第 38 卷 第 5 期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 5
2014 年 9 月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Sep. 2014

文章编号:1000-5862(2014)05-0531-03

关于图的 Fractional 控制数

徐保根,赵丽鑫,邹 妍

(华东交通大学理学院数学系,江西 南昌 330013)

摘要: 研究了图的 Fractional 控制问题,主要给出了关于联图的 Fractional 控制数的 1 个上界,由此确定了几类特殊联图的 Fractional 控制数,并推广了部分已知的结果.

关键词: 控制数; Fractional 控制数; 完全 t-部图; 联图

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

0 引言及定义

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[1-2].

设 G 为 1 个图,用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集. 对于任意顶点 $v\in V(G)$,定义 v 的邻域 $N(v)=\{u\mid uv\in E(G)\}$,闭邻域 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$. $d_G(v)=|N(v)|$ 为 v 点在 G 中的度,并且 $\Delta=\Delta(G)$ 和 $\delta=\delta(G)$ 分别表示图 G 的最大度和最小度. 对于 2 个点不交的图 G 和 H,则用 $G\vee H$ 表示 G 与 H 的联图,即在 $G\cup H$ 中将 G 的每个点与 H 的所有点邻接所成的图.

为了方便,若 $S\subseteq V(G)$,$f:V\to\mathbf{R}$ 为 1 个实值函数,则记 $f(S)=\sum\limits_{v\in S}f(v)$.

下面给出关于图的 Fractional 控制的定义.

定义 1[3] 设 $G=(V,E)$ 为 1 个图,实值函数 $f:V\to[0,1]$ 满足 $f(N[u])\geqslant 1$ 对一切 $u\in V(G)$ 都成立,则称 f 为图 G 的 1 个 Fractional 控制函数(简称为 F-控制函数). 图 G 的 Fractional 控制数(简称为 F-控制数)定义为

$$\gamma_f(G)=\min\{f(V)\mid f\text{ 为图 }G\text{ 的 }F\text{-控制函数}\}.$$

且称满足 $\gamma_f(G)=f(V)$ 的 F-控制函数为 1 个最小 F-控制函数. 对于任何图 G,由于常数函数 $f=1$ 总是 G 的 F-控制函数,故图 G 的 F-控制函数和 F-控制数均存在.

若 H 为图 G 的 1 个生成子图,则图 H 的任何 F-控制函数也是图 G 的 F-控制函数,因此有下面的引理 1.

引理 1 设 H 为图 G 的 1 个生成子图,则 $\gamma_f(G)\leqslant\gamma_f(H)$.

由定义 1 不难看出,对任意 n 阶图 G,均有 $1\leqslant\gamma_f(G)\leqslant n$,并进一步可得

引理 2 对任意 n 阶图 G,均有 $1\leqslant\gamma_f(G)\leqslant n$,并且有

(i) $\gamma_f(G)=n$ 当且仅当 $G=\overline{K_n}$ 为空图;

(ii) $\gamma_f(G)=1$ 当且仅当 $\Delta(G)=n-1$.

定义 2[4] 设 $G=(V,E)$ 为 1 个图,实值函数 $f:V\to[0,1]$ 满足 $f(N[u])\leqslant 1$ 对一切 $u\in V(G)$ 都成立,则称 f 为图 G 的 1 个 F-包装函数. 图 G 的(上)F-包装数定义为

$$P_f(G)=\max\{f(V)\mid f\text{ 为图 }G\text{ 的(上)}F\text{-包装函数}\},$$

并且称满足 $P_f(G)=f(V)$ 的(上)F-包装函数为 1 个最大 F-包装函数.

引理 3 对任意图 G,均有 $P_f(G)=\gamma_f(G)$.

由文献[3]和引理 3 可导出 F-控制数的界限.

