所示.

表 1　数值解与精确解的绝对误差

| $x$ | $m = 1$ | $m = 2$ | $m = 3$ | 精确解 |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 6.973 61e-10 | 6.217 25e-15 | 0 | 0.316 227 766 |
| 0.2 | 6.311 13e-8 | 4.491 07e-12 | 1.665 33e-16 | 0.447 213 595 |
| 0.3 | 8.801 92e-7 | 2.114 25e-10 | 2.420 29e-14 | 0.547 722 558 |
| 0.4 | 5.707 42e-6 | 3.250 57e-9 | 8.827 38e-13 | 0.632 455 532 |
| 0.5 | 2.431 98e-5 | 2.706 54e-8 | 1.436 00e-11 | 0.707 106 781 |
| 0.6 | 7.944 14e-5 | 1.528 80e-7 | 1.402 03e-10 | 0.774 596 669 |
| 0.7 | 2.159 61e-4 | 6.606 08e-7 | 9.624 27e-10 | 0.836 660 027 |
| 0.8 | 5.131 24e-4 | 2.345 99e-6 | 5.104 64e-9 | 0.894 427 190 |
| 0.9 | 1.099 75e-3 | 7.170 79e-6 | 2.223 20e-8 | 0.948 683 298 |

例 2　考虑非线性分数阶 Volterra 积分方程

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}[(\varphi(t))^2 + \varphi(t)] dt + g(x),$$

其中 $\alpha = 1.5$,$g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\pi}x^2/4 - 8x^{5/2}/(15\sqrt{\pi})$,此方程的精确解为 $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

分别取 $m = 1$,$m = 2$,$m = 3$,表 2 给出了本文方法的数值解与精确解的绝对误差.

表 2　数值解与精确解的绝对误差

| $x$ | $m=1$ | $m=2$ | $m=3$ | 精确解 |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 4.264 05e-5 | 1.888 72e-7 | 5.504 77e-10 | 0.316 227 766 |
| 0.2 | 5.812 15e-4 | 8.212 01e-6 | 7.622 41e-8 | 0.447 213 595 |
| 0.3 | 2.726 08e-3 | 7.698 20e-5 | 1.426 48e-6 | 0.547 722 558 |
| 0.4 | 8.208 68e-3 | 3.815 07e-4 | 1.627 90e-5 | 0.632 455 532 |
| 0.5 | 1.932 83e-2 | 1.327 41e-3 | 5.980 38e-5 | 0.707 106 781 |
| 0.6 | 3.887 68e-2 | 3.682 04e-3 | 2.291 43e-4 | 0.774 596 669 |
| 0.7 | 7.003 72e-2 | 8.714 88e-3 | 7.149 23e-4 | 0.836 660 027 |
| 0.8 | 1.162 55e-1 | 1.832 89e-2 | 1.915 35e-3 | 0.894 427 190 |
| 0.9 | 1.810 84e-1 | 3.51 588e-2 | 4.559 27e-3 | 0.948 683 298 |

由表 1 和表 2 可以发现,通过计算较少的 Adomian 多项式就可以有效地逼近非线性分数阶 Volterra 积分方程的精确解. 随着 $m$ 值的增大,绝对误差越来越小,且收敛速度越快.

# 5 结论与展望

本文利用 Adomian 分解法求解了非线性分数阶 Volterra 积分方程,通过收敛性分析证明了 Adomian 级数解在一定条件下收敛到方程的解析解,并给出了级数解的最大截断误差,最后通过数值算例验证了该方法的有效行和可行性. 同样,可以将这种方法用来求解非线性分数阶 Fredholm 积分方程[11-15]的数值解.

# 6 参考文献

[1] Lepik Ü. Sloving fractional integral equation by the Haar wavelet method [J]. Applied Mathematics and Computation,2009,214(2):468-478.

[2] 朱双云,苗福生,韩惠丽. 分数阶第一类 Volterra 积分方程小波数值解 [J]. 宁夏大学学报: 自然科学版,2012,33(2):130-134.

[3] Adomian G. Stochastic system [M]. New York: Academic Press,1983.

[4] Adomian G. A review of decomposition method in applied mathematics [J]. Journal of Mathematics Analysis and Application,1988,135(2):501-544.

[5] 梁祖峰,唐晓艳. 用 Adomian 分解法求解分数阻尼梁的

解析解[J]. 应用数学和力学,2007,28(2):200-208.
[6] Duan Junsheng,Randolph Rach,Dumitru Baleanu,et al. A review of the Adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations[J]. Commun Frac Calc,2012,3(2):73-99.
[7] El-Kalla I L. Convergence of the Adomian method applied to a class of nonlinear integral equations[J]. Applied Mathematics Letters,2008,21(4):372-376.
[8] Behiry S H,Abd-Elmonem R A,Gomaa A M. Discrete Adomian decomposition solution of nonlinear fredholm integral equation[J]. Ain Shams Engineering Journal,2010,1(1):97-101.
[9] 单锐,魏金侠,张雁,等. Adomian 分解法求解二维非线性 Volterra 积分方程的数值解[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2012,29(5):573-577.
[10] 黄洁,韩惠丽. 应用 Legendre 小波求解非线性分数阶 Volterra 积分微分方程[J]. 吉林大学学报:理学版,2014,52(4):655-660.
[11] 张倩,韩惠丽,张盼盼. 基于有理 Haar 小波求解分数阶第 2 类 Fredholm 积分方程[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2014,38(1):47-50.
[12] 陈一鸣,刘丽丽,孙璐,等. Adomain 分解法求解非线性分数阶 Fredholm 积分微分方程[J]. 应用数学,2013,26(4):785-790.
[13] 朱红玲,郝玲,余志先,等. Adomain 分解法求解非线性分数阶积分微分方程[J]. 辽宁工程技术大学学报:自然科学版,2013,32(1):132-135.
[14] 陈一鸣,孙慧,刘乐春,等. Legendre 多项式求解变系数的分数阶 Fredholm 积分微分方程[J]. 山东大学学报:理学版,2013,48(6):80-86.
[15] 仪明旭,陈一鸣,魏金侠,等. 应用 Haar 小波求解非线性分数阶 Fredholm 积分微分方程[J]. 河北师范大学学报:自然科学版,2012,36(5):452-455.

# The Adomian Decomposition Method for Sloving Nonlinear Volterra Integral Equations of Fractional Order

QUAN Xiao-jing,HAN Hui-li*,WANG Jian
(School of Mathematics and Computer Science,Ningxia University,Yinchuan Ningxia 750021,China)

**Abstract:** Application of Adomian decomposition method,series solution of nonlinear volterra integral equations of fractional order are approximately obtained. The equation is solved by combining Adomian polynomials with the definition of fractional order integral. Convergence of the series solution is proved and the maximum absolute truncated error of the Adomian series solution is also given. Thus,the effectiveness and feasibility of the Adomian decomposition method are illustrated by the numerical example.

**Key words:** fractional integral equation; Adomian polynomials; convergence analysis; error estimate

(责任编辑:曾剑锋)