引理 4 对任意 n 阶图 G,均有

$$\frac{n}{1+\Delta}\leqslant\gamma_f(G)\leqslant\frac{n}{1+\delta}.$$

特殊地,当 G 为 n 阶 r-正则图时,则

$$\gamma_f(G)=n/(1+r).$$

由上述 2 个定义及引理 3 可知,对于 1 个给定图 G,如果存在实值函数 $f:V\to[0,1]$,使得 $\forall u\in V(G)$ 均有 $f(N[u])=1$ 成立,则函数 f 既是 G 的最小 F-控制函数,又是 G 的最大 F-包装函数,从而有

收稿日期:2014-05-25

基金项目:国家自然科学基金(11361024,11261019),江西省自然科学基金(20114BAB201010)和江西省教育厅科技计划(GJJ12295)资助项目.

作者简介:徐保根(1963-),男,江西南昌人,教授,主要从事图论及其应用研究.

下面的结论成立.

引理 5 设 G 为 1 个图,如果存在实值函数 f: $V \to [0,1]$,使得 $\forall u \in V(G)$ 均有 $f(N[u]) = 1$ 成立,则 $\gamma_f(G) = P_f(G) = f(V(G))$.

利用引理 4 可确定一些特殊图的 F-控制数,如完全二部图 $K_{m,n}$ 等.

引理 6 设 $2 \leqslant s \leqslant r$ 且它们均为整数,则

$$\gamma_f(K_{r,s}) = \frac{r(s-1)+s(r-1)}{rs-1}.$$

1988 年,G. S. Domke 等[3] 首次提出且研究了图的 F-控制问题,E. O. Hare 等[5-6] 分别研究了关于乘积图的 F-控制数,文献 [7] 讨论了乘积图的边控制问题. 本文先确定完全 t-部图的 F-控制数($t \geqslant 2$),从而推广了引理 6 的结果,并给出关于联图的 F-控制数的 1 个上界,由此导出一些特殊联图的 F-控制数.

1 主要结果及证明

首先给出完全 t-部图 $K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 的 F-控制数($t \geqslant 2$).

定理 1 设 $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_t \geqslant 2$ 且它们均为整数($t \geqslant 2$),$T = \sum\limits_{i=1}^{t} \dfrac{1}{n_i - 1}$,则

$$\gamma_f(K(n_1,n_2,\cdots,n_t)) = \frac{T+t}{T+t-1}.$$

证 记 $G = K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$,$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_t$ 为其 t-部顶点划分[8],其中 $|V_i| = n_i$ ($1 \leqslant i \leqslant t$). 定义图 G 上的 1 个实值函数 f: $V(G) \to [0,1]$ 如下:

对于每个 V_i($1 \leqslant i \leqslant t$),当 $u \in V_i$ 时,令 $f(u) = 1/[(T+t-1)(n_i-1)]$.

因 $t \geqslant 2$ 且 $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_t \geqslant 2$,故 $0 \leqslant f(u) \leqslant 1$,并且有

$$f(N[u]) = f(V_1) + f(V_2) + \cdots + f(V_{i-1}) + f(u) + f(V_{i+1}) + \cdots + f(V_t) = \frac{1}{T+t-1}\left(\frac{n_1}{n_1-1} + \frac{n_2}{n_2-1} + \cdots + \frac{n_{i-1}}{n_{i-1}-1} + \frac{1}{n_i-1} + \frac{n_{i+1}}{n_{i+1}-1} + \cdots + \frac{n_t}{n_t-1}\right) = \frac{1}{T+t-1}\left(t-1+\sum_{j=1}^{t}\frac{1}{n_j-1}\right) = \frac{1}{T+t-1}(t-1+T) = 1.$$

由 u 点的任意性知,$\forall u \in V(G)$,均有 $f(N[u]) = 1$ 成立. 由引理 5 得

$$\gamma_f(G) = f(V(G)) = \sum_{i=1}^{t} f(V_i) = \sum_{i=1}^{t} \frac{n_i}{(T+t-1)(n_i-1)} = \frac{1}{T+t-1}\sum_{i=1}^{t}\left(1+\frac{1}{n_i-1}\right) = \frac{t+T}{T+t-1}.$$

定理 1 得证.

特殊地,当 $t = 2$,$n_1 = r$,$n_2 = s$ 时,$T = 1/(r-1) + 1/(s-1)$,代入定理 1 中即得到引理 6 的结论.

下面考虑关于联图的 F-控制数[9-11].

定理 2 设 G 和 H 为 2 个点不交的图,则 $(\gamma_f(G)\gamma_f(H) - 1)\gamma_f(G \vee H) \leqslant (\gamma_f(H) - 1)\gamma_f(G) + (\gamma_f(G) - 1)\gamma_f(H)$.

证 当 $\Delta(G) = |V(G)| - 1$ 或者 $\Delta(H) = |V(H)| - 1$ 时,显然 $\Delta(G \vee H) = |V(G \vee H)| - 1$,由引理 2 知,此时 $\gamma_f(G) = 1$ 或者 $\gamma_f(H) = 1$,且 $\gamma_f(G \vee H) = 1$,此时定理 2 成立.

下设 $\Delta(G) \leqslant |V(G)| - 2$ 且 $\Delta(H) \leqslant |V(H)| - 2$,由引理 2 知 $\gamma_f(G) > 1$ 且 $\gamma_f(H) > 1$. 记 $p = \gamma_f(G)$,$q = \gamma_f(H)$,令 f_1 和 f_2 分别为图 G 和图 H 的 1 个最小 F-控制函数,即 $p = f_1(V(G))$ 且 $q = f_2(V(H))$,定义联图 $G \vee H$ 上的实值函数 f 如下:

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{q-1}{pq-1} f_1(u), & u \in V(G) \\ \dfrac{p-1}{pq-1} f_2(u), & u \in V(H), \end{cases}$$

由于 f_1 和 f_2 分别为图 G 和图 H 的 F-控制函数,故有 $0 \leqslant f_1(u) \leqslant 1$,$0 \leqslant f_2(u) \leqslant 1$. 注意到 $p = \gamma_f(G) > 1$,$q = f_2(V(H)) > 1$,可知 $0 \leqslant f(u) \leqslant 1$.

$\forall u \in V(G \vee H)$,不妨设 $u \in V(G)$,由于 $f_1(N_G[u]) \geqslant 1$,故有

$$f(N_{G\vee H}[u]) = f(N_G[u]) + f(V(H)) = \frac{q-1}{pq-1} f_1(N_G[u]) + \frac{p-1}{pq-1} f_2(V(H)) \geqslant \frac{q-1}{pq-1} + \frac{(p-1)q}{pq-1} = 1.$$

因此,实值函数 f 为联图 $G \vee H$ 的 1 个 F-控制函数,从而有

$$\gamma_f(G \vee H) \leqslant f(V(G \vee H)) = f(V(G)) + f(V(H)) = \frac{q-1}{pq-1} f_1(V(G)) + \frac{p-1}{pq-1} f_2(V(H)) = \frac{(q-1)p + (p-1)q}{pq-1},$$

即 $(pq-1)\gamma_f(G \vee H) \leqslant (q-1)p + (p-1)q$. 定理 2 得证.

在定理 2 的证明中不难看出,如果分别存在图

G 和图 H 的 F-控制函数 f_1 和 f_2,使得 $f_1(N[u])=1$ 对任何 $u\in V(G)$ 成立,并且 $f_2(N[v])=1$ 对任何 $v\in V(H)$ 成立,则定理 2 中等式成立.

推论1　设 G 和 H 为 2 个点不交的图,如果分别存在图 G 和图 H 的 F-控制函数 f_1 和 f_2,使得 $f_1(N[u])=1$ 且 $f_2(N[v])=1$ 对任何 $u\in V(G)$ 和 $v\in V(H)$ 成立,则有

$$(\gamma_f(G)\gamma_f(H)-1)\gamma_f(G\vee H)=(\gamma_f(H)-1)\gamma_f(G)+(\gamma_f(G)-1)\gamma_f(H).$$

由推论 1 可以确定一些特殊联图的 F-控制数.

引理7　设整数 $n\geqslant 3$,P_n 和 C_n 分别表示 n 阶路和 n 阶圈,则

(i) $\gamma_f(C_n)=n/3$,且存在 C_n 的 F-控制函数 f,使得 $f(N[u])=1$ 对任何 $u\in V(C_n)$ 成立;

(ii) $\gamma_f(P_n)=\lceil n/3\rceil$,且存在 P_n 的 F-控制函数 f,使得 $f(N[u])=1$ 对任何 $u\in V(P_n)$ 成立.

证　(i) 由引理 4 知 $\gamma_f(C_n)=n/3$,并取 C_n 上 1 个常数函数 $f=1/3$,显然有 $f(N[u])=1$ 对任意 $u\in V(C_n)$ 成立.

(ii) 记 $V(P_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,且 $E(P_n)=\{v_iv_{i+1}\mid 1\leqslant i\leqslant n-1\}$. 下面分 2 种情形定义 P_n 上的函数 f 如下:

当 $n\equiv 0,2(\mathrm{mod}3)$ 时,令

$$f(v_i)=\begin{cases}1, & i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3),\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

当 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ 时,令

$$f(v_i)=\begin{cases}1, & i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3),\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

不难验证,$f(N[u])=1$ 对任何 $u\in V(P_n)$ 成立. 由引理 5 得

$$\gamma_f(P_n)=f(V(P_n))=\lceil n/3\rceil.$$

引理 7 得证.

由引理 7 及推论 1 可直接得出下面的结论.

定理3　设 $m\geqslant 4$ 和 $n\geqslant 4$,且它们均为整数,记 $p=\lceil m/3\rceil$,$q=\lceil n/3\rceil$,则

(i) $\gamma_f(C_m\vee C_n)=\dfrac{m(n-3)+n(m-3)}{mn-9}$;

(ii) $\gamma_f(C_m\vee P_n)=\dfrac{m(q-1)+q(m-3)}{mq-3}$;

(iii) $\gamma_f(P_m\vee P_n)=\dfrac{p(q-1)+q(p-1)}{pq-1}$.

2　参考文献

[1] Bondy J A,Murty V S R. Graph theory with applications [M]. Amsterdam: Elsevier,1976.

[2] Haynes T W,Hedetniemi S T,Slater P J. Domination in graphs [M]. New York: Marcel Dekker,1998.

[3] Domke G S,Hedetniemi S T,Laskar R C. Fractional packings,coverings and irredundance in graphs [J]. Congr Numer,1988,66: 227-238.

[4] 徐保根. 图的控制与染色理论 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社,2013.

[5] Hare E O. K-weight domination and fractional domination of $P_m\times P_n$ [J]. Congr Numer,1990,78: 71-80.

[6] Fisher D C. Domination,fractional domination,2-packing and graph products [J]. SIAM Discrete Math,1994,7(3): 493-498.

[7] 徐保根,陈悦. 图的符号边全 K 控制数 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2011,35(3): 316-318.

[8] 徐保根,赵利芬,操叶龙,等. 关于图的控制集划分 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版,2013,37(5): 475-478.

[9] 齐登记,梁希泉. 关于图的控制数 Vizing's 定理的推广 [J]. 东北师大学报: 自然科学版,2005,37(1): 24-27.

[10] 周仲旺,刘书英. 一类联图的符号边控制数 [J]. 数学的实践与认识,2013,43(16): 255-261.

[11] 徐保根,张亚琼,汤友良. 关于图的符号边控制数的一些结论 [J]. 河南科技大学学报: 自然科学版,2012,33(4): 74-77.

On Fractional Domination Numbers in Graphs

XU Bao-gen,ZHAO Li-xin,ZOU Yan

(Department of Mathematics,East China Jiaotong University,Nanchang Jiangxi 330013,China)

Abstract: Some questions on the fractional domination are discussed,a upper bound for the joint graphs is mainly obtained. Hence,the fractional domination numbers for some special classes of joint graphs are determined,and some known results are generalized.

Key words: domination number; fractional domination number; complete t-partite graph; joint graph

(责任编辑: 曾剑锋)